Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 18—30

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.517

Новые семейства стационарных распределений двухчастичной релятивистской системы уравнений Власова-Максвелла-Фоккера-Планка

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Синицын
Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia

Аннотация. Найдены новые семейства распределений и соответствующие им электромагнитные поля для двухчастичной релятивистской системы Власова – Максвелла – Фоккера – Планка в стационарном случае. Показано, что исследование исходной модели свелось к системе двух нелинейных эллиптических уравнений и двум линейным уравнениям в частных производных первого порядка.

Ключевые слова: релятивистская система Власова – Максвелла – Фоккера – Планка; стационарные решения.

1. Введение

Динамика двухчастичной релятивистской плазмы, состоящей из электронов и однозарядных ионов одного сорта, в стационарном случае описывается системой уравнений Власова – Фоккера – Планка (ВФП)

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{r}} + (\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\left(\mathbf{E} + \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}\right) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(\lambda_l \hat{\mathbf{v}} f_l + T_l \frac{\partial f_l}{\partial \mathbf{v}}\right), \qquad (1.1)$$

дополненной уравнениями Максвелла для самосогласованного электромагнитного поля

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3} \left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right) d\mathbf{v}, \qquad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbf{v}}\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right) d\mathbf{v}, \qquad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.5}$$

Здесь $(l = e, i)$ – индексы по сорту частиц (электроны и ионы, соответственно); символ $(\mp)$ означает, что выражение с индексом $l \stackrel{\triangle}{=} e$ принимает знак минус, а выражение с индексом $l \stackrel{\triangle}{=} i$ знак плюс; $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ – оператор набла;

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2}} \tag{1.6}$$

– релятивистская скорость, записанная в предположении, что скорость света нормирована на единицу; $f_l \stackrel{\triangle}{=} f_l(\mathbf{r}, \mathbf{v}) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}_+ \stackrel{\triangle}{=} (0, +\infty)$ – функции распределения соответствующих сортов частиц, $\mathbf{r} \stackrel{\triangle}{=} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \stackrel{\triangle}{=} (v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^3$ – состояние и скорость частиц; $\hat{e}$ — величина заряда частицы; m_l – массы электронов и ионов; λ_l – коэффициенты дрейфа; T_l – коэффициенты диффузии, причем $\dfrac{\lambda_l}{T_l} > 0$; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \stackrel{\triangle}{=} (E_x(\mathbf{r}), E_y(\mathbf{r}), E_z(\mathbf{r}))$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) \stackrel{\triangle}{=} (B_x(\mathbf{r}), B_y(\mathbf{r}), B_z(\mathbf{r}))$ – вектор-функции самосогласованного электрического и магнитного поля, соответственно.

Ранее, в статье [1] было показано, что в случае одночастичной функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \exp\{-\alpha|\mathbf{v}|^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} + \varphi(\mathbf{r})\}$, разрешимость стационарной системы ВМФП свелась к разрешимости полулинейного эллиптического уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве для функции $\varphi(\mathbf{r})$. Для уравнения Лиувилля приведены явные аналитические решения и, как следствие, выписаны точные решения (стационарные распределения) исходного уравнения Власова – Фоккера – Планка с соответствующими электромагнитными полями, удовлетворяющими системе уравнений Максвелла. В работе [3] авторами было построено семейство стационарных распределений вида

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \stackrel{\triangle}{=} f(P, Q), \quad \text{где} \;\; P(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\alpha|\mathbf{v}|^2 + \varphi(\mathbf{r}), \; Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} + \psi(\mathbf{r})$$

для одночастичной нерелятивистской системы ВМФП. Отметим, что близкие задачи для системы Власова-Максвелла, которая является частным случаем системы ВМФП, рассматривались в цикле работ Рудых – Сидорова – Синицына (см. главу 7 монографии [4] и имеющуюся там библиографию).

2. Основные результаты

Будем отыскивать стационарные распределения для системы релятивистских уравнений ВФП (1.1) в виде

$$f_l(\mathbf{r},\mathbf{v}) \stackrel{\triangle}{=} f_l(P_l,Q_l), \quad (l=e,i), \tag{2.1}$$

где функции $f_l(P_l,Q_l)$ являются дважды дифференцируемыми функциями своих аргументов $P_l,\ Q_l$:

$$P_l(\mathbf{r},\mathbf{v}) = -\alpha_l\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}+\varphi_l(\mathbf{r}), \quad Q_l(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \mathbf{d}\cdot\mathbf{v}+\psi_l(\mathbf{r}). \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi_l(\mathbf{r}),\ \psi_l(\mathbf{r})$ – пока произвольные скалярные функции, которые будут определены позднее, $\mathbf{d}\in\mathbb{R}^3,\ |\mathbf{d}|\neq 0$ – свободный вектор, $\alpha_l\in\mathbb{R}_+$ – произвольные параметры.

Лемма 1. *Если функции (2.1) являются решениями системы уравнений ВФП (1.1), то справедливы соотношения*

$$(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\mathbf{E}\cdot\mathbf{d} = T_l|\mathbf{d}|^2\frac{\partial^2 f_l}{\partial Q_l^2}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\left(\nabla\varphi_l-(\mp)\frac{\hat{e}\alpha_l}{m_l}\mathbf{E}\right)+\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\left(\nabla\psi_l+(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\mathbf{B}\times\mathbf{d}\right) = \left(\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}-2\alpha_l T_l\frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l\partial Q_l}\right)\mathbf{d}, \tag{2.4}$$

$$\lambda_l f_l-\alpha_l T_l\frac{\partial f_l}{\partial P_l}=0, \tag{2.5}$$

$$\alpha_l T_l\frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l^2}-\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial P_l}=0. \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть функции $f_l(P_l,Q_l)$ удовлетворяют системе ВФП. Подставляя их в уравнения (1.1), получим два равенства для индексов $(l=e,i)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\left[v_x\frac{\partial P_l}{\partial x}+v_y\frac{\partial P_l}{\partial y}+v_z\frac{\partial P_l}{\partial z}\right]+$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\left[v_x\frac{\partial Q_l}{\partial x}+v_y\frac{\partial Q_l}{\partial y}+v_z\frac{\partial Q_l}{\partial z}\right]+$$

$$(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\left[E_x\frac{\partial P_l}{\partial v_x}+E_y\frac{\partial P_l}{\partial v_y}+E_z\frac{\partial P_l}{\partial v_z}\right]+$$

$$(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\left[E_x\frac{\partial Q_l}{\partial v_x}+E_y\frac{\partial Q_l}{\partial v_y}+E_z\frac{\partial Q_l}{\partial v_z}\right]+$$

$$(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\frac{1}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\Bigg[(v_yB_z-v_zB_y)\frac{\partial P_l}{\partial v_x}+$$

$$(v_zB_x-v_xB_z)\frac{\partial P_l}{\partial v_y}+(v_xB_y-v_yB_x)\frac{\partial P_l}{\partial v_z}\Bigg]+$$

$$(\mp)\frac{\hat{e}}{m_l}\frac{1}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\Bigg[(v_yB_z-v_zB_y)\frac{\partial Q_l}{\partial v_x}+$$

$$(v_zB_x-v_xB_z)\frac{\partial Q_l}{\partial v_y}+(v_xB_y-v_yB_x)\frac{\partial Q_l}{\partial v_z}\Bigg]= \tag{2.7}$$

$$\frac{\lambda_l}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\left[v_x\frac{\partial P_l}{\partial v_x}+v_y\frac{\partial P_l}{\partial v_y}+v_z\frac{\partial P_l}{\partial v_z}\right]+$$

$$\frac{\lambda_l}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\left[v_x\frac{\partial Q_l}{\partial v_x}+v_y\frac{\partial Q_l}{\partial v_y}+v_z\frac{\partial Q_l}{\partial v_z}\right]+\lambda_l f_l\frac{3+2|\mathbf{v}|^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}+$$

$$T_l\frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l^2}\left[\left(\frac{\partial P_l}{\partial v_x}\right)^2+\left(\frac{\partial P_l}{\partial v_y}\right)^2+\left(\frac{\partial P_l}{\partial v_z}\right)^2\right]+$$

$$T_l\frac{\partial f_l}{\partial P_l}\left[\frac{\partial^2 P_l}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 P_l}{\partial v_y^2}+\frac{\partial^2 P_l}{\partial v_z^2}\right]+$$

$$T_l\frac{\partial^2 f_l}{\partial Q_l^2}\left[\left(\frac{\partial Q_l}{\partial v_x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q_l}{\partial v_y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q_l}{\partial v_z}\right)^2\right]+$$

$$T_l\frac{\partial f_l}{\partial Q_l}\left[\frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_y^2}+\frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_z^2}\right]+$$

$$2T_l\frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l\partial Q_l}\left[\frac{\partial P_l}{\partial v_x}\frac{\partial Q_l}{\partial v_x}+\frac{\partial P_l}{\partial v_y}\frac{\partial Q_l}{\partial v_y}+\frac{\partial Q_l}{\partial v_z}\right].$$

Так как функции $P_l,\ Q_l,\ (l=e,i)$, определяются формулами (2.2), то имеем

$$\frac{\partial P_l}{\partial x}=\frac{\partial \varphi_l}{\partial x},\quad \frac{\partial P_l}{\partial y}=\frac{\partial \varphi_l}{\partial y},\quad \frac{\partial P_l}{\partial z}=\frac{\partial \varphi_l}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_l}{\partial v_x}=-\frac{\alpha_l v_x}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}},\quad \frac{\partial P_l}{\partial v_y}=-\frac{\alpha_l v_y}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}},\quad \frac{\partial P_l}{\partial v_z}=-\frac{\alpha_l v_z}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}},$$

$$\frac{\partial^2 P_l}{\partial v_x^2}=-\alpha_l\frac{(1+|\mathbf{v}|^2)-v_x^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}},\quad \frac{\partial^2 P_l}{\partial v_y^2}=-\alpha_l\frac{(1+|\mathbf{v}|^2)-v_y^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 P_l}{\partial v_z^2}=-\alpha_l\frac{(1+|\mathbf{v}|^2)-v_z^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial Q_l}{\partial x} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_l}{\partial y} = \frac{\partial \psi_l}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q_l}{\partial z} = \frac{\partial \psi_l}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q_l}{\partial v_x} = d_x, \quad \frac{\partial Q_l}{\partial v_y} = d_y, \quad \frac{\partial Q_l}{\partial v_z} = d_z.$$

$$\frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_x^2} = \frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_y^2} = \frac{\partial^2 Q_l}{\partial v_z^2} = 0.$$

С учетом этих соотношений равенства (2.7), преобразуются к виду

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}} \left[\frac{\partial f_l}{\partial P_l} \nabla \varphi_l \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} \nabla \psi_l \cdot \mathbf{v} \right] + (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} -$$

$$\mp \frac{\hat{e}}{m_l \sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}} \left[\alpha_l \frac{\partial f_l}{\partial P_l} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} (\mathbf{B} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{v} \right] =$$

$$\frac{\alpha_l |\mathbf{v}|^2}{1+|\mathbf{v}|^2} \left(-\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial P_l} + \alpha_l T_l \frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l^2} \right) +$$

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}} \left(\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} - 2\alpha_l T_l \frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l \partial Q_l} \right) +$$

$$T_l |\mathbf{d}|^2 \frac{\partial^2 f_l}{\partial Q_l^2} + \frac{3+2|\mathbf{v}|^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}} \left(\lambda_l f_l - \alpha_l T_l \frac{\partial f_l}{\partial P_l} \right),$$

В силу нашего предположения два последних равенства должны обращаться в тождества. А это возможно, только, в том случае, когда коэффициенты при следующих множителях:

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}, \quad \frac{3+2|\mathbf{v}|^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}, \quad \frac{|\mathbf{v}|^2}{1+|\mathbf{v}|^2},$$

зависящих от аргумента вектор-скорости $\mathbf{v}$ и свободном члене равны нулю, т. е.

$$1: \quad T_l |\mathbf{d}|^2 \frac{\partial^2 f_l}{\partial Q_l^2} - (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} \mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 0,$$

$$\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}: \quad \frac{\partial f_l}{\partial P_l} \left(\nabla \varphi_l - (\mp) \frac{\hat{e} \alpha_l}{m_l} \mathbf{E} \right) + \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} \left(\nabla \psi_l + (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \mathbf{B} \times \mathbf{d} \right) -$$

$$\left(\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial Q_l} - 2\alpha_l T_l \frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l \partial Q_l} \right) \mathbf{d} = 0,$$

$$\frac{3+2|\mathbf{v}|^2}{(1+|\mathbf{v}|^2)^{3/2}}: \quad \lambda_l f_l - \alpha_l T_l \frac{\partial f_l}{\partial P_l} = 0,$$

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{1+|\mathbf{v}|^2}: \quad -\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial P_l} + \alpha_l T_l \frac{\partial^2 f_l}{\partial P_l^2} = 0,$$

Отсюда немедленно следуют формулы (2.3) – (2.6) для однозарядных электронов и ионов, соответственно. Что и требовалось доказать. □

Интегрируя уравнения (2.5), (2.6), которые являются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), находим

$$f_l(P_l, Q_l) = F_l(Q_l) \exp\left(\frac{\lambda_l}{\alpha_l T_l} P_l\right), \ (l = e, i). \tag{2.8}$$

Здесь $F_l(Q_l)$ – пока произвольные функции. Подставляя функции (2.8) в соотношения (2.3), (2.4), получим

$$T_l |\mathbf{d}|^2 F_l^{''} - (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \left(\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}\right) F_l^{'} = 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{\lambda_l}{\alpha_l T_l} F_l \left(\nabla \varphi_l - (\mp) \frac{\hat{e}\alpha_l}{m_l} \mathbf{E}\right) + F_l' \left(\nabla \psi_l + (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \mathbf{B} \times \mathbf{d} + \lambda_l \mathbf{d}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Здесь штрихи означают производные со соответствующим аргументам.

Лемма 2. *Если имеют место формулы*

$$\nabla \varphi_l - (\mp) \frac{\hat{e}\alpha_l}{m_l} \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \psi_l + (\mp) \frac{\hat{e}}{m_l} \mathbf{B} \times \mathbf{d} + \lambda_l \mathbf{d} = 0, \ (l = e, i) \tag{2.11}$$

то соотношения (2.10) будут справедливыми при любых $F_l(Q_l)$.

Доказательство. Справедливость данного утверждения очевидна. Действительно, если выполнены формулы (2.11), то соотношения (2.10) обратятся в тождества при любых функциях $F_l(Q_l)$. □

Легко видеть, что линейные ОДУ (2.9) в зависимости от значений скалярного произведения $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ обладают различными типами решений. Здесь возможны два случая: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 0$ и $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = const \neq 0$. В данной работе мы рассмотрим, только, случай, когда электрическое поле $\mathbf{E}$ ортогонально постоянному вектору $\mathbf{d}$.

Итак, пусть выполнено условие

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = 0. \tag{2.12}$$

Интегрируя уравнения (2.9), получим $F_l(Q_l) = C_{1l} Q_l + C_{2l}$. При этом (2.8) запишется как $f_l(P_l, Q_l) = (C_{1l} Q_l + C_{2l}) \exp\left(\frac{\lambda_l}{\alpha_l T_l} P_l\right)$, где $C_{1l} \neq 0$, C_{2l} — произвольные постоянные. Без ограничения общности, положим $C_{1l} = 1$, $C_{2l} = 0$. С учетом формул (2.2) окончательно получим, что функции распределения для релятивистских уравнений ВФП (1.1) имеют следующий вид

$$f_l(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{v} + \psi_l(\mathbf{r})) \exp\left(-\frac{\lambda_l}{T_l}\sqrt{1 + |\mathbf{v}|^2} + \frac{\lambda_l}{\alpha_l T_l} \varphi_l(\mathbf{r})\right). \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.11) следует, что неизвестные функции $\varphi_l(\mathbf{r})$, $\psi_l(\mathbf{r})$ связаны с электромагнитными полями $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ равенствами

$$\nabla\varphi_e = -\frac{\hat{e}\alpha_e}{m_e}\mathbf{E}, \tag{2.14}$$

$$\nabla\psi_e = \frac{\hat{e}}{m_e}\mathbf{B}\times\mathbf{d} - \lambda_e\mathbf{d}, \tag{2.15}$$

$$\nabla\varphi_i = \frac{\hat{e}\alpha_i}{m_i}\mathbf{E}, \tag{2.16}$$

$$\nabla\psi_i = -\frac{\hat{e}}{m_i}\mathbf{B}\times\mathbf{d} - \lambda_i\mathbf{d}. \tag{2.17}$$

Формулы (2.14), (2.16) приводят к цепочке равенств

$$\mathbf{E} = -\frac{m_e}{\hat{e}\alpha_e}\nabla\varphi_e = \frac{m_i}{\hat{e}\alpha_i}\nabla\varphi_i. \tag{2.18}$$

Отсюда следует, что неизвестные векторы $\nabla\varphi_e$, $\nabla\varphi_i$ являются линейно зависимыми. Следовательно скалярные функции $\varphi_e(\mathbf{r})$, $\varphi_i(\mathbf{r})$ будем отыскивать в следующем виде

$$\varphi_e(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + c_{1e}, \ \ \varphi_i(\mathbf{r}) = A_{ei}\varphi(\mathbf{r}) + c_{1i}, \tag{2.19}$$

где $A_{ei} = -\dfrac{\alpha_i}{m_i}\dfrac{m_e}{\alpha_e}$; c_{1l} — произвольные постоянные, С учетом равенств (2.19) формула для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ примет окончательно вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{m_e}{\hat{e}\alpha_e}\nabla\varphi(\mathbf{r}). \tag{2.20}$$

Домножая соотношения (2.15), (2.17) векторно справа на вектор $\mathbf{d}$, и учитывая условие $\mathbf{B}\cdot\mathbf{d} = 0$, получим

$$\mathbf{B} = -\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla\psi_e\times\mathbf{d} = \frac{m_i}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla\psi_i\times\mathbf{d}, \tag{2.21}$$

Отсюда следует, что неизвестные векторы $\nabla\psi_e$, $\nabla\psi_i$ также являются линейно зависимыми, поэтому скалярные функции $\psi_e(\mathbf{r})$, $\psi_i(\mathbf{r})$ будем отыскивать в виде

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + c_{2e}, \ \ \psi_i(\mathbf{r}) = m_{ei}\psi(\mathbf{r}) + c_{2i}, \tag{2.22}$$

где c_{2l} — произвольные постоянные, а параметр m_{ei} определяется формулой

$$m_{ei} = -\frac{m_e}{m_i}. \tag{2.23}$$

Отсюда, поскольку m_e, m_i – соответственно массы электронов и ионов, имеем $m_{ei} < 0$. Окончательно, с учетом равенств (2.21), формула для магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ примет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla\psi(\mathbf{r}) \times \mathbf{d}. \tag{2.24}$$

Замечание 1. В силу постоянства вектора $\mathbf{d}$ векторное произведение $\nabla\psi \times \mathbf{d}$ представимо в виде $\nabla \times (\psi\mathbf{d})$. Следовательно вместо формулы (2.24) можно использовать следующее эквивалентное выражение для магнитного поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla \times (\psi(\mathbf{r})\mathbf{d}).$$

Здесь величина $-\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\psi(\mathbf{r})\mathbf{d}$ играет роль векторного потенциала магнитного поля.

Так как мы потребовали выполнения условия (2.12), то скалярная функция $\varphi(\mathbf{r})$ должна удовлетворять условию ортогональности

$$\nabla\varphi \cdot \mathbf{d} = 0. \tag{2.25}$$

Из (2.15) с учетом первой формулы (2.22) следует, что скалярная функция $\psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет соотношению

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{d} = -\lambda_e|\mathbf{d}|^2. \tag{2.26}$$

С другой стороны, из (2.17) с учетом второй формулы (2.22), получим

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{d} = -\frac{\lambda_i}{m_{ei}}|\mathbf{d}|^2.$$

Поскольку параметр $m_{ei} < 0$ определяется выражением (2.23) из последних двух формул следует, что коэффициенты дрейфа λ_e, λ_i связаны соотношением $m_{ei} = \frac{\lambda_i}{\lambda_e} < 0$. В дальнейшем, для определенности, будем использовать условие на функцию $\psi(\mathbf{r})$ вида (2.26).

Лемма 3. *Если электромагнитные поля* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ *вида (2.20), (2.24) удовлетворяют системе уравнений Максвелла (1.2)–(1.5) и выполнено условие (2.26), то скалярные функции* $\varphi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$ *удовлетворяют системе эллиптический уравнений*

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\hat{e}^2\alpha_e}{m_e}\int_{\mathbb{R}^3}(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v}))\,d\mathbf{v}, \tag{2.27}$$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi\hat{e}^2}{m_e}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v}))\,d\mathbf{v}. \tag{2.28}$$

Доказательство. Подставим электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, определяемое формулой (2.20), в уравнения Максвелла (1.2), (1.3). В силу равенства $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$, справедливого для любой вектор-функции $F(\mathbf{r})$, уравнение (1.3) выполняется тождественно, а из уравнения (1.2) вытекает

$$-\frac{m_e}{\hat{e}\alpha_e}\Delta\varphi = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3}\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)d\mathbf{v}.$$

Отсюда, умножая это соотношение на $-\dfrac{\hat{e}\alpha_e}{m_e}$, получим уравнение (2.27). Здесь $\Delta\cdot = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot$ — оператор Лапласа в пространстве переменных (x,y,z). Теперь, вектор-функцию магнитного поля $B(\mathbf{r})$ вида (2.24) подставим в уравнение Максвелла (1.5). Имеем

$$-\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla\cdot(\nabla\psi\times\mathbf{d}) = 0.$$

С учетом свойств оператора ∇ получим цепочку равенств

$$\nabla\cdot(\nabla\psi\times\mathbf{d}) = \mathbf{d}\cdot(\nabla\times\nabla\psi) - \nabla\psi\cdot\nabla\times\mathbf{d} = \mathbf{d}\cdot(\nabla\times\nabla\psi) = 0.$$

Заметим, что последнее равенство в этой цепочке имеет место в силу формулы $\nabla\times\nabla\psi = 0$, справедливой для любой скалярной функции $\psi(\mathbf{r})$. Таким образом уравнение (1.5) для данного магнитного поля выполняется тождественно. Из уравнения (1.4) получим

$$-\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\nabla\times(\nabla\psi\times\mathbf{d}) = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\mathbf{v}}\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)d\mathbf{v}. \tag{2.29}$$

Распишем левую часть равенства (2.29)

$$\nabla\times(\nabla\psi\times\mathbf{d}) = (\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\nabla\psi - \mathbf{d}\Delta\psi + \nabla\psi\,(\nabla\cdot\mathbf{d}) - (\nabla\psi\cdot\nabla)\,\mathbf{d}.$$

Два последних слагаемых в этом соотношении в силу постоянства вектора $\mathbf{d}$ равны нулю, поэтому формула (2.29) преобразуется к виду

$$-\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\left((\mathbf{d}\cdot\nabla)\,\nabla\psi - \mathbf{d}\Delta\psi\right) = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3}\hat{\mathbf{v}}\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)d\mathbf{v}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на постоянный вектор $\mathbf{d}$, $|\mathbf{d}|\neq 0$, получим

$$-\frac{m_e}{\hat{e}|\mathbf{d}|^2}\mathbf{d}\cdot\nabla\left(\nabla\psi\cdot\mathbf{d}\right) + \frac{m_e}{\hat{e}}\Delta\psi = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3}(\hat{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{d})\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)d\mathbf{v}.$$

Так как скалярное произведение $\nabla\psi\cdot\mathbf{d}$ по условию (2.26) есть постоянная, то $\nabla\left(\nabla\psi\cdot\mathbf{d}\right) = 0$ и следовательно имеем

$$\frac{m_e}{\hat{e}}\Delta\psi = 4\pi\hat{e}\int_{\mathbb{R}^3}(\hat{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{d})\left(f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) - f_e(\mathbf{r},\mathbf{v})\right)d\mathbf{v}.$$

Отсюда, с учетом формулы для релятивистской скорости (1.6), окончательно получим уравнение (2.28). Лемма доказана. □

С учетом формул (2.19), (2.22) функции распределения (2.13) перепишутся в следующем виде

$$f_e(\mathbf{r},\mathbf{v}) = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}+\psi(\mathbf{r}))\times$$
$$\exp\left(-\frac{\lambda_e}{T_e}\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}+\frac{\lambda_e}{\alpha_e T_e}\,\varphi(\mathbf{r})+\frac{\lambda_e c_{1e}}{\alpha_e T_e}\right), \tag{2.30}$$
$$f_i(\mathbf{r},\mathbf{v}) = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}+m_{ei}\psi(\mathbf{r}))\times$$
$$\exp\left(-\frac{\lambda_i}{T_i}\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}+\frac{\lambda_i m_{ei}}{\alpha_e T_i}\,\varphi(\mathbf{r})+\frac{\lambda_i c_{1i}}{\alpha_i T_i}\right). \tag{2.31}$$

Здесь, без потери общности, мы положили $c_{2l} = 0$, $(l = e, i)$. Так как функции распределения определены, то осталось подставить их в правые части уравнений (2.27), (2.28) и вычислить соответствующие интегралы. Проделаем это. Подставив функции распределения (2.30), (2.31) в правые части равенств (2.27), (2.28), можно убедиться, что все сводится к вычислению следующих четырех тройных интегралов:

$$\mathbf{I}_1 = \int_{\mathbb{R}^3}\exp\left\{-\gamma\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}\right\}d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})\exp\left\{-\gamma\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}\right\}d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{I}_3 = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})\exp\left\{-\gamma\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}\right\}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\,d\mathbf{v},$$

$$\mathbf{I}_4 = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{(\mathbf{d}\cdot\mathbf{v})^2\exp\left\{-\gamma\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}\right\}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\,d\mathbf{v},$$

где для удобства введен параметр $\gamma \triangleq \left\{\dfrac{\lambda_e}{T_e},\ \dfrac{\lambda_i}{T_i}\right\}$, который является положительным, в силу соотношений между коэффициентами дрейфа и диффузии, т. е. $\gamma > 0$. Переходя во всех интегралах к сферическим координатам, после интегрирования получим

$$\mathbf{I}_1 = 4\pi p(\gamma),\ \ \mathbf{I}_2 = 0,\ \ \mathbf{I}_3 = 0,\ \ \mathbf{I}_4 = \frac{4\pi|\mathbf{d}|^2}{3}q(\gamma),$$

где

$$p(\gamma) = K_0(\gamma) + \frac{1+\gamma}{\gamma}K_1(\gamma),$$

$$q(\gamma) = \frac{1-\gamma}{\gamma}K_0(\gamma) + \frac{\gamma^2 - 2\gamma + 2}{\gamma^2}K_1(\gamma). \tag{2.32}$$

Здесь $K_0(\gamma)$, $K_1(\gamma)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядков, соответственно. При вычислении интегралов мы воспользовались следующими формулами [2]:

$$\int_1^\infty \frac{t^{n+1}e^{-\gamma t}}{\sqrt{t^2-1}}dt = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial\gamma^n}K_1(\gamma), \quad \int_1^\infty \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t^2-1}}dt = K_0(\gamma).$$

Таким образом, с учетом вычисленных интегралов, система уравнений (2.27), (2.28) окончательно запишется в следующем виде:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -M\psi(\mathbf{r})\left(m_{ei}\omega_i e^{m_{ei}\dfrac{\gamma_i}{\alpha_e}\varphi(\mathbf{r})} - \omega_e e^{\dfrac{\gamma_e}{\alpha_e}\varphi(\mathbf{r})}\right), \tag{2.33}$$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) = \frac{M|\mathbf{d}|^2}{3\alpha_e}\left(\theta_i e^{m_{ei}\dfrac{\gamma_i}{\alpha_e}\varphi(\mathbf{r})} - \theta_e e^{\dfrac{\gamma_e}{\alpha_e}\varphi(\mathbf{r})}\right), \tag{2.34}$$

где $M = \dfrac{16\pi^2\hat{e}^2\alpha_e}{m_e}$, $\gamma_l = \dfrac{\lambda_l}{T_l}$, $\delta_l = \exp\left(\dfrac{\gamma_l c_{1l}}{\alpha_l}\right)$, $\omega_l = p(\gamma_l)\delta_l$, $\theta_l = q(\gamma_l)\delta_l$.

Подводя итоги убедимся, что справедливо

Утверждение 1. *Пусть функции распределения (2.30), (2.31) и электромагнитные поля* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, *определяемые формулами (2.20), (2.24), являются решениями релятивистской системы уравнений ВМ-ФП (1.1)–(1.5), кроме того, массы частиц и коэффициенты дрейфа связаны равенством*

$$m_{ei} = -\frac{m_e}{m_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_e}, \tag{2.35}$$

и выполнены соотношения (2.25), (2.26), тогда скалярные функции $\varphi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$ *удовлетворяют системе нелинейных эллиптических уравнений (2.33), (2.34).*

Доказательство. Подставим функции (2.30), (2.31) в уравнения ВФП (1.1). После несложных вычислений и упрощающих преобразований из уравнений для электронов и ионов, соответственно, получим

$$\frac{1}{\alpha_e}\nabla\varphi\cdot\mathbf{d} + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{d}}{\mathbf{d}|^2\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\left(\nabla\psi\cdot\mathbf{d} + \lambda_e|\mathbf{d}|^2\right) = 0, \tag{2.36}$$

$$\left(m_{ei} + \frac{m_e}{m_i}\right)\left(\frac{\nabla\psi\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}} + \frac{\lambda_i}{\alpha_e T_i}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{d} + m_{ei}\psi]\frac{\nabla\psi\cdot\mathbf{d}}{\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\right) +$$

$$\frac{m_e}{m_i\alpha_e}\nabla\varphi\cdot\mathbf{d}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2\sqrt{1+|\mathbf{v}|^2}}\left(\frac{m_e}{m_i}\nabla\psi\cdot\mathbf{d}+\lambda_e|\mathbf{d}|^2\right)=0. \tag{2.37}$$

Так как по условию скалярные функции $\varphi(\mathbf{r})$, $\psi(\mathbf{r})$ удовлетворяют соотношениям (2.25), (2.26), а параметры связаны формулой (2.35), то равенства (2.36), (2.37) выполняются тождественно. В силу леммы 3, подставив электромагнитные поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ определяемые формулами (2.20), (2.24) в уравнения Максвелла (1.2)–(1.5), придем к системе (2.27), (2.28). Наконец, вычислив интегралы в правых частях (2.27), (2.28) от функций распределения (2.30), (2.31), мы окончательно получим систему нелинейных эллиптический уравнений (2.33), (2.34). Что и требовалось доказать.

□

Список литературы

1. Семенов Э. И. Об одном семействе стационарных распределений системы уравнений Власова – Максвелла – Фоккера – Планка / Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 124–131.
2. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – 631 с.
3. Semenov E. I. New stationary distributions of the Vlasov –Maxwell – Fokker – Planck's system / E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 374. – P. 4222–4225.
4. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidirov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.

E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn

New family of stationary distributions of the two-particle relativistic equations of Vlasov – Maxwell – Fokker – Planck

Abstract. We find new family distributions and the corresponding electromagnetic fields for the two-particle relativistic system of Vlasov – Maxwell – Fokker – Planck in the stationary case. In this study the original model has been reduced to a system of two nonlinear elliptic equations and two linear partial differential equations of first order.

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952)453099
(`semenov@icc.ru`)

Синицын Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia (avsinitsyn@yahoo.com)

Edward Semenov, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Irkutsk, Lermontov st. 134, Phone: (3952)453099 (semenov@icc.ru)

Alexander Sinitsyn, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia (avsinitsyn@yahoo.com)

Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 31—45

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем *

Е. В. Маркова
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН

Д. Н. Сидоров
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет

Аннотация. Предложен метод построения параметрических семейств непрерывных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода, возникающих в теории развивающихся систем. Ядра уравнений допускают разрывы первого рода. Построено характеристическое алгебраическое уравнение. Аналитически и численно изучается регулярный случай, когда характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и решение интегрального уравнения единственное. В нерегулярном случае характеристическое уравнение имеет натуральные корни, а решение рассматриваемого интегрального уравнения содержит произвольные постоянные. Доказаны теоремы существования решений и строится их асимптотика. Теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра; модель Глушкова; развивающиеся системы; метод шагов; асимптотика; численные методы.

1. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \le t \le T,\ f(0) = 0. \tag{1.1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-08-00109-а. Работа также частично поддержана грантом Минобрнауки РФ, номер госрегистрации НИР: 01200804682, и Deutscher Akademischer Austauschdienst (DAAD), № A1200665.