Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 9—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 512.54+512.55

Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр *

А. П. Елисова
Сибирский федеральный университет

И. Н. Зотов
Сибирский федеральный университет

В. М. Левчук
Сибирский федеральный университет

Г. С. Сулейманова
Хакасский технический институт

Аннотация. В статье изучаются общие свойства и связи локальных автоморфизмов и локальных дифференцирований нильпотентных алгебр. Построены примеры новых нетривиальных локальных автоморфизмов и дифференцирований алгебры нильтреугольных $n \times n$ матриц (при $n = 3$ они полностью описаны) и соответствующей подалгебры алгебры Шевалле.

Ключевые слова: нильпотентная алгебра; нильтреугольная матрица; алгебра Шевалле; локальное дифференцирование; локальный автоморфизм.

Введение

Всюду в статье K есть ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. *Локальным дифференцированием* кольца (или K-алгебры) R называют всякое аддитивное (соответственно, K-линейное) отображение $\phi : R \to R$, действующее на каждый элемент $x \in R$ как некоторое дифференцирование ϕ_x, вообще говоря, зависящее от x:

$$\phi_x(\alpha\beta) = \phi_x(\alpha)\beta + \alpha\phi_x(\beta) \quad (\alpha, \beta \in R).$$

Аналогично определяют локальный автоморфизм, [13]. Тривиальные локальные дифференцирования и автоморфизмы – это обычные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00717.

дифференцирования и автоморфизмы, соответственно. Как показано в [13], для полной алгебры комплексных $n \times n$ матриц локальные автоморфизмы исчерпываются автоморфизмами и антиавтоморфизмами. В комплексной алгебре треугольных 3×3 матриц подалгебра с нетривиальным локальным автоморфизмом указана в [9]. См. также [10] – [12].

В статье, наряду с изучением общих свойств и связей, построены нетривиальные локальные автоморфизмы и дифференцирования алгебры $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K и подалгебры $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ в K-алгебре с базисом Шевалле $\{e_r\ (r \in \Phi), \cdots\}$, ассоциированной с системой корней Φ, [8, § 4.4]. Отметим, что алгебра $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с $NT(n, K)$.

Полное описание локальных автоморфизмов и локальных дифференцирований алгебры $NT(n, K)$ указывает при $n = 3$ теорема 2. Существенно используются известные описания автоморфизмов и дифференцирований алгебр и колец $NT(n, K)$, [5, 6, 14].

1. Общие свойства

Отметим, что автоморфизмы и дифференцирования характеризуются действием на порождающих элементах кольца или алгебры. С другой стороны, очевидны следующие две леммы.

Лемма 1. *Всякий локальный автоморфизм и локальное дифференцирование K-алгебры или кольца R характеризуется действием на элементах, порождающих R соответственно K-линейно или аддитивно.*

Лемма 2. *Неединичный локальный автоморфизм (аналогично ненулевое локальное дифференцирование) ξ кольца является нетривиальным, если $\xi = 1$ (соответственно, $\xi = 0$) на каком-либо порождающем множестве кольца.*

Тесную связь эндоморфизмов и дифференцирований выявляет (см. [6, Лемма 1])

Лемма 3. *Эндоморфизм ζ аддитивной группы R^+ при $\zeta(R)^2 = 0$ есть дифференцирование кольца R тогда и только тогда, когда эндоморфизмом кольца R является $1 + \zeta : x \to x + \zeta(x)$.*

Доказательство вытекает непосредственно из соотношений

$$(1 + \zeta)(x) \cdot (1 + \zeta)(y) = x \cdot y + \{\zeta(x) \cdot y + x \cdot \zeta(y)\} + \zeta(x) \cdot \zeta(y),$$

$$(1+\zeta)(xy) = x \cdot y + \zeta(xy) \quad (x, y \in R).$$

Замечание 1. Предыдущее доказательство не переносится для получения локального аналога леммы 3. Если ζ – локальное дифференцирование кольца R и $\zeta(R)^2 = 0$, то дифференцирования ζ_x, вообще говоря, не всегда можно выбрать так, что $\zeta_x(R)\zeta_y(R) = 0$ $(x, y \in R)$, см. доказательство леммы 6.

Лемма 4. *Локальные автоморфизмы произвольной алгебры или кольца R образуют по умножению группу. (Её обозначение: Laut R.)*

Доказательство. Пусть ϕ, ψ – локальные автоморфизмы произвольного кольца R. Они действуют на любой элемент $x \in R$ соответственно как автоморфизмы ϕ_x, ψ_x кольца R.

Ясно, что $\phi\psi$ и ϕ^{-1} – автоморфизмы аддитивной группы R^+ кольца R. Нам достаточно показать, что они действуют на произвольный элемент $x \in R$ как кольцевые автоморфизмы, соответственно,

$$(\phi\psi)_x = \phi_{\psi(x)}\psi_x, \quad (\phi^{-1})_x = (\phi_{\phi^{-1}(x)})^{-1}.$$

Очевидно, $x = \phi(z) = \phi_z(z)$ для единственного элемента $z \in R$. Поэтому

$$\phi^{-1}(x) = z = \phi_z^{-1}(\phi_z(z)) = (\phi_z)^{-1}(x) = (\phi^{-1})_x(x).$$

Кроме того,

$$(\phi\psi)(x) = \phi(\psi_x(x)) = \phi_{\psi_x(x)}(\psi_x(x)) = (\phi_{\psi(x)}\psi_x)(x) = (\phi\psi)_x(x).$$

Следовательно, $\phi\psi, \phi^{-1} \in$ *Laut* R. Случай алгебр доказывается аналогично. □

Неизвестно, *всегда ли подгруппа Aut R в группе Laut R нормальна.*

Согласно [3], дифференцирования любого кольца R образуют подкольцо *Der* R в кольце Ли, ассоциированном с кольцом *End* R^+ эндоморфизмов аддитивной группы R^+ кольца R.

Легко видеть, что локальные дифференцирования кольца R образуют аддитивную подгруппу *Locder* R кольца *End* R^+. (При $x \in R$ и $\phi, \psi \in$ *Locder* R можно полагать $(\phi + \psi)_x = \phi_x + \psi_x$.)

Очевидно, *внутреннее* дифференцирование $x \to x * \gamma = x\gamma - \gamma x$ ассоциативного кольца для любого его элемента γ дает дифференцирование каждого идеала в кольце.

2. Алгебра нильтреугольных матриц

Алгебру $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных (с нулями на главной диагонали и над ней) $n \times n$ матриц над K порождают K-линейно матричные единицы e_{ij}, а аддитивно – элементарные матрицы

$$xe_{ij} \ (1 \le j < i \le n, \ x \in K); \qquad xe_{ij} + ye_{ij} = (x + y)e_{ij}.$$

Ясно, что матрицы xe_{i+1i} $(1 \le i < n, \ x \in K)$ и аналогично e_{i+1i} порождают $NT(n, K)$ как кольцо или алгебру, соответственно, поскольку

$$(xe_{ij})(ye_{jm}) = xye_{im}, \ \ (xe_{ij})(ye_{km}) = 0, \ j \ne k.$$

В описаниях [5] и [14] существенно используется

Лемма 5. *Следующие идеалы кольца $R = NT(n, K)$ инвариантны относительно всех его автоморфизмов и дифференцирований:*

$$Q_{ij} = \langle Ke_{uv} \mid 1 \le v \le j < i \le u \le n, \ (u, v) \ne (i, j) \rangle,$$

$$N_{ij} = \langle Ke_{uv} \mid 1 \le v \le j < i \le u \le n \rangle, \quad 1 \le j < i \le n.$$

Выделим основные автоморфизмы и дифференцирования. Автоморфизм или дифференцирование θ кольца K индуцирует, соответственно, автоморфизм или дифференцирование кольца R:

$$\bar{\theta} : \parallel a_{ij} \parallel \to \parallel \theta(a_{ij}) \parallel \qquad (\parallel a_{ij} \parallel \in NT(n, K)).$$

Как обычно, автоморфизмы из $Aut\ K$ индуцируют подгруппу автоморфизмов $\overline{Aut}\ K$ кольца R. Аналогично получаем $\overline{Der}\ K$.

Пусть $\mathcal{T}$, J и $\mathcal{D}$ есть подгруппы сопряжений кольца R обратимыми треугольными, унитреугольными и диагональными матрицами над K соответственно. Ясно, что $\mathcal{T} = J \leftthreetimes \mathcal{D}$; автоморфизмы из J называют внутренними. Отображение $\alpha \to \alpha * \gamma = \alpha\gamma - \gamma\alpha$ $(\alpha \in R)$ для треугольной $n \times n$ матрицы γ над K есть треугольное дифференцирование. Его называем диагональным, когда γ – диагональная матрица.

Подгруппы Z и Z_0 центральных, т.е действующих тождественно по модулю центра автоморфизмов, соответственно, кольца или алгебры R указаны явно в [5]. В частности, подгруппу Z_0 составляют автоморфизмы

$$\alpha \to \alpha + \Sigma_{i=1}^{n-1} a_{i+1i} c_i e_{n1} \quad (\alpha = \|a_{uv}\| \in R)$$

для всевозможных $c_i \in K$. С другой стороны, для любых фиксированных $c \in K$ и i $(1 \le i < n)$, по лемме 3, отображения

$$\xi_{i,c} : \|a_{uv}\| \to ca_{i+1i}e_{n,1} \quad (\|a_{uv}\| \in R)$$

есть дифференцирования алгебры R, порождающие все ее *центральные* дифференцирования.

В [5, Теорема 1] и [14, Теорема 1] доказана

Теорема 1. Для кольца (и алгебры) $R = NT(n, K)$ $(n \geq 3)$ группа автоморфизмов допускает факторизацию $Z\mathcal{T}\overline{Aut}\ K$ (соответственно, $Z_0\mathcal{T}$). Аддитивная группа $Der\ R$ дифференцирований есть сумма $\overline{Der}\ K$ и подгрупп треугольных и центральных дифференцирований.

Лемма 6. *Всякое локальное дифференцирование и всякий локальный автоморфизм кольца $R = NT(n, K)$ действуют тривиально на всех элементах e_{i+1i} по модулю Q_{i+1i}, $1 \leq i < n$.*

Доказательство. В силу теоремы 1,

$$e_{ij}^{Laut\ R} = e_{ij}^{AutR} = e_{ij}^{\mathcal{D}} \quad mod\ Q_{ij}.$$

Поэтому для любого локального автоморфизма ψ кольца R существуют обратимые элементы $c_{ij} \in K$ такие, что

$$\psi(e_{ij}) = c_{ij}e_{ij}\ \ mod\ \ Q_{ij} \qquad (1 \leq j < i \leq n). \tag{2.1}$$

С точностью до умножения ψ на диагональный автоморфизм, имеем

$$\psi(e_{i+1i}) = e_{i+1i}\ mod\ Q_{i+1i}, \ \ i = 1, 2, ..., n-1.$$

По лемме 5, когда ψ – произвольное локальное дифференцирование кольца R, соотношения (2.1) также выполняются для подходящих элементов $c_{ij} \in K$, в силу леммы 5. Найдем диагональное дифференцирование $\delta : \alpha \to \alpha * D = \alpha D - D\alpha$ с аналогичным действием по модулю R^2. Замечая, что

$$\delta(e_{ij}) = (d_j - d_i)e_{ij} \ \text{ при } \ D = \Sigma_{i=1}^n d_i e_{ii},$$

требуемое дифференцирование δ (с любым d_1) получаем, полагая

$$d_{j+1} = d_j - c_{j+1j} = d_1 - c_{21} - c_{32} - \cdots - c_{j+1j} \quad (1 \leq j < n).$$

С точностью до прибавления диагонального дифференцирования, имеем

$$\psi(e_{i+1i}) \subseteq Q_{i+1i}, \ \ i = 1, 2, ..., n-1.$$

□

Заметим, что ненулевые локальные дифференцирования вида

$$\varphi_{km,t} : \alpha = ||a_{ij}|| \to ta_{km}e_{n1}, \qquad \delta_{km,t} : \alpha \to ta_{km}e_{km} \quad (t \in K)$$

алгебры $R = NT(n, K)$ при $k-m = 1$ есть, соответственно, центральные и диагональные. При $1 < k - m < n$ они нетривиальны, по лемме 2. Их существование мы выявляем, в частности, когда K – локальное кольцо с нильпотентным главным максимальным идеалом.

Лемма 7. *Если Kt – единственный минимальный ненулевой идеал кольца K, то $\varphi_{31,t}$ и $\varphi_{nn-2,t}$ $(n > 3)$ есть локальные дифференцирования.*

Доказательство. Укажем для каждого элемента $\alpha = \|a_{uv}\| \in R$ дифференцирование $\varphi_\alpha \in DerR$ такое, что

$$\varphi_\alpha(\alpha) = \varphi_{31,t}(\alpha) = ta_{31}e_{n1}.$$

При $ta_{31} = 0$ полагаем $\varphi_\alpha = 0$. Если $ta_{32} = 0$, то $\varphi_{31,t}(\alpha)$ совпадает с образом относительно внутреннего дифференцирования:

$$\alpha * (-te_{n3}) = te_{n3}\alpha = ta_{31}e_{n1} = \varphi_{31,t}(\alpha).$$

Допустим, что $ta_{31} \neq 0$ и $ta_{i+1i} \neq 0$ при каком-либо i. Учитывая выбор в лемме идеала $Kt = (t)$, находим соотношения и элемент $k \in K$:

$$(t) \subseteq (ta_{i+1i}) \subseteq (t), \quad (t) = (ta_{i+1i}), \qquad t = ta_{i+1i}k.$$

Полагая $c = tka_{31}$, приходим к равенствам

$$\xi_{i,c}(\alpha) = ca_{i+1i}e_{n1} = (tka_{31})a_{i+1i}e_{n1} = (tka_{i+1i})a_{31}e_{n1} = ta_{31}e_{n1}$$

и поэтому $\xi_{i,c}(\alpha) = \varphi_{31,t}(\alpha)$ для центрального дифференцирования $\xi_{i,c}$.

Аналогично показывается, что значение $\varphi_{nn-2,t}(\alpha) = ta_{nn-2}e_{n1} \neq 0$ равно $\alpha * (te_{n-21})$ или $\xi_{n-2,c}(\alpha)$ для подходящего $c \in (ta_{nn-2})$. Следовательно, $\varphi_{31,t}$ и $\varphi_{nn-2,t}$ – локальные дифференцирования. $\square$

Ранее в [2] для колец $NT(4, K)$ были построены нетривиальные локальные автоморфизмы $1+\varphi_{31,t}+\varphi_{42,t}$. Для алгебры $R = NT(n, K)$ $(n > 3)$ в [1, Теорема 3] показано, что $1 + \varphi_{31,t}$ действует на $\alpha = \|a_{uv}\| \in R$ как определенный внутренний или центральный автоморфизм соответственно случаям $ta_{32} = 0$ и $ta_{32} \neq 0$. Поэтому $1 + \varphi_{31,t}$ (аналогично $1 + \varphi_{nn-2,t}$) есть локальный автоморфизм.

Лемма 8. *Пусть $\varphi_{km,t}$ есть локальное дифференцирование кольца R и $1 < k - m < n - 1$. Тогда $t = 0$ или $(k, m) = (3, 1)$ или $(n, n - 2)$.*

Доказательство. Предположим, как и в лемме, что $\varphi_{km,t} = \varphi$ есть локальное дифференцирование алгебры $R = NT(n, K)$, причем (k, m) отлично от $(3, 1)$ и $(n, n - 2)$. Тогда $\varphi(\alpha) = \varphi_\alpha(\alpha)$ для каждой матрицы $\alpha = ||a_{ij}|| \in R$, где φ_α – дифференцирование алгебры R, являющееся по теореме 1 суммой треугольного и центрального дифференцирований.

Заметим, что любое центральное дифференцирование алгебры R переводит R^2 и, в частности, e_{km} в 0. Следовательно, существует треугольная матрица β над R такая, что

$$\varphi(e_{km}) = te_{n1} = e_{km} * \beta = e_{km}\beta - \beta e_{km}.$$

Поскольку матрицы $e_{km}\beta$ и βe_{km} могут иметь ненулевые элементы только в k-й строке и в m-м столбце, соответственно, то $m = 1$ или $k = n$.

Пусть $m = 1$ и $3 < k < n$. (Случай $k = n,\ 1 < m < n-2$ исследуется аналогично.) Тогда $e_{k1} + e_{k2} \in R^2$ и $\beta = ||b_{ij}||$ можем выбрать так, что

$$\varphi(e_{k1} + e_{k2}) = te_{n1} = (e_{k1} + e_{k2}) * \beta = e_{k2}\beta - \beta(e_{k1} + e_{k2}).$$

Отсюда вытекают равенства

$$e_{k2}\beta = 0, \quad te_{n1} = -\beta(e_{k1} + e_{k2}) = -b_{nk}(e_{n1} + e_{n2})$$

и поэтому $t = -b_{nk} = 0$. □

Можно показать, что если $1 + \varphi_{km,t}$ есть локальный автоморфизм кольца R и $1 < k - m < n - 1$, то также $t = 0$ или $(k, m) = (3, 1)$ или $(n, n-2)$.

Выделим при $c \in K$ аддитивный эндоморфизм (совпадающий с $\varphi_{n1,c}$ и $\delta_{n1,t}$):

$$\delta_c : \alpha \to ca_{n1}e_{n1} \qquad (\alpha = ||a_{ij}|| \in R). \tag{2.2}$$

Лемма 9. *Пусть $R = NT(n, K)$, $c \in K$ и Kc – единственный минимальный ненулевой идеал в K. Если $n = 3$ или 4, то δ_c есть локальное дифференцирование, а когда $1+c$ также обратимый в K элемент, $1+\delta_c$ есть локальный автоморфизм кольца R.*

Доказательство. Выберем в R произвольную матрицу $\alpha = ||a_{ij}||$. Пусть $n = 3$ и $\delta_c(\alpha) = ca_{31}e_{31} \neq 0$. Если $ca_{21} = ca_{32} = 0$, то

$$\alpha * D = ca_{31}e_{31} = \delta_c(\alpha), \quad D = diag\{c, 0, 0\}.$$

Допустим $ca_{21} \neq 0$ и предположим, что Kc – единственный минимальный ненулевой идеал в K. Тогда включения идеалов $(c) \subseteq (ca_{21}) \subseteq (c)$ дают равенство $(c) = (ca_{21})$. Поэтому существует элемент $p \in K$ такой, что $c = (ca_{21})p$. Полагая $d = cpa_{31}$, получаем равенства

$$da_{21} = (cpa_{31})a_{21} = (cpa_{21})a_{31} = ca_{31}, \quad \delta_c(\alpha) = \xi_{1,d}(\alpha).$$

Когда $ca_{32} \neq 0$, аналогично находим d с условием $\delta_c(\alpha) = \xi_{2,d}(\alpha)$.

Аналогично рассматриваем случай $n = 4$; при $ca_{21} = ca_{32} = ca_{43} = 0$ заменяем D на $diag\{0, -c, 0, -c\}$, а в остальных случаях $\delta_c(\alpha) = \xi_{i,d}(\alpha)$ для подходящего номера $i = 1, 2$ или 3 и $d \in K$.

Если элемент c в K также квазиобратимый или, равносильно, $1 + c$ – обратимый элемент кольца K, то $1 + \delta_c$ есть локальный автоморфизм кольца R, согласно [1, Теорема 4]. □

Сейчас мы можем описать группы $Laut\ R$ и $Locder\ R$ при $n = 3$. В силу леммы 6 и теоремы 1, любое локальное дифференцирование ψ алгебры R, с точностью до прибавления диагонального и центрального дифференцирований, имеет вид (2.2). Другими словами, существуют диагональное дифференцирование δ и элементы $f, g, c \in K$ такие, что

$$\psi = \delta + \xi_{1,f} + \xi_{2,g} + \delta_c.$$

Согласно [1, Теорема 1], произвольный локальный автоморфизм алгебры R аналогично факторизуется произведением. Тем самым, доказана

Теорема 2. *Пусть $R = NT(n, K)$ и $n = 3$. Тогда всякое локальное дифференцирование алгебры R есть сумма дифференцирования и локального дифференцирования δ_c вида (2.2). Всякий локальный автоморфизм алгебры R есть произведение её автоморфизма и локального автоморфизма вида $1 + \delta_c$ с обратимым элементом $1 + c$.*

Замечание 2. В общем случае алгебры $R = NT(4, K)$ допускают нетривиальные локальные автоморфизмы другого типа, а именно, вида:

$$\alpha \to \alpha + ta_{31}e_{31} + ta_{42}e_{42} \quad (\alpha = \|a_{uv}\| \in R). \tag{2.3}$$

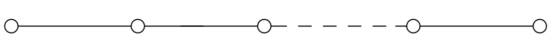
Используя лемму 4, можно доказать, что группу $Laut\ R$ порождают $Aut\ R$ и локальные автоморфизмы, построенные выше, и вида (2.3).

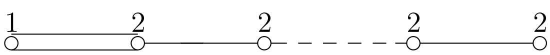
3. Подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле

В этом параграфе мы построим примеры нетривиальных локальных автоморфизмов и дифференцирований алгебры Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$, а также соответствующих подалгебр в алгебрах Шевалле классического типа.

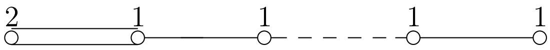
Рассмотрим K-алгебру Шевалле с базисом Шевалле $\{e_r\ (r \in \Phi), \cdots\}$, ассоциированную с системой корней Φ, [8, § 4.4], [4]. Через $N\Phi(K)$ обозначают ее подалгебру с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$, где Φ^+ – система положительных корней.

Для систем корней Φ классического типа графы Кокстера (схемы Дынкина для типа B_n и C_n), введенные в [7, V.12 и V.15], имеют следующий вид:

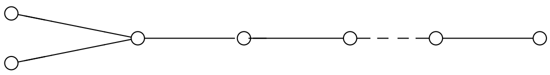
A_n :  (n вершин, $n \geqslant 1$)

B_n : 

(n вершин, $n \geqslant 2$)

C_n : 

(n вершин, $n \geqslant 2$)

D_n : 
(n вершин, $n \geqslant 4$)

Его вершины соответствуют простым корням $p_1, p_2, \cdots, p_n$, причем p_n для типа B_n есть длинный корень, а для типа C_n – короткий корень.

При $t \in K$ выделим следующий эндоморфизм

$$\varphi_{q,t} : \alpha = \Sigma_{r \in \Phi^+} a_r e_r \to t a_q e_\rho \quad (\alpha = \Sigma_{r \in \Phi^+} a_r e_r \in N\Phi(K)).$$

алгебры $N\Phi(K)$, где $q = p_{n-1} + p_n$ и ρ – максимальный корень в Φ.

Теорема 3. *Пусть Φ есть система корней типа A_n, B_n, C_n $(n \geq 3)$ или D_n $(n > 4)$. Если Kt – единственный минимальный ненулевой идеал кольца K, то $\varphi_{q,t}$ есть локальное дифференцирование алгебры Ли $N\Phi(K)$, а $1 + \varphi_{q,t}$ – локальный автоморфизм.*

Доказательство. Вначале рассмотрим алгебру Ли $N\Phi(K)$ типа A_{n-1}; она изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с $NT(n, K)$. Если при этом $r = p_i + p_{i+1} + \cdots + p_j$, то в обозначениях § 2 имеем $e_r = e_{j+1i}$ и $\varphi_{q,t} = \varphi_{nn-2,t}$.

Ясно, что дифференцирование или автоморфизм ассоциативного кольца есть, соответственно, дифференцирование или автоморфизм ассоциированного кольца Ли. Поэтому, применяя леммы 7 и 8, приходим к следующей лемме.

Лемма 10. *Пусть R есть алгебра Ли, ассоциированная с алгеброй $NT(n, K)$, $1 < k - m < n - 1$ и либо $\varphi_{km,t}$ – локальное дифференцирование, либо $1 + \varphi_{km,t}$ – локальный автоморфизм алгебры Ли R. Тогда $(k, m) = (3, 1)$ или $(n, n - 2)$ или $t = 0$. Если Kt – единственный минимальный ненулевой идеал кольца K, то $\varphi_{31,t}$ и $\varphi_{nn-2,t}$ есть локальные дифференцирования, а $1 + \varphi_{31,t}$ – локальные автоморфизмы алгебры R.*

По аналогичной схеме, используя представления из [4] алгебр $N\Phi(K)$, получаем доказательство теоремы 3 для типа B_n, C_n и D_n. $\square$

Построенные в теореме 3 локальные дифференцирования и локальные автоморфизмы алгебр Ли $N\Phi(K)$ являются нетривиальными, в силу леммы 2.

Список литературы

1. Елисова А. П. Локальные автоморфизмы алгебры нильтреугольных матриц над кольцом / А. П. Елисова // Алгебра, логика и методика обучения математики : материалы Всерос. конф. Красноярск : КГПУ, 2010. – С. 37–42.

2. Зотов И. Н. Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых степеней / И. Н. Зотов // Тр. XLII краевой науч. студ. конф. по математике и компьютерным наукам / Сиб. федер. ун-т. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – С. 24–25.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1973.
4. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа / В. М. Левчук // Алгебра и логика. – 1990. – Т. 29 – С. 141–161.
5. Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов / В. М. Левчук // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 24, № 4. – С.543–557.
6. Левчук В. М. Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально-нильпотентных матричных групп и колец / В. М. Левчук, Е. В. Минакова // ДАН. – 2009. – Т. 425, № 2. – С.165–168.
7. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр. – М. : Мир, 1969.
8. Carter R. Simple groups of Lie type / R. Carter. – N. Y. : Wiley and Sons, 1972.
9. Crist R. Local automorphisms / R. Crist // Proc. Amer. Math. Soc. – 2000. – Vol. 128. – P. 1409–1414.
10. Ghosseiri M. Jordan derivations of some classes of matrix rings / M. Ghosseiri, N. Nader // Taiwanese J. Math. – 2007. – Vol. 11. – P. 51–62.
11. Hadwin D. Local derivations and local automorphisms / D. Hadwin, J. Li // J. Math. Analysis and Applications. – 2004. – Vol. 290. – P. 702–714.
12. Kadison R. Local derivations / R. Kadison // J. Algebra. – 1990. – Vol. 130. – P. 494–509.
13. Larson D. R. Local derivations and local automorphisms of $B(H)$ / D. R. Larson, A. R. Sourour // Proc. Sympos. Pure Math. – 1990. – Vol. 51. – P. 187–194.
14. Levchuk V. M. Derivations of the locally nilpotent matrix rings / V. M. Levchuk, O. V. Radchenko // J. Algebra and Applications. – 2010. – Vol. 9, N 5. – P. 717–724.

A. P. Elisova, I. N. Zotov, V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova

Local automorphisms and local derivations of nilpotent matrix algebras

Abstract. We study general properties and ties of local automorphisms and local derivations of nilpotent algebras. Also we construct examples of nontrivial local automorphisms and local derivations of algebra of niltriangular $n \times n$ matrixes (they are completely described in case $n = 3$) and corresponding subalgebra in the Chevalley algebras.

Keywords: nilpotent algebra; niltriangular matrix; Chevalley algebra; local derivations; local automorphisms.

Елисова Анна Петровна, аспирант, Институт математики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79, тел.: (391)2441600 (`anshub@mail.ru`)

Зотов Игорь Николаевич, студент, Институт математики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79, тел.: (391)2441600 (`zotovin@rambler.ru`)

Левчук Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Институт математики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, просп. Свободный, 79, тел.: (391)2441600 (levchuk@lan.krasu.ru)

Сулейманова Галина Сафиуллановна, кандидат физико-математических наук, докторант СФУ, доцент, Хакасский технический институт - филиал Сибирского федерального университета, 655017, Республика Хакасия, Абакан, ул. Щетинкина, 27, тел.: (391)2441600 (suleymanova@list.ru)

Elisova Anna, Siberian Federal University, 79, Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Phone: (391)2441600 (anshub@mail.ru)

Zotov Igor, Siberian Federal University, 79, Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Phone: (391)2441600 (zotovin@rambler.ru)

Levchuk Vladimir, Siberian Federal University, 79, Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Phone: (391)2441600 (levchuk@lan.krasu.ru)

Suleimanova Galina, Khakas Technical Institute, 27, Schetinkina Av., Abakan, 655017, Phone: (391)2441600 (suleymanova@list.ru)