



Серия «Математика»

2015. Т. 12. С. 35–48

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716

Некоторые замкнутые классы унарнопорожденных ультрафункций*

О. В. Зубков

Иркутский государственный университет

Аннотация. В работе исследуются классы унарнопорожденных ультрафункций. Показано, что множество всех унарных ультрафункций является полным.

При переборе всех подмножеств унарных ультрафункций с возможностью замыкания только по суперпозиции получен 131 класс попарно различающихся. Если разрешить возможность добавления ровно одного фиктивного аргумента, число классов сокращается до 81, перечень которых приводится в приложении 1.

Доказано, что 68 классов из указанных 81 гарантированно являются замкнутыми относительно суперпозиции и добавления произвольного числа фиктивных аргументов.

Ключевые слова: мультифункции, ультрафункции, суперпозиция, унарнопорожденные функции.

1. Мультифункции и ультрафункции

Одним из возможных направлений обобщения функций k -значной логики является переход к так называемым мультифункциям, значением которых может быть произвольное (в том числе и пустое) подмножество множества $E_k = \{1, \dots, k\}$. Как правило, одноэлементные подмножества отождествляют с соответствующими элементами множества E_k . Далее следует определить способ получения значения мультифункции на наборе из произвольных подмножеств из E_k . Из естественных соображений, при подаче на любой из аргументов хотя бы одного пустого множества, результатом является так же пустое множество. Если же на вход подаются непустые подмножества, то рассматриваются следующие варианты [3]:

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00621.

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\tau_i \in \alpha_i} g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \quad (1.1)$$

и

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\tau_i \in \alpha_i} g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\tau_i \in \alpha_i} g(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Суперпозиция, определенная на основе (1.1) и основанные на ней конструкции относят к классу собственно мультифункций или мультиопераций.

При рассмотрении суперпозиции на основе (1.2) получают так называемые ультрафункции. В [2] можно познакомиться с содержательной моделью, на основе которой введена данная суперпозиция.

Следует еще раз отметить, что мультифункции и ультрафункции определяются только на двоичных наборах (и этим отличаются от произвольных 2^k -значных функций), так как на остальных наборах они доопределяются автоматически либо согласно (1.1), либо согласно (1.2). Далее, если определение или утверждение может быть отнесено к любому из указанных отображений, либо из контекста понятно, о каком из двух отображений идет речь, будем называть их просто функциями. В случае, когда будет необходимо явно разделить эти два понятия, будем использовать приставки «мульти-» и «ультра-».

При уточнении значения k в первую очередь рассматривается $k = 2$. Согласно [4] введем следующие обозначения для подмножеств множества $E_2 = \{1, 2\} : \emptyset \rightarrow 0, \{1\} \rightarrow 1, \{2\} \rightarrow 2, \{1, 2\} \rightarrow 3$.

Заметим, что данное обозначение естественным образом может быть обобщено на произвольное k .

Определение 1. *Замыкание множества функций $\{f_1, \dots, f_s\}$ по одной из указанных суперпозиций определяется следующим образом:*

- 1) функции f_1, \dots, f_s принадлежат замыканию;
- 2) если функции $g(x_1, \dots, x_n), g_1, \dots, g_n$ принадлежат замыканию, то их суперпозиция $g(g_1, \dots, g_n)$ так же принадлежит замыканию.

Замечание 1. Помимо одной из двух рассматриваемых операций суперпозиции будем далее считать возможным при построении замыкания добавление к любой из полученных функций произвольного числа фиктивных аргументов.

Следующим шагом является описание замкнутых классов относительно рассматриваемой суперпозиции. Естественным образом их рассмотрение начать с самых простых, построенных на основе функций

от одного аргумента, называемых унарными. Все функции, получаемые при замыкании множества унарных функций, будем называть унарнопорожденными. В обычных конечнозначных функциях классы унарнопорожденных функций не представляют интереса в связи с тем, что их замыкание не содержит ничего нового. В случае мультифункций (ультрафункций), суперпозиция нескольких унарных с добавлением фиктивных аргументов может быть существенно унарной.

Пример 1. Рассмотрим следующие суперпозиции:

мультифункции						ультрафункции					
x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$	x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	3	1	3	3	1	1	3	2	3	1
1	2	1	0	3	0	1	2	1	0	3	0
2	1	3	1	2	1	2	1	3	2	1	3
2	2	1	0	2	0	2	2	1	0	1	0

Функции, принимающие на некоторых наборах значение 0 и не являющиеся тождественно нулевыми, будем называть в данной работе частично нулевыми. В каждом из приведенных примеров, за счет возможности добавления фиктивных аргументов, на которые подставлены частично нулевые функции, получены существенно унарные функции, которые, согласно следующему определению, являются унарными на подкубе.

Пусть в множестве двоичных наборов длины n выбрано подмножество размера 2^k таких наборов, что они совпадают в некоторых фиксированных $n - k$ позициях, а в остальных k позициях принимают все возможные варианты значений. Такое подмножество будем называть k -мерным подкубом n -мерного куба. Далее будем пользоваться очевидным свойством: непустое пересечение двух и большего числа подкубов образует подкуб.

Определение 2. Будем говорить, что функция f является унарной на подкубе, если найдется такое подмножество ее аргументов, по которому ровно одна остаточная является ненулевой унарной (или константной), все остальные остаточные по этому подмножеству тождественно нулевые.

Более строго: функция f унарная на подкубе, если найдется подмножество аргументов x_{i_1}, \dots, x_{i_k} (возможно пустое) и ровно один набор $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$, $\alpha_{i_j} \in \{1, 2\}$, такие что остаточная $f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}^{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}}$ является унарной (или константной), не содержащей 0. Все остальные остаточные f по аргументам x_{i_1}, \dots, x_{i_k} должны быть тождественно нулевыми. При этом, если $f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}^{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}}$ существенно унарная, то существует аргумент x_r , не содержащийся среди x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , такой что $f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}^{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} 1} x_r \neq f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}^{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} 2} x_r$. Обе эти остаточные являются константными, а аргумент x_r , если он

существует будем называть разделяющим. Если $f_{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}^{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}}$ константная, то f так же будем называть константной на подкубе.

Любой аргумент унарной на подкубе функции может быть отнесен к одному из трех видов:

- разделяющий (см. выше);
- существенный относительно 0 (все те x_{i_1}, \dots, x_{i_k} , по которым и получалась унарная остаточная, по любому такому аргументу равно одна остаточная будет тождественно нулевой; то значение, при котором получится 0, назовем обнуляющим);
- фиктивный ($f_x^1 = f_x^2$, это все остальные аргументы).

Для дальнейших рассуждений нам будет полезен следующий факт: если подкуб, на котором ультрафункция принимает ненулевые значения, содержит набор $(1, \dots, 1)$, то для всех существенных относительно 0 аргументов этой ультрафункции обнуляющим значением будет 2.

Пример 2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0011002200000000)$ — унарная на подкубе, так как $f_{x_1 x_3}^{12} = (1122)$ — унарная, а все остальные остаточные по $x_1 x_3$ — тождественно нулевые. При этом: x_2 — разделяющий, x_1 и x_3 — существенные относительно 0, для x_1 обнуляющее значение 2, для x_3 обнуляющее значение 1, x_4 — фиктивный.

В работе [1] было показано, что замыкание унарных мультифункций по соответствующей суперпозиции с возможностью добавления фиктивных аргументов (унарнопорожденные мультифункции) образуют в точности множество унарных на подкубе мультифункций. Отсюда, в частности, следует, что множество унарных мультифункций с операцией суперпозиции не является полным.

Данная работа посвящена рассмотрению аналогичной задачи в классе ультрафункций. Можно показать, что ситуация с полнотой множества унарных ультрафункций другая:

Утверждение 1. *Замыкание множества унарных ультрафункций по соответствующей суперпозиции с возможностью добавления фиктивных аргументов совпадает с множеством всех ультрафункций.*

Доказательство. Функция (21) является унарной. Покажем, что функции конъюнкция (1112) и произвольная, содержащая все четыре значения, например (0123) являются так же унарнопорожденными:

получим (2030):						получим (1030):					
x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$	x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	0	0	1	2	1	1	0	0
2	1	1	3	1	3	2	1	2	3	1	3
2	2	1	3	0	0	2	2	2	3	0	0

получим (1113):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	1	1
1	2	0	1	3	1
2	1	3	3	1	1
2	2	0	3	3	3

получим (3332):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	2	2	3	3
1	2	0	2	1	3
2	1	3	3	3	3
2	2	0	3	1	2

получим (1112):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	3	1	1
1	2	1	3	1	1
2	1	0	3	1	1
2	2	2	2	3	2

получим (3323):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	2	2	1	3
1	2	0	2	3	3
2	1	3	3	1	2
2	2	0	3	3	3

получим (1020):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	1	1
1	2	1	1	0	0
2	1	2	2	1	2
2	2	2	2	0	0

получим (1102):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	3	1
1	2	0	1	3	1
2	1	2	2	2	0
2	2	0	2	3	2

получим (0123):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	2	1	0
1	2	1	3	1	1
2	1	0	2	2	2
2	2	2	3	2	3

Теперь рассмотрим произвольную ультрафункцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Построим по ней две обычных булевых функции $g_1(x_1, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, \dots, x_n)$ (напомним, что они действуют на множестве $E_2 = \{1, 2\}$) следующим образом:

если на некотором двоичном наборе $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ f принимает значение 0, то положим, что $g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ и $g_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$;

если на некотором двоичном наборе β_1, \dots, β_n f принимает значение 1, то положим, что $g_1(\beta_1, \dots, \beta_n) = 1$ и $g_2(\beta_1, \dots, \beta_n) = 2$;

если на некотором двоичном наборе $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ f принимает значение 2, то положим, что $g_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 2$ и $g_2(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 1$;

если на некотором двоичном наборе $\delta_1, \dots, \delta_n$ f принимает значение 3, то положим, что $g_1(\delta_1, \dots, \delta_n) = 2$ и $g_2(\delta_1, \dots, \delta_n) = 2$.

Пусть $h(x_1, x_2) = (0123)$. Очевидно, что $h(g_1, g_2) = f$. Так как h уже получена, а произвольные булевы функции g_1 и g_2 можно получить при помощи конъюнкции и отрицания, то произвольная ультрафункция f является унарнопорожденной, что в свою очередь влечет полноту множества унарных ультрафункций.

□

Полученный результат делает рассмотрение замкнутых классов унарнопорожденных ультрафункций достаточно интересным, так как

позволяет построить «скелет» всей решетки замкнутых классов ультрафункций от самого примитивного до самого полного.

Задача, рассматриваемая в данной работе, может быть сформулирована следующим образом: выделить все попарно различные замкнутые относительно суперпозиции и добавления фиктивных аргументов классы унарно порожденных ультрафункций. Далее каждый такой класс будем описывать в виде множества всех содержащихся в нем и порождающих его унарных ультрафункций. Очевидно, что при этом в таком классе не может быть получено новых унарных ультрафункций.

Всего имеется 16 унарных ультрафункций: (00), (01), (02), (03), (10), (11), (12), (13), (20), (21), (22), (23), (30), (31), (32), (33) и 65535 непустых подмножеств из них.

Из достаточно естественных соображений будем учитывать только те классы, которые содержат (00) и (12). Это сокращает число рассматриваемых классов до 16384.

Простым перебором всех вариантов суперпозиции без добавления фиктивных аргументов, можно показать, что среди этих 16384 классов есть всего лишь 131 существенно различающийся класс.

Пример 3. Рассмотрим класс $\{(00), (12), (13)\}$. Если взять суперпозицию функции (13) в которой на ее аргумент подставлена так же функция (13), получим новую унарную функцию (11), которой нет в исходном множестве. Если же перебрать все возможные суперпозиции в новом классе $\{(00), (12), (13), (11)\}$, то новых унарных функций в нем получить не удастся.

Если при посроении суперпозиций можно еще и добавлять один фиктивный аргумент, то число попарно различных классов снова сократится.

Пример 4. Рассмотрим класс $\{(00), (12), (03)\}$. Если рассматривать суперпозиции без возможности добавления фиктивного аргумента, то новых унарных функций в нем не получить:

f	f	$f(f)$	g	f	$g(f)$	f	g	$f(g)$	g	g	$g(g)$
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
3	3	3	2	3	3	3	2	3	2	2	2

Если же имеется возможность добавления одного фиктивного аргумента, то можно получить еще одну унарную ультрафункцию:

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	0	0
1	2	1	1	0	0
2	1	2	2	3	2
2	2	2	2	3	2

При переборе всех вариантов суперпозиции с возможностью добавления одного фиктивного аргумента для каждого из полученных ранее 131 класса, получим, что некоторые из них совпадут. В итоге получится 81 унарнопорожденный класс замкнутый по суперпозиции и добавлению одного фиктивного аргумента. Их полный список приведен в приложении 1 Во всех дальнейших рассуждениях, касающихся упомянутых классов, будем для упрощения изложения, использовать нумерацию, используемую в приложении 1 для указания конкретных множеств унарных ультрафункций. Для доказательства замкнутости любого из этих классов относительно суперпозиции и добавления некоторого конкретного числа фиктивных аргументов достаточно показать, что в его замыкании на этих условиях не содержится новых унарных ультрафункций.

Все эти рассуждения приводят к следующему вопросу: каково число замкнутых относительно суперпозиции и добавления произвольного числа фиктивных аргументов классов унарнопорожденных ультрафункций? Иными словами, существуют ли среди 81 указанного класса такие, что в них при помощи суперпозиции и, возможно, добавления произвольного числа фиктивных аргументов, можно получить унарные ультрафункции, отличные от исходных.

Пример 5. Нетривиальность получаемых конструкций продемонстрируем на примере множества $\{(00), (12), (10), (32), (13), (23), (31)\}$.

получим (3020):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	3	3
1	2	2	0	3	0
2	1	1	1	2	2
2	2	2	0	2	0

получим (1020):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	1	1
1	2	2	0	1	0
2	1	1	1	2	2
2	2	2	0	2	0

получим (3323):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	3	1	1	3
1	2	0	1	3	3
2	1	2	3	1	2
2	2	0	3	3	3

получим (1102):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	1	3	1
1	2	0	1	3	1
2	1	2	2	2	0
2	2	0	2	3	2

получим (2211):

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	1	2	3	2
1	2	1	2	3	2
2	1	0	3	1	1
2	2	2	3	1	1

В итоге, при возможности добавления одного фиктивного аргумента, в замыкании рассматриваемого множества получены: унарные на подкубе (3020) и (1020), неунарные на подкубе (3323) и (1102), новая унарная ультрафункция (21).

2. Классы, не содержащие частично нулевых ультрафункций

Предыдущие рассуждения показывают, что первым шагом для получения новых унарнопорожденных ультрафункций является подстановка на место фиктивного аргумента частично нулевой ультрафункции. Отсюда можно предположить, что если в классе нет частично нулевых ультрафункций, то ничего принципиально нового в нем получить нельзя.

Утверждение 2. *Первые 25 классов от 0 до 24, не содержащих частично нулевых ультрафункций, являются замкнутыми относительно суперпозиции и добавления произвольного числа фиктивных аргументов. В замыкании любого из этих классов не содержится других унарных ультрафункций, кроме исходных.*

Доказательство. Пусть $\beta = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ – один из классов 0–24. $f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in \beta$, где x_j – существенный, все остальные – фиктивные. $\Phi = f_i(f_{k_1}, \dots, f_{k_j}, \dots, f_{k_n})$ – некоторая суперпозиция ультрафункций из β .

Так как все, кроме j -го аргумента у функции f_i фиктивные и в β нет функций, частично содержащих 0, то значение суперпозиции зависит исключительно от f_{k_i} . Если на каком-то наборе $f_{k_i} = 1$, то значение суперпозиции на этом наборе равно $f_i(1)$, то же самое можно сказать и про $f_{k_i} = 2$ и про $f_{k_i} = 3$ (в последнем случае значение равно либо $f_i(1) \cup f_i(2)$, либо $f_i(1) \cap f_i(2)$). Так как f_{k_i} изначально является унарной, то и результат суперпозиции так же всегда будет унарной ультрафункцией. Отсюда вывод: в классах, не содержащих частично нулевых ультрафункций 0–24, добавление фиктивных аргументов ни на что не влияет. Так как все возможные слияния классов уже были отслежены при полном переборе исходных 16384 классов и получении 131 класса, замкнутых по суперпозиции, то в замыканиях классов 0–24 новых унарных ультрафункций не содержится. \square

3. Классы унарных на подкубе ультрафункций

3.1. КЛАССЫ УНАРНЫХ НА ПОДКУБЕ, НЕ СОДЕРЖАЩИЕ (13), (31), (23), (32)

Среди 81 класса выделим следующие 37, не содержащие ультрафункций (13), (31), (23), (32) (см. приложение 1):

25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 71, 72, 73, 74, 75, 77.

Утверждение 3. *Если в классе нет ультрафункций (13), (31), (23), (32), то его замыкание относительно суперпозиции и добавления любого числа фиктивных аргументов содержит только унарные на подкубе ультрафункции. В указанном замыкании любого из этих классов не содержится других унарных ультрафункций, кроме исходных.*

Доказательство. Исходные ультрафункции класса являются унарными, а значит и унарными на подкубе.

Пусть $f(f_1, \dots, f_n)$ — некоторая их суперпозиция. Покажем, что если f и f_i были унарными на подкубе и не содержали одновременно пар значений 1 и 3 либо 2 и 3, то результат суперпозиции так же будет унарным на подкубе, не содержащим одновременно 1 и 3 либо 2 и 3.

Те наборы, на которых внутренние f_i равны 0, рассматривать не будем, так как результат на них равен 0. Таким образом, останутся только те наборы, на которых ни одна из внутренних функций не равна 0. Так как все внутренние функции были унарными на подкубе, то пересечение этих подкубов (если оно не пусто) также является подкубом B . При этом, из очевидных соображений, каждая из внутренних функций на этом подкубе либо константная, либо принимает два различных значения, причем каждое ровно на половине наборов из B , образующей свой подкуб, размерность которого на 1 меньше размерности B .

Если f_i принимает на B два различных значения, то это 1 и 2. Если i -й аргумент является для внешней f существенным относительно 0, то одно из этих значений будет обнуляющим, что даст ровно на половине наборов из B значение суперпозиции 0.

В результате получим, что среди тех наборов, на которых результат может быть не равным 0, на всех существенных относительно 0 аргументах f будет находиться константа. Что расположено на фиктивных аргументах f в этих наборах не имеет значения, так как это ненулевые значения (если они разные, то можно, например, заменить их на одно и то же).

Остался только разделяющий для f аргумент, на котором в рассматриваемом подкубе находится либо (12), либо (21), либо (33). В любом случае, на этом подкубе результат будет не сложнее чем унарная функция. При этом, так как внешняя не содержит одновременно 1 и 3 либо 2 и 3, то и результат их одновременно содержать не будет.

Если рассматривать только подкуб, на котором результат не равен 0, то перейдем к рассмотрению только унарных функций, не содержащих в своем составе 0. Это (12), (21) и (33). Любая их суперпозиция не добавляет ничего нового, то есть исходный класс не содержит новых унарных ультрафункций. \square

3.2. ОСОБЫЕ КЛАССЫ УНАРНЫХ НА ПОДКУБЕ

Помимо рассмотренных в предыдущем разделе 37 классов ультрафункций, не содержащих одновременно 1 и 3 либо 2 и 3, есть еще 6 классов, сохраняющих унарность на подкубе и обладающих одним дополнительным свойством.

Утверждение 4. *Замыкания классов*

31: (00), (12), (10), (20), (22), (30), (32)

36: (00), (12), (10), (11), (20), (22), (30), (32), (33)

50: (00), (12), (02), (10), (20), (22), (30), (32)

содержат только унарные на подкубе ультрафункции, при этом для любого аргумента этих ультрафункций, существенного относительно 0, обнуляющим значением будет 2. В замыкании любого из этих классов не содержится других унарных ультрафункций, кроме исходных.

Доказательство. Рассмотрим суперпозицию $f(f_1, \dots, f_n)$, в которой f и f_i лежат в замыкании одного из рассматриваемых классов. Покажем, что ее результат является унарной на подкубе ультрафункцией и по любому существенному относительно 0 аргументу обнуляющим значением будет 2. Для любой из исходных унарных ультрафункций эти утверждения верны.

Удалим из рассмотрения те наборы, на которых внутренние функции равны 0. Останутся только те наборы, на которых все внутренние функции не равны 0. Эти наборы образуют подкуб B . Так как у всех внутренних функций обнуляющее значение равно 2, то подкуб, B обязательно содержит набор $(1, \dots, 1)$. Далее рассмотрим варианты, которые могут встретиться на наборах из B на существенных относительно 0 внешней функции f аргументах. Исходно там могут быть либо константы: (11), (22), (33), либо функции, сохраняющие 2: (12), (32). Во втором случае, так как значение 2 является обнуляющим для любого существенного относительно 0 аргумента f , то результат подстановки будет не отличим от подстановки (10) и (30) соответственно. Подкорректируем с учетом упомянутых подстановок подкуб и обозначим его B' . Напомним, что только на наборах из B' результат может быть не равен 0. Очевидно, что B' все еще содержит набор $(1, \dots, 1)$ и результат суперпозиции для любого своего существенного относительно 0 аргумента будет иметь обнуляющее значение 2. По любому существенному относительно 0 аргументу внешней функции f на наборах из B' будут стоять только константы. Остается заметить, что на разделяющем аргументе, могут быть функции (12), (32) или константы, а значит результат на B' не сложнее унарной функции. Так как указанное множество ультра-

функций не даст в замыкании никаких новых унарных то утверждение доказано. \square

Аналогично доказывается утверждение и для трех двойственных классов:

Утверждение 5. *Замыкания классов*

69: (00), (12), (01), (02), (03), (11), (13)

70: (00), (12), (01), (02), (03), (11), (13), (22), (33)

78: (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (13)

содержат только унарные на подкубе ультрафункции, при этом для любого аргумента этих ультрафункций, существенно относительно 0, обнуляющим значением будет 1. В замыкании любого из этих классов не содержится других унарных ультрафункций, кроме исходных.

Приложение 1. **Замкнутые относительно суперпозиции и добавления одного фиктивного аргумента классы унарных ультрафункций**

0. (00), (12)
1. (00), (12), (33)
2. (00), (12), (22)
3. (00), (12), (22), (33)
4. (00), (12), (22), (32)
5. (00), (12), (22), (32), (33)
6. (00), (12), (22), (23), (32), (33)
7. (00), (12), (21)
8. (00), (12), (21), (33)
9. (00), (12), (11)
10. (00), (12), (11), (33)
11. (00), (12), (11), (22)
12. (00), (12), (11), (22), (33)
13. (00), (12), (11), (22), (32), (33)
14. (00), (12), (11), (22), (23), (32), (33)
15. (00), (12), (11), (21), (22)
16. (00), (12), (11), (21), (22), (33)
17. (00), (12), (11), (13)
18. (00), (12), (11), (13), (33)
19. (00), (12), (11), (13), (31), (33)
20. (00), (12), (11), (13), (22), (33)
21. (00), (12), (11), (13), (22), (32), (33)
22. (00), (12), (11), (13), (22), (31), (33)
23. (00), (12), (11), (13), (22), (23), (31), (32), (33)
24. (00), (12), (11), (13), (21), (22), (23), (31), (32), (33)

25. (00), (12), (10)
26. (00), (12), (10), (30)
27. (00), (12), (10), (20)
28. (00), (12), (10), (20), (30)
29. (00), (12), (10), (20), (22)
30. (00), (12), (10), (20), (22), (30)
31. (00), (12), (10), (20), (22), (30), (32)
32. (00), (12), (10), (11)
33. (00), (12), (10), (11), (30), (33)
34. (00), (12), (10), (11), (20), (22)
35. (00), (12), (10), (11), (20), (22), (30), (33)
36. (00), (12), (10), (11), (20), (22), (30), (32), (33)
37. (00), (12), (10), (11), (13)
38. (00), (12), (10), (11), (13), (30), (33)
39. (00), (12), (10), (11), (13), (30), (31), (33)
40. (00), (12), (10), (11), (13), (20), (22), (30), (33)
41. (00), (12), (10), (11), (13), (20), (22), (30), (31), (33)
42. (00), (12), (02)
43. (00), (12), (02), (22)
44. (00), (12), (02), (22), (32)
45. (00), (12), (02), (10)
46. (00), (12), (02), (10), (20)
47. (00), (12), (02), (10), (20), (30)
48. (00), (12), (02), (10), (20), (22)
49. (00), (12), (02), (10), (20), (22), (30)
50. (00), (12), (02), (10), (20), (22), (30), (32)
51. (00), (12), (02), (03)
52. (00), (12), (02), (03), (22), (33)
53. (00), (12), (02), (03), (22), (32), (33)
54. (00), (12), (02), (03), (22), (23), (32), (33)
55. (00), (12), (01), (02)
56. (00), (12), (01), (02), (11)
57. (00), (12), (01), (02), (11), (22)
58. (00), (12), (01), (02), (10)
59. (00), (12), (01), (02), (10), (20)
60. (00), (12), (01), (02), (10), (20), (21)
61. (00), (12), (01), (02), (10), (11)
62. (00), (12), (01), (02), (10), (11), (20), (22)
63. (00), (12), (01), (02), (10), (11), (20), (21), (22)
64. (00), (12), (01), (02), (03)
65. (00), (12), (01), (02), (03), (11)
66. (00), (12), (01), (02), (03), (11), (22), (33)
67. (00), (12), (01), (02), (03), (11), (22), (32), (33)
68. (00), (12), (01), (02), (03), (11), (22), (23), (32), (33)

69. (00), (12), (01), (02), (03), (11), (13)
70. (00), (12), (01), (02), (03), (11), (13), (22), (33)
71. (00), (12), (01), (02), (03), (10)
72. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (20), (30)
73. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (20), (21), (30)
74. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11)
75. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (20), (22), (30), (33)
76. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (20), (22), (30), (32), (33)
77. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (20), (21), (22), (30), (33)
78. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (13)
79. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (13), (20), (22), (30), (33)
80. (00), (12), (01), (02), (03), (10), (11), (13), (20), (21), (22), (23), (30), (31), (32), (33)

Список литературы

1. Зубков О. В. О числе унарнопорожденных мультиопераций со стандартно определенным оператором суперпозиции / Зубков О. В. // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 21–26.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
3. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 46–53.
4. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны / Н. А. Перязев // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 2. – С. 120–125.

Зубков Олег Владимирович, кандидат физико-математических наук, Иркутский государственный университет, 6640003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)200567 (e-mail: oleg.zubkov@mail.ru)

O. V. Zubkov

Some Closed Classes Unary Generated Ultra Functions

Abstract. In this paper we study classes unary generated ultra functions. It is shown that the set of unary ultra functions is complete.

When examining all subsets unary ultra functions with the possibility of closure only of superposition received 131 different class. If you allow the possibility of adding exactly one fictitious argument, the class number is reduced to 81 as listed in Annex 1.

It is proved that 68 of the 81 classes are guaranteed to be closed with respect to superposition and adding an arbitrary number of fictitious arguments.

Keywords: multifunction, ultra function, superposition, unary generated ultra functions.

References

1. Zubkov O.V. The number unary generated multi-operations with standard definitions superposition operator [Chislo unarnoporozhdennikh multioperatsiy so standartno opredelennim operatorom superpozitsii] (In Russian). *IIGU Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no 4, pp. 21–26.
2. Pantelev V.I. The criteria of completeness for redefining boolean function [Kriteriy polnoty dlya doopredelyaemikh bulevykh funktsiy] (In Russian). *Vestnik of Samara state university. Naturalistic series*, 2009, no 2 (68), pp. 60–79.
3. Pantelev V.I. The article is about maximum multi and partial ultraclones [O dvukh maksimal'nikh mul'tiklonakh i chastichnikh ul'nrakolnakh] (In Russian). *IIGU Ser. Matematika*, 2012, vol 5, no 4, pp. 46–53.
4. Peryazev N.A. Clones, Co-Clones, Hyperclones and Superclones [Klony, Ko-Klony, Giperklony i Superklony] (In Russian). *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2009, vol. 151, no 2, pp. 120–125.

Zubkov Oleg Vladimirovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx, Irkutsk, 664003. tel.: (3952)200567, (e-mail: oleg.zubkov@mail.ru)