Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 2. С. 81—89

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Вычисление регуляризованного следа задачи Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях

А. Е. Эткин, Г. П. Эткина
Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье получены формулы первого регуляризованного следа регулярной граничной задачи для оператора Штурма – Лиувилля, граничные условия которой полиномиально зависят от спектрального параметра.

Ключевые слова: след оператора; оператор Штурма – Лиувилля; спектральный параметр в граничном условии.

Рассмотрим граничную задачу на $[0, \pi]$

$$-y'' + qy = \lambda y, \tag{1}$$

$$P_{11}(\lambda)y(0) + P_{12}(\lambda)y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$P_{21}(\lambda)y(\pi) + P_{22}(\lambda)y'(\pi) = 0, \tag{3}$$

где q – вещественная функция, $q \in W_2^1[0, \pi]$, P_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – произвольные полиномы от λ с вещественными коэффициентами, причем полиномы в каждом из граничных условий не имеют общих нулей.

Впервые регуляризованный след для классической задачи Штурма – Лиувилля был вычислен в работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [1]. Для линейно зависящих от спектрального параметра граничных условий регуляризованный след был вычислен в работе [5].

Введем следующие обозначения.

$$d_{ij} := \deg P_{ij}, \quad d_i := \max_j d_{ij}, \quad d := d_1 + d_2, \quad P_{ij}(\lambda) := \sum_{k=0}^{d_i} a_k^{ij} \lambda^{d_i - k}.$$

Известно (см., например, [4]), что все собственные значения задачи (1) – (3), за исключением конечного числа, вещественные и простые.

Введем следующие обозначения: $u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1(0,\lambda)=1,\quad u_1'(0,\lambda)=0,\qquad u_2(0,\lambda)=0,\quad u_2'(0,\lambda)=1.$$

Положим $u(x,\lambda):=P_{12}(\lambda)u_1(x,\lambda)-P_{11}(\lambda)u_2(x,\lambda)$, т. е. $u(x,\lambda)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2). Аналогично, обозначим $v_1(x,\lambda),\ v_2(x,\lambda)$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$v_1(\pi,\lambda)=1,\quad v_1'(\pi,\lambda)=0,\qquad v_2(\pi,\lambda)=0,\quad v_2'(\pi,\lambda)=1.$$

Решение $v(x,\lambda):=P_{22}(\lambda)v_1(x,\lambda)-P_{21}(\lambda)v_2(x,\lambda)$ при всех λ удовлетворяет граничному условию (3).

Определим функцию $\omega(\lambda):=u(x,\lambda)v'(x,\lambda)-u'(x,\lambda)v(x,\lambda)$. Она не зависит от x, т. к. ее производная тождественно равна нулю при $x\in[0,\pi]$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\omega(\lambda)=P_{11}(\lambda)P_{21}(\lambda)u_2(\pi,\lambda)-P_{12}(\lambda)P_{21}(\lambda)u_1(\pi,\lambda)-\\ -P_{12}(\lambda)P_{22}(\lambda)u_1'(\pi,\lambda)+P_{11}(\lambda)P_{22}(\lambda)u_2'(\pi,\lambda)\end{aligned}\tag{4}$$

– целая функция от λ, нули которой являются собственными значениями задачи (1)–(3).

Обозначим $\lambda=s^2,\ s=\sigma+it$. Тогда при $|s|\to\infty$ имеют место асимптотические оценки, выполняющиеся равномерно по $x\in[0,\pi]$ (см., например, [3], гл.I §2)

$$u_1(x,\lambda)=\cos sx+O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|}\right),\qquad u_2(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right).$$

Используя формулы (см. [3], лемма I.2.1)

$$u_1(x,\lambda)=\cos sx+\frac{1}{s}\int_0^x\sin s(x-\tau)q(\tau)u_1(\tau,\lambda)d\tau,\tag{5}$$

$$u_2(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x\sin s(x-\tau)q(\tau)u_2(\tau,\lambda)d\tau\tag{6}$$

и условие $q\in W_2^1[0,\pi]$, получим уточненные асимптотические оценки:

$$\begin{aligned}u_1(x,\lambda)=\cos sx+\frac{1}{2}Q(x)\frac{\sin sx}{s}+\\ +\left(\frac{q(x)-q(0)}{4}-\frac{1}{8}Q^2(x)\right)\frac{\cos sx}{s^2}-\frac{1}{4s^2}I_2(s,x)+O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^3}\right),\end{aligned}\tag{7}$$

$$u_2(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} - \frac{1}{2}Q(x)\frac{\cos sx}{s^2} +$$
$$+ \left(\frac{q(x)+q(0)}{4} - \frac{1}{8}Q^2(x)\right)\frac{\sin sx}{s^3} + \frac{1}{4s^3}I_1(s,x) + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^4}\right), \quad (8)$$

где

$$Q(x) := \int_0^x q(t)dt, \quad I_1(s,x) := \int_0^x \sin s(x-2\tau)q'(\tau)d\tau,$$
$$I_2(s,x) := \int_0^x \cos s(x-2\tau)q'(\tau)d\tau.$$

Из формул (5) и (6) находим:

$$u_1'(x,\lambda) = -s\sin sx + \int_0^x \cos s(x-\tau)q(\tau)u_1(\tau,\lambda)d\tau, \quad (9)$$

$$u_2'(x,\lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos s(x-\tau)q(\tau)u_2(\tau,\lambda)d\tau \quad (10)$$

Подставляя в них соответственно формулы (7) и (8), получим:

$$u_1'(x,\lambda) = -s\sin sx + \frac{1}{2}Q(x)\cos sx +$$
$$+ \left(\frac{q(x)+q(0)}{4} + \frac{1}{8}Q^2(x)\right)\frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{4s}I_1(s,x) + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right), \quad (11)$$

$$u_2'(x,\lambda) = \cos sx + \frac{1}{2}Q(x)\frac{\sin sx}{s} -$$
$$- \left(\frac{q(x)-q(0)}{4} + \frac{1}{8}Q^2(x)\right)\frac{\cos sx}{s^2} + \frac{1}{4s^2}I_2(s,x) + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^3}\right). \quad (12)$$

Асимптотика собственных значений зависит от соотношения между степенями полиномов P_{ij} в граничных условиях. Поэтому рассмотрим отдельно каждый из четырех возможных случаев.

1) Пусть $d_{11} \le d_{12}$, $d_{21} \le d_{22}$.

Подставляя (9)–(12) в (4), получаем асимптотику $\omega(\lambda)$:

$$\omega(\lambda) = a_0^{12}a_0^{22}s^{2d+1}\sin s\pi + \left(a_0^{11}a_0^{22} - a_0^{12}a_0^{21} - \frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{12}a_0^{22}\right)s^{2d}\cos s\pi +$$
$$+ \left(a_0^{11}a_0^{21} - \frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{12}a_0^{21} - \left(\frac{q(\pi)+q(0)}{4} + \frac{1}{8}Q^2(\pi)\right)a_0^{12}a_0^{22} + a_1^{12}a_0^{22} +\right.$$
$$\left. + a_0^{12}a_1^{22} + \frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_0^{22}\right)s^{2d-1}\sin s\pi - \frac{1}{4}a_0^{12}a_0^{22}I_1(s,\pi)s^{2d-1} +$$
$$+ O(e^{|t|\pi}|s|^{2d-2}). \quad (13)$$

Учитывая вещественность и положительность собственных значений $\lambda_n = s_n^2$ при достаточно больших n, из теоремы Руше стандартным образом получаем асимптотику $s_n = n - d + O(1/n)$ (при этом каждое собственное значение считается столько раз какова его кратность). Полагая $s_n = n - d + \delta_n$, получим из (13):

$$\operatorname{tg}\pi\delta_n = \frac{1}{s_n}\left(\frac{1}{2}Q(\pi) + \frac{a_0^{21}}{a_0^{22}} - \frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}\right) + (-1)^{n-d}\frac{I_1(s_n,\pi)}{s_n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Отсюда

$$s_n = n - d + \frac{c}{n-d} + \frac{\xi_n}{n^2},$$

где $\{\xi_n\} \in l_2$,

$$c := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q(\pi) + \frac{a_0^{21}}{a_0^{22}} - \frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}\right). \tag{14}$$

Тогда

$$\lambda_n = (n-d)^2 + 2c + \frac{\eta_n}{n}, \quad \{\eta_n\} \in l_2. \tag{15}$$

Обозначим Tr регуляризованный след первого порядка задачи (1)–(3):

$$Tr := \sum_{n=0}^{d}\lambda_n + \sum_{n=d+1}^{\infty}(\lambda_n - (n-d)^2 - 2c). \tag{16}$$

Для вычисления этого следа используем метод Б. М. Левитана [2]. Представим целую функцию $\omega(\lambda)$ в виде бесконечного произведения и изучим его асимптотическое поведение при больших отрицательных $\lambda = -\mu^2$. Сравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях μ в полученной асимптотической формуле и формуле (13), получим значение следа.

Так как $\omega(\lambda)$ – целая функция порядка $1/2$, то из теоремы Адамара имеем

$$\omega(\lambda) = A\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \tag{17}$$

где A – некоторая константа. Если при некотором n $\lambda_n = 0$, то в (17) соответствующий множитель заменяется на $-\lambda$.

Представим $\omega(\lambda)$ в виде

$$\omega(\lambda) = A_1\prod_{n=0}^{d}(\lambda_n - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+d} - \lambda}{n^2 - \lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 - \lambda}{n^2} =$$

$$= A_1\prod_{n=0}^{d}(\lambda_n - \lambda)\Phi(\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}}, \tag{18}$$

где

$$A_1 := A\prod_{n=0}^{d}\frac{1}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_{n+d}}, \quad \Phi(\lambda) := \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+d}-\lambda}{n^2-\lambda}.$$

Положим $\lambda = -\mu^2,\ \mu > 0$. Изучим асимптотическое поведение $\Phi(\lambda)$ при $\mu \to \infty$.

$$\ln\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\lambda_{n+d}-n^2}{n^2+\mu^2}\right).$$

Учитывая оценки
$\ln(1+x) = x + O(x^2)$ при $x \to 0$,
$\left|\frac{\lambda_{n+d}-n^2}{n^2+\mu^2}\right| \le \frac{C}{n^2+\mu^2}$, где C – некоторая константа,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+\mu^2)^2} \le \frac{1}{\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\pi}{2\mu}\operatorname{cth}\pi\mu - \frac{1}{2\mu^2}\right) = O(\mu^{-3}),$$

получаем:

$$\ln\Phi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+d}-n^2}{n^2+\mu^2} + O(\mu^{-3}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+d}-n^2}{n^2+\mu^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n+d}-n^2-2c}{n^2+\mu^2} + 2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\mu^2} =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_{n+d}-n^2-2c) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(\lambda_{n+d}-n^2-2c)}{n^2+\mu^2}\right) + 2c\left(\frac{\pi\operatorname{cth}\pi\mu}{2\mu} - \frac{1}{2\mu^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}(Tr - \sum_{n=0}^{d}\lambda_n) - \frac{1}{\mu^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\eta_n}{n^2+\mu^2} + \frac{\pi c}{\mu} - \frac{c}{\mu^2} + o(e^{-2\pi\mu}) =$$

$$= \frac{\pi c}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}(Tr - \sum_{n=0}^{d}\lambda_n - c) + o(\mu^{-2}),$$

так как

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\eta_n}{n^2+\mu^2}\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n^2+\mu^2}\right)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\mu^2}}\,||\eta||_{l_2} = O(\mu^{-1/2}).$$

Следовательно,

$$\ln\Phi(\lambda) = \frac{\pi c}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\left(Tr - \sum_{n=0}^{d}\lambda_n - c\right) + o(\mu^{-2}). \tag{19}$$

Отсюда

$$\Phi(\lambda) = 1 + \frac{\pi c}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\left(Tr - \sum_{n=0}^{d}\lambda_n - c + \frac{1}{2}(\pi c)^2\right) + o(\mu^{-2}). \tag{20}$$

Подставляя эту формулу в (18) и учитывая, что $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\operatorname{sh}\pi\mu}{\mu}$, получим:

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2}A_1 e^{\pi\mu}\left(\mu^{2d+1} + \pi c\mu^{2d} + \left(Tr - c + \frac{(\pi c)^2}{2}\right)\mu^{2d-1} + o(\mu^{2d-1})\right). \tag{21}$$

Из формулы (13) при $s = i\mu$ с учетом формулы (14) имеем:

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{2}(-1)^{d+1}a_0^{12}a_0^{22}e^{\pi\mu}\left(\mu^{2d+1} + \pi c\mu^{2d} + \left(\frac{q(\pi)+q(0)}{4} + \frac{1}{8}Q^2(\pi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}Q(\pi)\left(\frac{a_0^{21}}{a_0^{22}} - \frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}\right) - \frac{a_0^{11}a_0^{21}}{a_0^{12}a_0^{22}} - \frac{a_1^{12}}{a_0^{12}} - \frac{a_1^{22}}{a_0^{22}}\right)\mu^{2d-1} + o(\mu^{2d-1})\right). \tag{22}$$

Сравнивая коэффициенты при μ^{2d+1}, получаем $A_1 = (-1)^{d+1}a_0^{12}a_0^{22}$. Сравнение коэффициентов при μ^{2d-1} дает:

$$Tr = \frac{q(\pi)+q(0)}{4} + c - \frac{a_1^{12}}{a_0^{12}} - \frac{a_1^{22}}{a_0^{22}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^{21}}{a_0^{22}}\right)^2. \tag{23}$$

2) Пусть теперь $d_{11} > d_{12}$, $d_{21} > d_{22}$.
В этом случае

$$\omega(\lambda) =$$
$$= a_0^{11}a_0^{21}s^{2d-1}\sin s\pi - \left(\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_0^{21} + a_1^{12}a_0^{21} - a_0^{11}a_1^{22}\right)s^{2d-2}\cos s\pi +$$
$$+ \left(\left(\frac{q(\pi)+q(0)}{4} - \frac{1}{8}Q^2(\pi)\right)a_0^{11}a_0^{21} - \frac{1}{2}Q(\pi)a_1^{12}a_0^{21} + a_1^{12}a_1^{22} + \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_1^{22} + +a_0^{11}a_1^{21} + a_0^{21}a_1^{11}\right)s^{2d-3}\sin s\pi + \frac{1}{4}a_0^{11}a_0^{21}I_1(s,\pi)s^{2d-3} +$$
$$+ O(e^{|t|\pi}|s|^{2d-4}), \tag{24}$$

собственные значения имеют асимптотику:

$$\lambda_n = (n-d+1)^2 + 2c + \frac{\eta_n}{n}, \quad \{\eta_n\} \in l_2, \tag{25}$$

где

$$c := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q(\pi) + \frac{a_1^{12}}{a_0^{11}} - \frac{a_1^{22}}{a_0^{21}}\right). \tag{26}$$

Регуляризованный след задачи (1–3) определим равенством

$$Tr := \sum_{n=0}^{d-1}\lambda_n + \sum_{n=d}^{\infty}(\lambda_n - (n-d+1)^2 - 2c). \tag{27}$$

Формула следа будет иметь вид:

$$Tr=-\frac{q(\pi)+q(0)}{4}+c-\frac{a_1^{11}}{a_0^{11}}-\frac{a_1^{21}}{a_0^{21}}-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^{12}}{a_0^{11}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^{22}}{a_0^{21}}\right)^2. \tag{28}$$

3) Пусть $d_{11}\le d_{12}$, $d_{21}>d_{22}$.
Тогда

$$\begin{aligned}&\omega(\lambda)=\\&=-a_0^{12}a_0^{21}s^{2d}\cos s\pi-\left(\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{12}a_0^{21}-a_0^{11}a_0^{21}-a_0^{12}a_1^{22}\right)s^{2d-1}\sin s\pi-\\&-\left(\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_0^{21}+\left(\frac{q(\pi)-q(0)}{4}-\frac{1}{8}Q^2(\pi)\right)a_0^{12}a_0^{21}+a_0^{12}a_1^{21}+a_1^{12}a_0^{21}+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{12}a_1^{22}-a_0^{11}a_1^{22}\right)s^{2d-2}\cos s\pi+\frac{1}{4}a_0^{12}a_0^{21}I_1(s,\pi)s^{2d-2}+\\&+O(e^{|t|\pi}|s|^{2d-3}),\end{aligned}\tag{29}$$

собственные значения имеют асимптотику:

$$\lambda_n=(n-d+1/2)^2+2c+\frac{\eta_n}{n},\quad \{\eta_n\}\in l_2, \tag{30}$$

где

$$c:=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q(\pi)-\frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}-\frac{a_1^{22}}{a_0^{21}}\right). \tag{31}$$

Регуляризованный след задачи (1–3) определим равенством

$$Tr:=\sum_{n=0}^{d-1}\lambda_n+\sum_{n=d}^{\infty}\left(\lambda_n-(n-d+1/2)^2-2c\right). \tag{32}$$

$\omega(\lambda)$ имеет в этом случае представление

$$\omega(\lambda)=A_1\prod_{n=0}^{d-1}(\lambda_n-\lambda)\Phi(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}\pi,$$

где $\Phi(\lambda):=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda_{n+d-1}-\lambda}{(n-1/2)^2-\lambda}$.

Используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1/2)^2+\mu^2}=\frac{\pi}{2\mu}\operatorname{th}\pi\mu,$$

получаем

$$\Phi(\lambda)=1+\frac{\pi c}{\mu}+\frac{1}{\mu^2}\left(Tr-\sum_{n=0}^{d-1}\lambda_n+\frac{1}{2}(\pi c)^2\right)+o(\mu^{-2}).$$

Формула следа будет иметь вид:

$$Tr = \frac{q(0)-q(\pi)}{4} - \frac{a_1^{12}}{a_0^{12}} - \frac{a_1^{21}}{a_0^{21}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^{11}}{a_0^{12}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^{22}}{a_0^{21}}\right)^2. \tag{33}$$

4) Пусть $d_{11} > d_{12}$, $d_{21} \le d_{22}$.
Тогда

$$\begin{gathered}\omega(\lambda) = \\ = a_0^{11}a_0^{22}s^{2d}\cos s\pi + \left(\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_0^{22} + a_0^{11}a_0^{21} + a_1^{12}a_0^{22}\right)s^{2d-1}\sin s\pi - \\ - \left(\frac{1}{2}Q(\pi)a_0^{11}a_0^{21} + a_1^{12}a_0^{21} + \frac{1}{2}Q(\pi)a_1^{12}a_0^{22} + \right. \\ + \left(\frac{q(\pi)-q(0)}{4} + \frac{1}{8}Q^2(\pi)\right)a_0^{11}a_0^{22} - \\ \left. - a_1^{11}a_0^{22} - a_0^{11}a_1^{22}\right)s^{2d-2}\cos s\pi + \frac{1}{4}a_1^{11}a_0^{22}I_2(s,\pi)s^{2d-2} + \\ + O(e^{|t|\pi}|s|^{2d-3}),\end{gathered} \tag{34}$$

собственные значения имеют асимптотику (30), в которой

$$c := \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}Q(\pi) + \frac{a_1^{12}}{a_0^{11}} + \frac{a_0^{21}}{a_0^{22}}\right). \tag{35}$$

Регуляризованный след задачи в этом случае также определяется равенством (32). Формула следа будет иметь вид:

$$Tr = \frac{q(0)-q(\pi)}{4} - \frac{a_1^{11}}{a_0^{11}} - \frac{a_1^{22}}{a_0^{22}} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_1^{12}}{a_0^{11}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^{21}}{a_0^{22}}\right)^2. \tag{36}$$

Список литературы

1. Гельфанд И. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – С. 593–596.
2. Левитан Б. М. Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма – Лиувилля / Б. М. Левитан // Успехи мат. наук. – 1964. – Т. 19, вып. 1(115). – С. 161–165.
3. Левитан Б. М. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
4. Руссаковский Е. М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия / Е. М. Руссаковский // Функц. анализ и его прил. – 1975. – Т. 9, вып. 4. – С. 91–92.

5. Gulijev N. J. The regularized trace formula for the Sturm – Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions / N. J. Gulijev // Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. – 2005. – T. 22 – P. 99–102.

A. E. Atkin, G. P. Atkina

Calculation of the regularized trace for the Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions

Abstract. In this paper we calculate first regularized trace of boundary value problem for the regular Sturm – Liouville operator with the eigenvalue parameter polinomially contained in the bounary conditions.

Keywords: trace of operator; Sturm – Liouville operator; spectral parameter in boundary conditions.

Эткин Анатолий Ефимович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432970, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Эткина Галина Петровна, ст. преподаватель, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432970, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Atkin Anatoly, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy St., Ulyanovsk, 432970, docent, Phone: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Atkina Galina, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy St., Ulyanovsk, 432970, senior teacher, Phone: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)