Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 90—102

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.5

Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения *

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе методами теории фундаментальных оператор-функций исследована задача Коши для интегро-дифференциального уравнения в банаховых пространствах с фредгольмовым оператором в главной части. Построена фундаментальная оператор-функция, с помощью которой получена конструктивная формула для обобщенного решения в классе распределений с ограниченным слева носителем. Описаны условия совпадения классического и обобщенного решений. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений двух-контурной электрической цепи и одной задачи Коши-Дирихле из математической теории вязкоупругости.

Ключевые слова: банахово пространство, обобщенная функция, жорданов набор, фредгольмов оператор, фундаментальная оператор-функция.

1. Введение

Некоторые неклассические начально-краевые задачи математической физики редуцируются к интегро-дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах

$$Bu^{(N)}(t) = Au(t) + \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u^{(k)} = u_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, госконтракт № П696.

где $B, A, k(t)$ – замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, оператор B – фредгольмов [1]. С помощью аппарата теории обобщенных функций в банаховых пространствах задача Коши (1)-(2) для случая $N = 1$ полностью исследована (см., например, работы [5, 6, 15]). Однако для приложений к задачам теории вязкоупругости или теории многоконтурных электрических цепей актуальными являются случаи, когда $N \geq 2$ и ядро сверточного интегрального оператора имеет специальный вид $k_1(t) = g(t)A$ или $k_2(t) = g(t)B$, здесь $g(t)$ – достаточно гладкая числовая функция при $t \geq 0$. С помощью теории фундаментальных оператор-функций вырожденных интегро-дифференциальных операторов в банаховых пространствах первый случай $k_1(t) = g(t)A$ исследован при различных типах сингулярности операторного пучка $(B - \lambda A)$ в серии работ [7, 8, 14]. В данной заметке представлены результаты исследования второго случая $k_2(t) = g(t)B$.

2. Фундаментальная оператор-функция вырожденного интегро-дифференциального оператора

При изложении основных результатов этого пункта будет использована терминология и обозначения теории обобщенных функций и фундаментальных решений дифференциальных операторов в банаховых пространствах. Основные сведения этой теории приведены в работах [5, 6, 15, 9, 10] и в дальнейшем будут использоваться без развернутых дополнительных пояснений.

В начале приведем основные условия, в которых были проведены исследования.

Пусть A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, E_1, E_2 - банаховы пространства, B - фредгольмов оператор [1], $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$, $\{\varphi_i\} \in E_1$ – базис ядра $N(B)$, $\{\psi_i\} \in E_2^*$ – базис ядра сопряженного оператора $N(B^*), i = 1, \ldots, n$ и $\{z_i\} \in E_2$, $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ – соответствующие им биортогональные системы элементов и функционалов. Тогда оператор $\tilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ непрерывно обратим [1] и обратный к нему $\Gamma = \tilde{B}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)$ называется оператором Треногина-Шмидта. Введем проекторы P и Q в E_1 и E_2 соответственно по формулам

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i, \tag{3}$$

тогда

$$\Gamma B = I - P, \quad B\Gamma = I - Q. \tag{4}$$

Далее будем предполагать, что оператор B имеет полный A-жорданов набор [1], т.е. в E_1 существует система элементов $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i,\ \varphi_i^{(1)}=\varphi_i\right\}$ удовлетворяющая уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)}=0,\ \ B\varphi_i^{(j)}=A\varphi_i^{(j-1)},\ \ j=2,\dots,p_i, \tag{5}$$

условиям разрешимости

$$\langle A\varphi_i^{(j)},\psi_k\rangle=0,\ \ i,k=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,p_i-1, \tag{6}$$

и полноты

$$\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_k\rangle=\delta_{ik},\ \ i,k=1,\dots,n, \tag{7}$$

т.е. базис $\{\psi_k\}$ можно выбрать таким образом, чтобы биортогональной к нему была бы система элементов $z_i=A\varphi_i^{(p_i)},\ i=1,\dots,n$. Из существования полного A-жорданова набора оператора B следует [3] существование полного A^*-жорданова набора оператора B^*, состоящего из элементов $\left\{\psi_i^{(j)}\right\}\in E_2^*,\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i,\ \psi_i^{(1)}=\psi_i$ таких, что

$$B^*\psi_i^{(1)}=0,\ \ B^*\psi_i^{(j)}=A^*\psi_i^{(j-1)},\ \ j=2,\dots,p_i, \tag{8}$$

$$\langle\varphi_k,A^*\psi_i^{(j)}\rangle=0,\ \ i,k=1,\dots,n,\ \ j=1,\dots,p_i-1, \tag{9}$$

$$\langle\varphi_k,A^*\psi_i^{(p_i)}\rangle=\delta_{ik},\ \ i,k=1,\dots,n, \tag{10}$$

т.е. $\gamma_i=A^*\psi_i^{(p_i)},\ i=1,\dots,n$. Элементы наборов можно восстанавливать по циклическим формулам [1, 3] при $i=1,\dots,n$

$$\varphi_i^{(j)}=\Gamma A\varphi_i^{(j-1)}=(\Gamma A)^{j-1}\varphi_i^{(1)},\ \ \varphi_i^{(1)}=\varphi_i \tag{11}$$

$$\psi_i^{(j)}=\Gamma^*A^*\psi_i^{(j-1)}=(\Gamma^*A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)},\ \ \psi_i^{(1)}=\psi_i, \tag{12}$$

причем

$$\varphi_i^{(1)}=\Gamma z_i=\Gamma A\varphi_i^{(p_i)}=(\Gamma A)^{p_i}\varphi_i^{(1)}, \tag{13}$$

$$\psi_i^{(1)}=\Gamma^*\gamma_i=\Gamma^*A^*\psi_i^{(p_i)}=(\Gamma^*A^*)^{p_i}\psi_i^{(1)}. \tag{14}$$

Далее предполагаем, что все подобные перестройки базисов осуществлены. Системы элементов $\left\{\varphi_i^{(j)}\right\}$ и $\left\{\psi_i^{(j)}\right\}$ линейно независимы [1]. Справедлива следующая вспомогательная

Лемма 1. *Проектор*

$$\tilde{Q}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \tag{15}$$

удовлетворяет равенствам

$$Q_i(A\Gamma)^k(I-\tilde{Q}) \equiv 0, \quad i=1,\dots,n, \quad k \in N, \tag{16}$$

$$A\Gamma(I-\tilde{Q})B-(I-\tilde{Q})A \equiv 0, \tag{17}$$

$$\Gamma(I-\tilde{Q})B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)} \equiv I. \tag{18}$$

Доказательство. Так как натуральное число $k \in N$ представимо в виде $k=lp_i+r,\ r=0,\dots,p_i-1$, то используя последовательно циклические формулы (12) и (14), условия разрешимости (6) и полноты (7), получим

$$Q_i(A\Gamma)^k(I-\tilde{Q})=\langle\cdot,\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i(I-\tilde{Q})=$$

$$=\langle\cdot,\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i-\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\langle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i$$

или с учетом соотношений (14), (11) и (13)

$$Q_i(A\Gamma)^k(I-\tilde{Q})=\langle\cdot,\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i-\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\langle A\varphi_i^{(p_i+r+1-j)},\psi_i^{(1)}\rangle z_i=$$

$$=\langle\cdot,\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i-\langle\cdot,\psi_i^{(r+1)}\rangle z_i\equiv 0.$$

В силу соотношений (4) для проектора P из (3) имеем

$$A\Gamma(I-\tilde{Q})B-(I-\tilde{Q})A=A(I-P)-A\Gamma\tilde{Q}B-A+\tilde{Q}A,$$

поэтому

$$A\Gamma(I-\tilde{Q})B-(I-\tilde{Q})A=-\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_i\rangle A\varphi_i^{(1)}-$$

$$-A\Gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i}\langle\cdot,B^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},$$

тогда по формулам (11), в силу выбора элементов $\gamma_i=A^*\psi_i^{(p_i)}$ и уравнений (8) получаем

$$A\Gamma(I-\tilde{Q})B-(I-\tilde{Q})A=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1}\langle\cdot,B^*\psi_i^{(j+1)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\equiv 0.$$

Для доказательства равенства (18) вновь воспользуемся формулами связи (4) для проектора P из (3) и соотношениями (11) и (8)

$$\Gamma(I-\tilde{Q})B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}=I-P-$$

$$-\Gamma\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i}\langle\cdot,B^*\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}=$$

$$=I-\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(1)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i-1}\langle\cdot,B^*\psi_i^{(j+1)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}=I.$$

□

Лемма 2. *Для резольвенты $\mathcal{R}(t)$ ядра $k(t)=\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*g(t)\theta(t)$ в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$ (см. [2]) справедливы равенства*

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)*\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)=\delta(t),$$

$$\frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k+1}*\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)=$$

$$=\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k},\quad k\geq 1,$$

здесь под степенью k обобщенной функции $\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)$ понимается ее k-кратная свертка с собой, причем $\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^0=\delta(t)$.

Доказательство. Действительно

$$\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)*\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)=$$

$$=\Big(\delta(t)-k(t)\theta(t)\Big)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)=\delta(t),$$

$$\frac{t^{(k+1)N-1}}{((k+1)N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k+1}*\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)=$$

$$=\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)*\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)*$$

$$*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k = \frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k.$$

□

Теорема 1. *Пусть оператор B фредгольмов, имеет полный A-жорданов набор, тогда интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{L}_N(\delta(t)) = B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t) - g(t)B\theta(t) = \big(\delta^{(N)}(t) - g(t)\theta(t)\big)B - A\delta(t)$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ (обобщенных функций с ограниченным слева носителем) фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q}) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^k\right],$$

где

$$\mathcal{U}_N(t)\theta(t) = \Gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k (A\Gamma)^{k-1}.$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции [5, 6, 15, 9, 10] требуется проверить справедливость двух равенств

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * u(t) = u(t) \ \text{ для всех } \ u(t) \in K'_+(E_2),$$

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * v(t) = v(t) \ \text{ для всех } \ v(t) \in K'_+(E_1).$$

В силу равенства (4) для проектора Q из (3) и равенств вспомогательной леммы 2 имеем

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q}) =$$

$$= (I-Q)\left[I\delta(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k (A\Gamma)^k\right](I-\tilde{Q}) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t) * \Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^k (A\Gamma)^k (I-\tilde{Q}).$$

Отсюда с учетом равенства (16) леммы 1 получаем

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q}) = (I-Q)(I-\tilde{Q})\delta(t).$$

Далее в силу равенств (5) находим

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^k\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^{k+1}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^{k}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\Big(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^{k}\right]-\tilde{Q}\delta(t)=-\tilde{Q}\delta(t).$$

Таким образом

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\mathcal{E}_N(t)=(I-Q)(I-\tilde{Q})\delta(t)+\tilde{Q}\delta(t)=$$

$$=\Big((I-Q)-\tilde{Q}+Q+\tilde{Q}\Big)\,\delta(t)=I\delta(t).$$

С другой стороны

$$\mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q})*\mathcal{L}_N(\delta(t))=$$

$$=\Gamma\left[I\delta(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k}(A\Gamma)^{k}\right](I-\tilde{Q})B-$$

$$-\Gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k}(A\Gamma)^{k-1}(I-\tilde{Q})A=$$

$$=\Gamma(I-\tilde{Q})B\delta(t)+$$

$$+\Gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k}(A\Gamma)^{k-1}(A\Gamma(I-\tilde{Q})B-(I-\tilde{Q})A),$$

поэтому в силу тождества (17)

$$\mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q})*\mathcal{L}_N(\delta(t))=\Gamma(I-\tilde{Q})B\delta(t).$$

Соответственно

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^{k}\right]*\mathcal{L}_N(\delta(t))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=2}^{p_i-k}\langle\cdot,B^{*}\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\Big)^{k+1}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\left(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\right)^k\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, B^*\psi_i^{(j+1)}-A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\right)^k\right]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t)=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\delta(t).$$

Следовательно по формуле (18) получаем

$$\mathcal{E}_N(t)*\mathcal{L}_N(\delta(t))=\left[\Gamma(I-\tilde{Q})B+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\delta(t)=I\delta(t).$$

□

В обобщенных функциях задачу Коши (1)–(2) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\left(\left(\delta^{(N)}(t)-g(t)\theta(t)\right)B-A\delta(t)\right)*\tilde{u}(t)=$$

$$=f(t)\theta(t)+Bu_{N-1}\delta(t)+Bu_{N-2}\delta'(t)+\cdots+Bu_1\delta^{(N-2)}(t)+Bu_0\delta^{(N-1)}(t),$$

поэтому единственное решение задачи (1)–(2) в классе $K'_+(E_1)$ имеет вид

$$\tilde{u}(t)=\mathcal{E}_N(t)*\big(f(t)\theta(t)+Bu_{N-1}\delta(t)+Bu_{N-2}\delta'(t)+$$

$$+\cdots+Bu_1\delta^{(N-2)}(t)+Bu_0\delta^{(N-1)}(t)\Big).$$

Очевидно при $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$ выражение для фундаментальной оператор-функции имеет наиболее простой вид, а именно,

$$\mathcal{E}_N(t)=\mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q})-\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(1)}\delta(t).$$

В этом случае обобщенным решением задачи (1)–(2) является регулярная обобщенная функция вида

$$\tilde{u}(t)=\mathcal{U}_N(t)\theta(t)(I-\tilde{Q})*f(t)\theta(t)-\sum_{i=1}^{n}\langle f(t),\psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(1)}\theta(t)+$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\Gamma\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{kN-1}}{(kN-1)!}\theta(t)*\Big(\delta(t)+\mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)^{k}(A\Gamma)^{k-1}Bu_{N-1-j} \qquad (19)$$

удовлетворяющая уравнению (1). Прямыми вычислениями находим

$$\tilde{u}^{(j)}(0)=u_j-\sum_{i=1}^{n}\langle Au_j+f^{(j)}(0),\psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(1)},\quad j=0,1,\ldots,N-1,$$

откуда в силу линейной независимости системы $\{\varphi_i^{(1)}\}$ получаем следующую

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 длины всех A-жордановых цепочек равны 1, то задача Коши (1)–(2) имеет единственное решение класса $C^N(t\geq 0,E_1)$ вида (19) при выполнении соотношений*

$$\Big\langle Au_j+f^{(j)}(0),\psi_i^{(1)}\Big\rangle=0,\quad i=1,\ldots,n,\ \ j=0,1,\ldots,N-1.$$

3. Приложения

Проиллюстрируем применение общих теорем предыдущего пункта к исследованию интегро-дифференциальных уравнений.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(\lambda-\Delta)\,\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t}-\Delta u(t,\bar{x})-\int_0^t g(t-\tau)\,(\alpha-\Delta)\,u(\tau,\bar{x})d\tau=f(t,\bar{x}), \qquad (20)$$

возникающее в теории колебаний пластин [13]. Здесь $\bar{x}\in\Omega\subset R^m$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $t\geq 0$. Будем искать функцию $u=u(t,\bar{x})$ определенную на цилиндре $R_+\times\Omega$ и удовлетворяющую начально-краевым условиям

$$u\Big|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ \ \bar{x}\in\Omega,\ \ u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\ \ t\geq 0. \qquad (21)$$

Задача Коши-Дирихле (20)–(21) редуцируется к задаче (1)–(2), если выбрать в качестве банаховых пространств E_1 и E_2, например, соболевские

$$E_1\equiv\left\{v(\bar{x}\in W_2^2(\Omega):\ v\Big|_{\partial\Omega}=0)\right\},\ \ E_2\equiv W_2(\Omega), \qquad (22)$$

а операторы A и B определить формулами

$$B=\lambda-\Delta,\quad A=\Delta,\quad \alpha=\lambda. \qquad (23)$$

Если $\lambda \in \sigma(\Delta)$, то оператор B фредгольмов. Обозначим через $\{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ ортонормированное семейство линейно независимых решений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

тогда $N(B) \equiv \{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ и длины всех Δ-жордановых цепочек равны 1. В соответствии с теоремой 2 получаем следующую

Теорема 3. *Пусть для задачи Коши-Дирихле (20)–(21) пространства E_1 и E_2 определены как в (22), операторы A и B как в (23) и $\lambda \in \sigma(\Delta)$, тогда существует единственное решение $u(t, \bar{x}) \in C^1(t \geq 0, E_1)$ задачи (20)–(21) если начально-краевые условия (21) удовлетворяют соотношениям*

$$(\lambda u_0(\bar{x}) + f(0, \bar{x}), \varphi_i(\bar{x})) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 1. В случае $\alpha \neq \lambda$ задача (20)–(21) исследована в работе [5].

Пример 2. (*Двухконтурная электрическая цепь.*) Рассмотрим вырожденную систему интегро-дифференциальных уравнений, записав ее в векторно-матричной форме:

$$\mathcal{B}\dot{\bar{x}}(t) + \mathcal{A}\bar{x}(t) + \int\limits_0^t \mathcal{B}\bar{x}(s)ds = \bar{f}(t) \tag{24}$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \tag{25}$$

где

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ \bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ x_{40} \\ x_{50} \end{pmatrix}.$$

Такие системы встречаются при изучении электрических цепей [4]. В обозначениях задачи (1)-(2) здесь $E_1 \equiv E_2 \equiv R^5$, оператор B задается матрицей $\mathcal{B}$, оператор A – матрицей $(-\mathcal{A})$, функция $g(t) \equiv -1$.

Очевидно $B^* = B^T$, $A^* = A^T$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = 3$. Базисы пространств нулей $N(B)$ и $N(B^*)$ составим из векторов

$$\varphi_1 = (-1,\, -1,\, 1,\, 0,\, 0)^T, \quad \varphi_2 = (0,\, -1,\, 0,\, 1,\, 0)^T, \quad \varphi_3 = (-1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1)^T,$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{4}(0,\, 0,\, 2,\, 1,\, 1)^T, \quad \psi_2 = \frac{1}{8}(0,\, 0,\, 2,\, 1,\, 5)^T, \quad \psi_3 = \frac{1}{8}(0,\, 0,\, 2,\, 5,\, 1)^T,$$

тогда $(A\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, т.е. длины всех $A-$жордановых цепочек равны 1. Таким образом справедлива

Теорема 4. *Если $y(t) \in C(t \geq 0)$, то задача Коши (24)-(25) для системы уравнений двухконтурной электрической цепи имеет гладкое решение тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\left(-\mathcal{A}\bar{x}_0 + \bar{f}(0), \psi_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Замечание 2. В развернутом виде условия (26) записываются следующим образом

$$\begin{cases} x_{10} + x_{20} - 2x_{30} + x_{40} + x_{50} + 2y(0) = 0, \\ x_{10} - 3x_{20} - 2x_{30} + 5x_{40} + x_{50} + 2y(0) = 0, \\ 3x_{10} - x_{20} + 2x_{30} - x_{40} - 5x_{50} - 2y(0) = 0. \end{cases}$$

Замечание 3. Представленные в данной работе результаты допускают обобщения на случаи нетеровости оператора B (по схеме работы [10]) и спектральной, секториальной или радиальной ограниченности операторного пучка $(B - \lambda A)$ [16] (по схемам работ [8], [11], [12]).

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
3. Логинов Б. В. Обобщенные жордановы структуры в теории ветвления / Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. – Ташкент : ФАН, 1978. – С. 139–148.
4. Ушаков Е. И. Статическая устойчивость электрических цепей / Е. И. Ушаков. – Новосибирск : Наука, 1988. – 273 с.
5. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 68–79.
6. Фалалеев М. В. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 118–134.

7. Фалалеев М. В. Начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Обозрение прикл. и пром. математики. – 2010. – Т. 17, вып. 4. – С. 597–600.
8. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро-дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев, С. С. Орлов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2011. – Вып. 7, № 4(211). – С. 100–110.
9. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
10. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1393–1406.
11. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности / М.В. Фалалеев, Е.Ю. Гражданцева // Дифференц. уравнения.– 2006. – Т. 42, № 6. – С. 769–774.
12. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности / М. В. Фалалеев // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 68–75.
13. Cavalcanti M. M. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping / M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira // Math. Meth. Appl. Sci. – 2001. – Vol. 24. – P. 1043–1053.
14. Falaleev M. V. The theory of fundamental operator-functions of degenerative integro-differential operators in Banach spaces / M. V. Falaleev // Proceedings International Mathematical Conference "50 years of IPPI"(2011). ISBN 978-5-901158-15-9. – 6 p.
15. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Dordrecht : Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.
16. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev-Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston ;Köln ;Tokyo : VSP, 2003.

M. V. Falaleev

Integro-differential equations with Fredholm operator by the derivative of the higest order in Banach spaces and it's applications

Abstract. In this paper the Cauchy problem for integro-differential equation in Banach spaces with Fredholm operator in main part is investigated by the methods of the theory of fundamental operator-functions. The fundamental operator-function is constructed, and constructiv formula for the generalized solution in the class of distributions with left-bounded support is obtained. The conditions for the coincidence of classical and generalized solutions are described. The abstract results are illustrated by examples of the Cauchy problem for a system of integro-differential equations of two-contour circuit and the Cauchy-Dirichlet problem of the mathematical theory of viscoelasticity.

Keywords: Banach spaces, generalized function, Jordan set, Fredholm operator, fundamental operator-function

Фалалеев Михаил Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики,экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)521296, 521277 (mihail@ic.isu.ru)

Falaleev Mikhail, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003, professor, Phone: (3952)521296, 521277 (mihail@ic.isu.ru)