



Серия «Математика»

2012. Т. 5, № 2. С. 2–17

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 517.95:518.517

МЕТОДЫ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ *

А. Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Л. Ф. Спевак

Институт машиноведения УрО РАН

Аннотация. Статья посвящена аналитическому и численному исследованию уравнения нелинейной фильтрации (диффузии) с вырождением без начальных данных при двух различных краевых режимах. В том числе, предложен новый подход к построению решений рассматриваемых задач на основе метода граничных элементов, результаты его использования сопоставлены с решениями, полученными с помощью метода степенных рядов. Рассмотрены модельные примеры.

Ключевые слова: уравнения в частных производных; уравнение нелинейной фильтрации (диффузии); краевая задача; метод граничных элементов; степенной ряд.

1. Введение

Математическое исследование задач диффузии и фильтрации является актуальным в связи с многочисленными приложениями. Для описания процесса фильтрации жидкости и газа в пористой среде обычно используют параболическое уравнение фильтрации (диффузии, теплопроводности) [1]. В линейном случае это уравнение хорошо изучено, однако, если коэффициент фильтрации (диффузии, теплопроводности) зависит от плотности (концентрации, температуры), свойства уравнения существенно меняются и требуют специального исследования.

* Работа выполнена при частичной поддержке Программы президиума РАН № 19, проект № 12-П-1-1032 и РФФИ, проект № 11-07-00245

Уравнение нелинейной фильтрации случае степенной зависимости коэффициента фильтрации от плотности $K(T) = \alpha T^\sigma$ имеет вид

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T), \quad (1.1)$$

где $T = T(t, \mathbf{x})$ – искомая функция (плотность); t – время; \mathbf{x} – вектор пространственных координат.

Классическими постановками краевых задач в данном случае являются задача Коши, а также первая, вторая и третья краевые задачи, однако возможны и иные постановки. В частности, рассматриваются задачи без начальных условий [5, 6]. При этом, если искомая функция обращается в нуль, коэффициент перед старшими производными также зануляется, и параболический тип уравнения вырождается. Вследствие этого, данный случай сложен для исследования, однако именно условие $T = 0$ определяет движение фронта фильтрации, т. е. он может быть интересен с точки зрения приложений. Подобные задачи (в абстрактных функциональных пространствах) рассматривались в работах О. А. Олейник [5]. В классе аналитических функций задача с заданным краевым режимом при наличии вырождения впервые рассмотрена А. Ф. Сидоровым [6] (см. также [2]). Предложенные в этих работах решения в виде степенных рядов могут быть использованы для численного моделирования. Однако подобные ряды имеют принципиальный недостаток: для нелинейных задач радиус их сходимости является, как правило, конечным и небольшим. Решение методом граничных элементов (МГЭ) различных краевых задач для уравнений с частными производными [3, 4] дает хорошие результаты, в том числе, когда уравнение является нелинейным. В связи с этим, применение граничноэлементного подхода к решению уравнения нелинейной фильтрации представляется весьма перспективным. Развитие этого подхода на случаи краевых задач специального вида, в частности, для задач без начальных условий, расширяет область применимости МГЭ. Предложенный в данной работе алгоритм адаптирует МГЭ к нестационарным задачам для областей, изменяющихся с течением времени. В результате на основе МГЭ получен эффективный инструмент решения краевых задач для одномерного уравнения нелинейной фильтрации в случае степенной зависимости коэффициента фильтрации от плотности.

2. Постановка краевых задач

Прежде, чем задавать краевые условия, введем новую искомую функцию. Стандартная замена $u = T^\sigma, t' = \alpha t$ приводит уравнение (1.1) в одномерном случае к виду

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} u_x^2. \quad (2.1)$$

Для процесса фильтрации величина u имеет конкретный физический смысл: давление газа в пористой среде (с точностью до постоянного множителя). Будем рассматривать для уравнения (2.1) краевые условия следующего вида:

$$u|_{x=0} = f(t), f(0) = 0, f'(0) > 0, \quad (2.2)$$

а также

$$u|_{x=a(t)} = 0, a(0) = 0, a'(0) \neq 0, \quad (2.3)$$

где $a(t)$, $f(t)$ – известные аналитические в некоторой окрестности нуля функции. Для задачи (2.1), (2.2) в литературе встречается наименование "задача А. Д. Сахарова об иницировании тепловой волны" [6], с. 10), задачу (2.1), (2.3) А. Ф. Сидоров называл «обратная задача, когда вместо краевого режима задается закон движения фронта фильтрации» (см. [6], с. 287).

3. Метод степенных рядов

Данный раздел носит в основном методический характер: авторы приводят результаты, ранее полученные в научной школе академика РАН А. Ф. Сидорова, с той разницей, что коэффициенты рядов нами записываются в другом (по сравнению с первоисточниками), более удобном для целей исследования виде. В дальнейшем результаты раздела будут использованы для проведения численных расчетов.

Сначала рассмотрим применение метода степенных рядов для построения решения задачи (2.1), (2.3). Здесь мы в основном следуем работе [2] и поэтому будем кратки в рассуждениях. Решение строится в виде характеристического ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{[x - a(t)]^n}{n!}, \quad (3.1)$$

коэффициенты ряда (3.1) определяются по формулам

$$u_0(t) = 0, \quad u_1(t) = -\sigma a'(t), \quad u_2(t) = \frac{\sigma a''(t)}{(\sigma + 1)a'(t)},$$

$$u_3(t) = \frac{\sigma \{ (2\sigma + 3)[a''(t)]^2 - (1 + \sigma)a'''(t)a'(t) \}}{(1 + 2\sigma)(1 + \sigma)^2 [a'(t)]^3}.$$

Если известны коэффициенты до $u_n(t)$ включительно, то $n + 1$ -й коэффициент определяется по формуле

$$u_{n+1} = \frac{1}{(1 + n\sigma)a'(t)} \left[\sum_{i=2}^n C_n^i \left(1 + \frac{i}{\sigma(n-i+1)} \right) u_i(t)u_{n+2-i}(t) - u'_n(t) \right].$$

Легко видеть, что условием однозначной определенности коэффициентов ряда (3.1) является бесконечная дифференцируемость функции $a(t)$ и отличие от нуля первой производной $a'(t)$.

При условии аналитичности функции $a(t)$ установлена локальная сходимость ряда (3.1) [2]. Также в указанной работе проведены оценки радиуса сходимости, однако пользоваться на практике ими оказалось затруднительно. Тем не менее, что радиус сходимости ряда (3.1) не превосходит радиуса сходимости ряда Маклорена для функции $a(t)$, и интервал сходимости по $x - a(t)$ уменьшается с удалением от точки $t = 0$.

Теперь используем метод степенных рядов для построения решения задачи (2.1), (2.2). Здесь мы в основном следуем [6] и также будем кратки. Решение строится в виде кратного степенного ряда

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{t^k x^l}{k!l!}, \quad u_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l} \right|_{t=0, x=0}. \quad (3.2)$$

Коэффициенты ряда (3.2) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования по изложенной далее процедуре.

Из краевых условий (2.2) имеем, что

$$u_{k,0} = f_k, \quad f_k = \left. \frac{d^k f}{dt^k} \right|_{t=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

$$u_{0,1} = -\sqrt{\sigma f_1}, \quad u_{0,2} = \frac{\sigma f_2}{(3\sigma + 4)f_1}, \quad u_{1,1} = -\frac{\sqrt{\sigma}(\sigma + 2)f_2}{(3\sigma + 4)\sqrt{f_1}}.$$

Производные третьего порядка определяются при решении системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} -2(\sigma + 1)u_{0,1}u_{0,3} + \sigma u_{1,2} = (\sigma + 2)u_{0,2}^2, \\ -u_{1,0}u_{0,3} - (\sigma + 2)u_{0,1}u_{1,2} + \sigma u_{2,1} = (\sigma + 2)u_{1,1}u_{0,2}, \\ 2u_{0,1}^2 u_{1,2} + 2u_{0,1}u_{2,1} = \sigma u_{3,0} - 2u_{1,1}^2 - \sigma u_{0,2}u_{2,0}. \end{cases} \quad (3.4)$$

В СЛАУ (3.4) искомыми являются $u_{0,3}, u_{1,2}, u_{2,1}$, остальные величины уже известны. Можно убедиться, что при $\sigma > 0, f_1 > 0$ определитель системы будет отличен от нуля.

Пусть известны все производные до порядка n включительно, т. е. предположим, что найдены все $u_{l,k}$ при $l+k \leq n$. Тогда для нахождения производных порядка $n+1$ имеем СЛАУ, уравнения которой получают-ся при последовательном дифференцировании обеих частей (2.1) k раз по t , $n-k$ раз по x ($k = 0, \dots, n$) с добавлением условий (3.3). СЛАУ является трехдиагональной, но условие диагонального преобладания, вообще говоря, не выполняется. Тем не менее, установлено [6], что определитель системы отличен от нуля при $\sigma > 0, f_1 > 0$. Вид СЛАУ не

приводится из-за громоздкости. Доказана локальная сходимость ряда (3.2) [6, 2], его область сходимости не исследовалась.

4. Исследование совместности

Результаты данного раздела, в отличие от предыдущего, являются новыми. Рассмотрим для уравнения (2.1) краевую задачу с заданными одновременно условиями (2.3), (2.2) и исследуем эту задачу на совместность. Для этого сначала сделаем замену независимых переменных

$$\begin{cases} y = x, \\ z = x - a(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

Якобиан замены (4.1): $J = \begin{vmatrix} y_x & y_t \\ z_x & z_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -a'(t) \end{vmatrix} = -a'(t) \neq 0$, так как $a'(0) \neq 0$. В результате замены (4.1) задача (2.1)–(2.3) принимает вид

$$\begin{cases} \psi(y - z)u_z = u(u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(u_y + u_z)^2, \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{y=0} = \phi(z), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) \neq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Здесь функции $\phi(z)$ и $\psi(y - z)$ получаются из функций $f(t)$ и $-a'(t)$ соответственно в результате замены (4.1). Введем обозначения: $\phi_l = \phi^{(l)}(0)$ и $\psi_l = \psi^{(l)}(0)$.

Задача (2.1)–(2.3) (следовательно, и задача (4.2)) является переопределенной, и как будет показано ниже, при выполнении определенных дополнительных условий является совместной.

Будем строить решение задачи (4.2) в виде двойного степенного ряда, коэффициенты которого определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования:

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{y^k z^l}{k! l!}, \quad u_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l}}{\partial y^k \partial z^l} \right|_{\substack{y=0 \\ z=0}}. \quad (4.3)$$

Из краевых условий следует, что $u_{0,0} = 0$, $u_{0,l} = \phi_l$, $u_{k,0} = 0$, $k, l = 1, 2, \dots$. Остальные производные последовательно определяются при решении алгебраических уравнений, причем число уравнений при каждом $n = k + l$ на единицу больше, чем число неизвестных, т.е., как уже отмечено, имеется переопределенность. Условия совместности имеют вид соотношений между производными функций ϕ и ψ в нуле. А именно:

1. Для нахождения первых производных (коэффициентов ряда (4.3) порядка один) справедливы формулы:

$$u_{1,0} = 0, \quad u_{0,1} = \sigma\psi_0,$$

условие совместности: $\phi_1 - \sigma\psi_0 = 0$.

2. Вторые производные (коэффициенты ряда (4.3) порядка два) определяются равенствами

$$u_{2,0} = 0, \quad u_{1,1} = \sigma\psi_1, \quad u_{0,2} = -\frac{\sigma(3+2\sigma)}{1+\sigma}\psi_1,$$

условие совместности: $(1+\sigma)\phi_2 + \sigma(3+2\sigma)\psi_1 = 0$.

Предположим далее, что найдены все производные до порядка n включительно, причем справедливы равенства $u_{k,1} = \psi_k\sigma$, $k = 1, \dots, n-1$, а также получены соответствующие условия совместности.

Тогда $u_{n+1,0} = 0$, если обе части уравнения (4.2) продифференцировать n раз по y и положить $y = z = 0$, то получится соотношение

$$\sum_{i=0}^n C_n^i \psi_{n-i} u_{i,1} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^n C_n^i u_{i,1} u_{n-i,1}.$$

Отсюда в силу предположения индукции имеем, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i \psi_{n-i} \sigma \psi_i + \psi_0 u_{n,1} = 2\psi_0 u_{n,1} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i \sigma^2 \psi_i \psi_{n-i}.$$

После приведения подобных приходим к равенству

$$u_{n,1} = \sigma\psi_n.$$

И так далее. Пусть найдены $u_{n+1-m,m}$, $m = 0, 1, \dots, k$, найдем $u_{n-k,k+1}$. Для этого продифференцируем обе части уравнения (2.1) $(n-k)$ раз по y , k раз по z и положим $y = z = 0$. Получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j (-1)^j \psi_{i+j} u_{n-k-i,k-j+1} = \\ & = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j (u_{i+2,j} + 2u_{i+1,j+1} + u_{i,j+2}) u_{n-k-i,k-j+1} + \\ & + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j (u_{i,j+1} + u_{i+1,j}) (u_{n-k-i+1,k-j} + u_{n-k-i,k-j+1}). \end{aligned}$$

Поскольку, как установлено выше, $u_{0,0} = 0$, $u_{1,0} = 0$, $u_{0,1} = \sigma\psi_0$, то это уравнение может быть (после деления на $\psi_0 \neq 0$ и разрешения относительно $u_{n-k,k+1}$) переписано в виде

$$u_{n-k,k+1} = -\frac{2(\sigma k + 1)u_{n-k+1,k} + \sigma k u_{n-k+2,k-1}}{1 + k\sigma} - F_{k,n-k}, \quad (4.4)$$

где функция $F_{k,n-k}$ зависит только от производных порядка не выше n , ее вид не приводится из-за громоздкости. Все величины в правой части (4.4) известны. Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения

Утверждение 1. *Условия совместности задачи (2.1)–(2.3) имеют вид: $u_{0,n+1} = \phi_n$, где $u_{n-k,k+1}$, $k = 0, \dots, n$ определяются по формулам (4.4).*

Помимо исследования переопределенной краевой задачи (2.1)–(2.3) на совместность (что само по себе представляет определенный интерес), результаты данного раздела можно использовать при решении следующих содержательных задач:

1. Для построения краевого режима при $x = 0$ в задаче (2.1), (2.3):

$u|_{x=0} = \sum_{l=0}^{\infty} u_{0,l}[-a(t)]^l/l!$ (в этом случае в задаче (4.2) остается только краевое условие при $z = 0$, условие при $y = 0$ считаем неизвестным), причем пользоваться последней формулой для расчета краевого режима во многих случаях удобнее, чем, например, рядом $u|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)[-a(t)]^k/k!$ (см. раздел 3), поскольку $u_{0,l}$ являются константами, а не функциями, зависящими от t .

2. Для построения фронта фильтрации в задаче (2.1), (2.2) (в этом случае в задаче (4.2) функция ψ является неизвестной). Отметим, что ряд (3.2) здесь весьма неудобен.

3. Для построения распределения давления (плотности) в задаче (2.1), (2.2) на заданной линии $x = a(t)$: $u|_{x=a(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,0}[a(t)]^k/k!$ без построения решения во всей области (в этом случае в задаче (4.2) остается только краевое условие при $y = 0$, условие при $z = 0$ считаем неизвестным). Это может иметь существенное значение при проведении расчетов, так как построение ряда (3.2) предполагает использование весьма громоздкой процедуры: на каждом шаге решаются СЛАУ, размерность которых неограниченно возрастает (см. раздел 3).

5. Метод граничных элементов для задачи о движении фронта фильтрации

Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными методом граничных элементов (МГЭ) позволяет снизить на единицу размерность задачи, сведя все вычисления на границу рассматриваемой области, а также получить внутри области определяемое граничными значениями непрерывное решение в аналитическом виде. Решение линейного уравнения параболического типа

методом граничных элементов для заданной области на заданном промежутке времени определяется фундаментальным решением сингулярного дифференциального уравнения [3, 4]. Решение при этом обычно строится по шагам для постоянной по времени аппроксимации значений параметров задачи на граничных элементах. На каждом шаге по времени строится непрерывное по пространственным координатам решение, определяемое граничными значениями параметров. Существенное ускорение счета и повышение точности решения при этом может быть обеспечено применением аналитического интегрирования вместо стандартного численного [7]. Появление в уравнении нелинейности, и даже неоднородности, приводит к необходимости при построении решения методом граничных элементов, кроме интегралов по граничным элементам, вычислять интегралы по области, что нивелирует основное преимущество МГЭ. Преодолеть эту проблему можно, сведя решение исходной задачи к последовательности линейных (однородных) задач на основе метода двойственной взаимности [8].

В случае, когда вместо начальных и граничных условий для конкретной пространственной области задан краевой режим (2.3), исследуемая область (область, внутри которой искомая функция принимает ненулевые значения) изменяется с течением времени, поэтому использование при решении МГЭ фундаментального решения параболического уравнения, зависящего от времени, затруднительно. В связи с этим, предлагается следующий подход к решению задачи (2.1), (2.3), предполагающий на каждом шаге по времени решение методом граничных элементов задачи для эллиптического уравнения Пуассона.

Пусть для уравнения (2.1) задано краевое условие (2.3). Тогда вдоль фронта волны $x = a(t)$ справедливо

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=a(t)} + a'(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=a(t)} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} \right)^2, \quad (5.1)$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a(t)} = -\sigma a'(t). \quad (5.2)$$

Рассмотрим уравнение (2.1) и граничные условия (2.3), (5.2) в произвольный момент времени t в качестве краевой задачи для уравнения Пуассона на отрезке $x \in [0, L]$, где $L = a(t)$

$$u_{xx} = \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right), \quad (5.3)$$

$$u|_{x=L} = 0, \quad (5.4)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=L} = -\sigma a'(t). \quad (5.5)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе рассматриваемой области, q – поток. Решая задачу (5.3)–(5.5) методом граничных элементов для эллиптических задач теории потенциала [3, 4], приходим к уравнению

$$u(\xi) = q_1 u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1 q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L) - \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) dx, \quad (5.6)$$

где $\xi \in (0, L)$, $u_1 = u|_{x=0}$, $u_2 = u|_{x=L}$, $q_1 = q|_{x=0}$, $q_2 = q|_{x=L}$, $u^*(\xi, x)$ – фундаментальное решение уравнения

$$\Delta w = -\delta(\xi, x), \quad q^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial \mathbf{n}}.$$

Для одномерного случая

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2}(l - |r|), \quad q^*(\xi, x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(r) \mathbf{n}, \quad (5.7)$$

где $r = x - \xi$, l – некоторое число (обычно принимается $l = L$), \mathbf{n} – внешняя нормаль. Переходя в уравнении (5.6) к пределам при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow L$, в предположении, что $l = L$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} u_1 = q_1 \frac{L}{2} + u_1 \frac{1}{2} + u_2 \frac{1}{2} - \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(0, x) dx, \\ u_2 = q_2 \frac{L}{2} + u_1 \frac{1}{2} + u_2 \frac{1}{2} - \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(L, x) dx, \end{cases} \quad (5.8)$$

в которой u_1 и q_1 являются неизвестными, а u_2 и q_2 заданы граничными условиями (5.4), (5.5). Поскольку $u_2 = 0$, система (5.8) упрощается

$$\begin{cases} u_1 - q_1 L = -2 \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(0, x) dx, \\ u_1 + q_2 L = 2 \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(L, x) dx. \end{cases} \quad (5.9)$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правых частях уравнений (5.6), (5.9), в соответствии с методом двойственной взаимности [8], представим входящий в подынтегральные выражения множитель $\frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right)$ в виде

$$\frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(x), \quad (5.10)$$

где для функций f_i существуют такие функции \widehat{u}_i , что $f_i = \Delta \widehat{u}_i$. В качестве функций f_i применяются радиальные базисные функции, значения которых зависят от расстояния между текущей точкой и заданными точками x_1, x_2, \dots, x_n , лежащими на отрезке $[0, L]$

$$f_i(x) = f_i(|x - x_i|),$$

С учетом (5.10), интегралы могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{u} \left(u_t - \frac{u_x^2}{\sigma} \right) u^*(\xi, x) dx &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^L f_i(x) u^*(\xi, x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^L \Delta \widehat{u}_i(x) u^*(\xi, x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i [-\widehat{u}_i(\xi) + \widehat{q}_i(0) u^*(\xi, 0) + \widehat{q}_i(L) u^*(\xi, L) - \widehat{u}_i(0) q^*(\xi, 0) - \widehat{u}_i(L) q^*(\xi, L)], \end{aligned}$$

где $\widehat{q}_i(x) = \frac{\partial \widehat{u}_i(x)}{\partial \mathbf{n}}$. Таким образом, уравнение (5.6) сведется к следующему:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= q_1 u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1 q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \alpha_i [\widehat{u}_i(\xi) - \widehat{q}_i(0) u^*(\xi, 0) - \widehat{q}_i(L) u^*(\xi, L) + \widehat{u}_i(0) q^*(\xi, 0) + \widehat{u}_i(L) q^*(\xi, L)], \end{aligned} \quad (5.11)$$

а система граничных интегральных уравнений (5.9), с учетом соотношений (5.10), примет вид

$$\begin{cases} u_1 - q_1 L = 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\widehat{u}_i(0) - \widehat{q}_i(0) \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \widehat{u}_i(0) - \frac{1}{2} \widehat{u}_i(L) \right), \\ u_1 + q_2 L = -2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(\widehat{u}_i(L) - \widehat{q}_i(L) \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \widehat{u}_i(0) - \frac{1}{2} \widehat{u}_i(L) \right). \end{cases} \quad (5.12)$$

Решение системы уравнений (5.12) (значения u_1 и q_1) для произвольного момента времени позволяет определить распределение функции u в этот момент, в соответствии с формулой (5.11), на отрезке $[0, a(t)]$. Определитель (5.12) отличен от нуля, и система имеет единственное решение. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. Краевого условия (2.3) для уравнения (2.1) достаточно, чтобы в произвольный момент времени корректно сформулировать для уравнения (5.3) граничное интегральное уравнение, которое сводится к определенной СЛАУ для граничных значений искомой функции и потока.

Основываясь на этом, предлагаем следующий алгоритм решения задачи (2.1), (2.3) по шагам по времени.

На каждом шаге, $t = t_k = kh$, где h – величина шага, решаем задачу для отрезка $[0, L]$, $L = (a(t_k))$, с граничными условиями $u_2 = 0$, $q_2 = -\sigma a'(t_k)$. Задача решается итерационно. На первой итерации решается однородная задача – система уравнений (5.12) с нулевыми правыми частями. Решение полученной системы даст значения u_1 и q_1 в первом приближении – соответственно, $u_1^{(1)}$ и $q_1^{(1)}$. Далее, из уравнения (5.11), при значениях $\alpha_i = 0$, определяем первое приближение функции $u(\xi)$, $\xi \in [0, a(t_k)]$:

$$u^{(1)}(\xi) = q_1^{(1)} u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1^{(1)} q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L). \quad (5.13)$$

Задав конкретные функции f_i и точки коллокации x_i , находим значения $u^{(1)}(x_i)$, а также

$$u_x^{(1)}(x_i) = \left. \frac{\partial u^{(1)}(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=x_i} = \left(q_1^{(1)} \frac{\partial u^*(\xi, 0)}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial u^*(\xi, L)}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=x_i} \quad (5.14)$$

и приближенные значения производной по времени

$$\begin{aligned} x_i \leq a(t_{k-1}) : u_t^{(1)}(x_i) &= \frac{u^{(1)}(x_i) - u^{[k-1]}(x_i)}{h}, \\ x_i > a(t_{k-1}) : u_t^{(1)}(x_i) &= \frac{u^{(1)}(x_i)}{h}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $u^{[k-1]}(\xi)$ – решение на предыдущем шаге по времени, $\bar{a}(x_i)$ – функция, обратная к $a(t)$. По найденным значениям (5.13) – (5.15) определяем коэффициенты $\alpha_i^{(1)}$ из решения системы линейных уравнений

$$\frac{1}{u^{(1)}(x_j)} \left[u_t^{(1)}(x_j) - \frac{\left(u_x^{(1)}(x_j) \right)^2}{\sigma} \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(1)} f_i(x_j), j = 1, \dots, N. \quad (5.16)$$

Далее решаем систему уравнений (5.12) со значениями коэффициентов $\alpha_i^{(1)}$, определяем второе приближение граничных значений $u_1^{(2)}$ и $q_1^{(2)}$, из уравнения (5.11) находим второе приближение решения

$$\begin{aligned} u^{(2)}(\xi) &= q_1^{(2)} u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1^{(2)} q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L) + \\ &+ \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(1)} (\hat{u}_i(\xi) - \hat{q}_i(0) u^*(\xi, 0) - \hat{q}_i(L) u^*(\xi, L) + \\ &+ \hat{u}_i(0) q^*(\xi, 0) + \hat{u}_i(L) q^*(\xi, L)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Определив значения $u^{(2)}(x_i)$, а также

$$u_x^{(2)}(x_i) = \left(q_1^{(2)} \frac{\partial u^*(\xi, 0)}{\partial \xi} + q_2 \frac{\partial u^*(\xi, L)}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=x_i} + \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(1)} \left(\frac{\partial \hat{u}_i(\xi)}{\partial \xi} - \hat{q}_i(0) \frac{\partial u^*(\xi, 0)}{\partial \xi} - \hat{q}_i(L) \frac{\partial u^*(\xi, L)}{\partial \xi} \right), \quad (5.18)$$

и $u_t^{(2)}(x_i)$ – аналогично (5.15), найдем коэффициенты $\alpha_i^{(2)}$, и т. д. Итерационный процесс заканчивается на n -й итерации, когда значения $u_1^{(n-1)}$ и $u_1^{(n)}$, $q_1^{(n-1)}$ и $q_1^{(n)}$ достаточно близки. В результате мы получаем приближенное решение исходной задачи при $t = t_k$

$$u^{[k]}(\xi) = q_1^{(n)} u^*(\xi, 0) + q_2 u^*(\xi, L) - u_1^{(n)} q^*(\xi, 0) - u_2 q^*(\xi, L) + \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(n-1)} (\hat{u}_i(\xi) - \hat{q}_i(0) u^*(\xi, 0) - \hat{q}_i(L) u^*(\xi, L) + \hat{u}_i(0) q^*(\xi, 0) + \hat{u}_i(L) q^*(\xi, L)), \quad (5.19)$$

после чего переходим к следующему шагу по времени.

Предложенный алгоритм был применен к решению задачи при $\sigma = 3$, $l = L$, для различных функций $a(t)$. Базисные функции были выбраны следующими: $f_i(x) = |x - x_i|$. В этом случае $\hat{u}_i(x) = |x - x_i|^3/6$. Результаты расчетов в сравнении с аналитическими решениями методом кратных степенных рядов, показаны на рисунках, где сплошные линии соответствуют методу граничных элементов, а точки – отрезкам ряда в моменты времени $t_1 = 0.2$ («короткая» линия), $t_2 = 0.6$ («средняя» линия) и $t_3 = 1$ («длинная» линия).

На рис. 1 сравниваются решения при $a(t) = e^t - 1$ методом граничных элементов с шагом $h = 0,01$ и методом степенных рядов с учетом членов до третьей степени включительно. Аналогичное сравнение для $a(t) = \ln(t + 1)$ показано на рис. 2.

Сравнение показало близость решений, полученных двумя методами. Отметим при этом, что решения методом степенных рядов с учетом членов до второй степени существенно отличались от решений, показанных на рис. 1, 2, что говорит о том, что с увеличением степени отрезка ряда он приближается к решению МГЭ. Отметим также, что в случае линейной функции $a(t)$, когда задача имеет точное решение, решение МГЭ совпадает с ним при любом шаге по времени. В связи с этим, предложенный алгоритм решения задачи (2.1), (2.3) на основе МГЭ представляется удобным и эффективным.

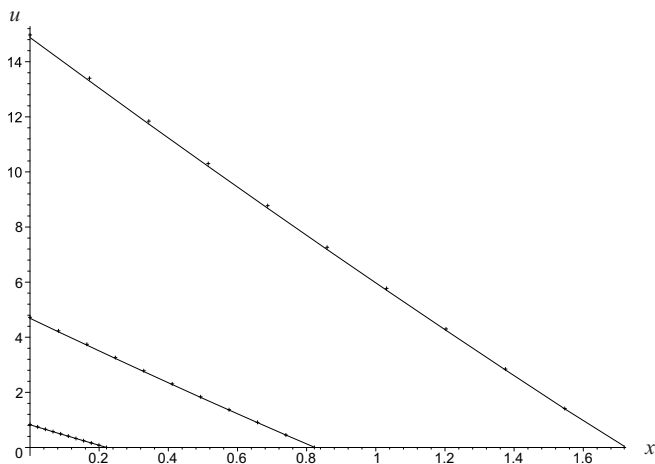


Рис. 1.

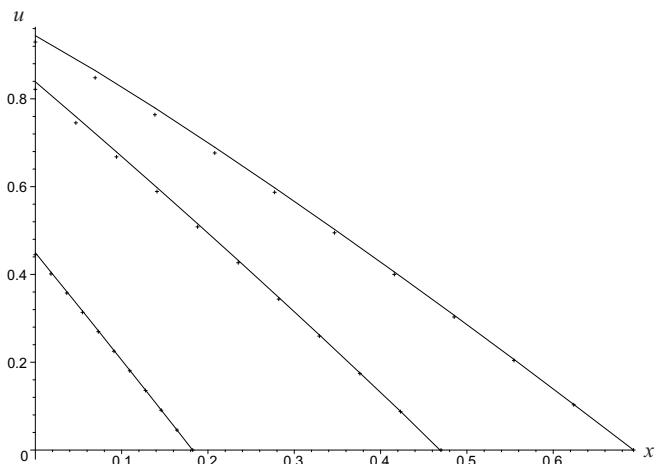


Рис. 2.

6. Метод граничных элементов для задачи с краевым режимом

Применение описанного в предыдущем разделе подхода к задаче (2.1), (2.2) также приводит в некоторый момент времени t_k к системе уравнений (5.8). Однако решение системы на этот раз затруднено тем, что известной является лишь величина $u_1 = f(t_k)$, тогда как q_1 , u_2 и q_2 неизвестны. Неизвестно также значение L , поскольку функция, задающая фронт волны, не задана. Поставим задачу: одновременно с определением функции, удовлетворяющей уравнению (2.1) и краевому условию (2.2), восстановить фронт волны. Примем в момент времени

t_k в качестве неизвестной значение $L = a(t_k)$, такое, что выполняется условие (5.4). Очевидно, что в этом случае будет выполняться также условие (5.5). Зададим значения u_2 и q_2 следующим образом:

$$u_2 = u|_{x=L} = 0, q_2 = -\sigma \frac{L - a(t_{k-1})}{h}. \quad (6.1)$$

Система (5.8) сведется к системе двух уравнений с неизвестными q_1, L

$$\begin{cases} u_1 - q_1 L = 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\hat{u}_i(0) - \hat{q}_i(0) \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \hat{u}_i(0) - \frac{1}{2} \hat{u}_i(L) \right], \\ \sigma L^2 - \sigma a(t_{k-1}) L - h u_1 = 2h \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\hat{u}_i(L) - \hat{q}_i(L) \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \hat{u}_i(0) - \frac{1}{2} \hat{u}_i(L) \right]. \end{cases} \quad (6.2)$$

Итерационный алгоритм решения системы (6.2), аналогичный описанному выше, дает решение задачи (2.1), (2.2) на каждом шаге по времени.

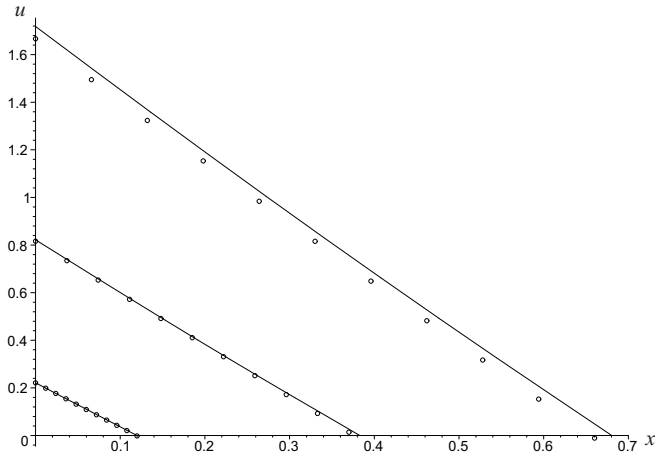


Рис. 3.

Решение предложенным алгоритмом также сравнивалось с решением методом степенных рядов при тех же значениях параметров и базисных функциях. На рис. 3, 4 показаны результаты расчетов при $f(t) = e^t - 1$ и $f(t) = \ln(t+1)$, соответственно. Сравнение решений МГЭ и методом степенных рядов привело к выводам, абсолютно аналогичным сделанным в предыдущем разделе. Можно также отметить, что для последнего из рассмотренных примеров результаты расчетов, выполненных с помощью МГЭ и с помощью отрезка ряда, при $t = 1$ заметно отличаются (см. рис. 4). Это объясняется плохой сходимостью ряда Маклорена для функции $\ln(t + 1)$ при $t = 1$, так как это граничная точка интервала сходимости.

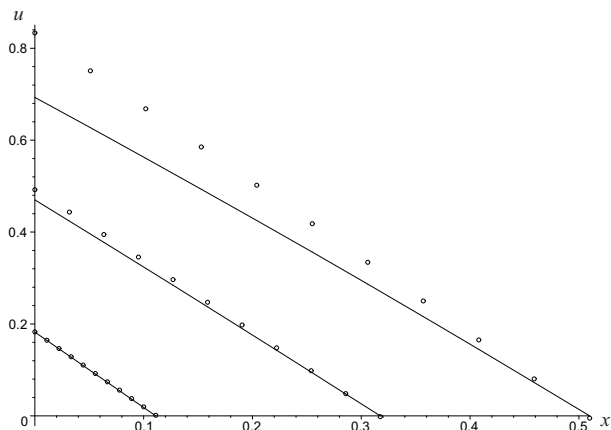


Рис. 4.

7. Заключение

В ходе проведенного исследования получил дальнейшее развитие классический метод степенных рядов применительно к краевым задачам нелинейной фильтрации с вырождением. В частности, одна переопределенная краевая задача исследована на совместность. Вместе с тем, как известно, аналитические решения нелинейных задач математической физики имеют принципиальный недостаток: локальность. При поиске решения данной проблемы установлено, что применение метода граничных элементов к уравнению нелинейной фильтрации позволяет с хорошей точностью строить решения при различных краевых режимах. Сравнение решений МГЭ с решениями методом кратных степенных рядов показало преимущества МГЭ, связанные с зависимостью точности от степени принятого в качестве решения отрезка ряда, а, следовательно, от функции, задающей краевой режим. При этом определение коэффициентов ряда при членах четвертой степени и выше является довольно трудоемкой работой. В свою очередь, решение МГЭ дает на каждом шаге по времени непрерывное представление искомой функции, допускающее аналитическое вычисление производных. Показано, что МГЭ является эффективным методом и для решения задач для изменяющихся с течением времени областей. Результаты применения предложенного подхода к решению одномерных задач дают надежду на успешное его распространение на случаи большей размерности.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1972. – 220 с.

2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна / С. П. Баутин. – М. : Физматлит, 2003. – 87 с.
3. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 494 с.
4. Бреббия К. Метод граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 526 с.
5. Олейник О. А. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации / О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-линь // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. – Т. 22. – С. 667–704.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
7. Федотов В. П. Модифицированный метод граничных элементов в задачах механики, теплопроводности и диффузии / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак. – Екатеринбург : УрО РАН, 2009. – 164 с.
8. Nardini D. A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements / D. Nardini, C. A. Brebbia // Boundary Element Methods in Engineering / ed. C. A. Brebbia. – Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.

A. L. Kazakov, L. F. Spevak

Boundary element method and power series method for one-dimensional non-linear filtration problems

Abstract. The paper deals with the analytical and numerical study of the nonlinear filtration (diffusion) equation with degeneration, without initial data, at two different boundary value modes. Particularly, a new approach to the construction of problem solutions based on the boundary element method has been proposed, the application results being compared with the solutions obtain with the application of the power series method. Model examples have been considered.

Keywords: partial differential equations; nonlinear filtration (diffusion) equation; boundary value problem; boundary element Method; power series method

Казакков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453033
(kazakov@icc.ru)

Спевак Лев Фридрихович, кандидат технических наук, доцент, Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34, тел.: (343) 3753592 (lfs@imach.uran.ru)

Kazakov Alexandr Leinidovich, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033, Chief researcher, Phone: (3952) 453033
(kazakov@icc.ru)

Spevak Lev, Institute of engineering science of Ural Branch of Russian Academy of Sciences, 34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Head of laboratory, Phone: (343) 3753592 (lfs@imach.uran.ru)