Серия «Математика»
2015. Т. 12. С. 58—71

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК УДК 517.9.

Нормальные формы вырожденных автономных и неавтономных дифференциальных уравнений с максимальной жордановой цепочкой длины два и три *

Б. В. Логинов
Ульяновский государственный технический университет

Ю. Б. Русак
Департамент социального сервиса правительства Австралии

Л. Р. Ким-Тян
Национальный исследовательский технологический университет МИСиС

Аннотация. Стандартная методика построения нормальных форм адаптирована для вырожденных дифференциальных уравнений в случае существования жордановой цепочки максимальной длины и соответственно максимальной равномерной дифференциальной жордановой цепочки. Приведен ряд примеров. Некоторые из приведенных нормальных форм получены в случае неавтономных систем при использовании определяемых в работе дифференциальных жордановых цепочек.

Ключевые слова: вырожденные дифференциальные уравнения, нормальные формы, жордановы цепочки, дифференциальные жордановы цепочки.

Введение. Постановка задачи.

В n-мерных пространствах E_1, E_2 рассматриваются дифференциальные уравнения (ДУ) вида

$$Ax' = F(x, \mu), \qquad F(0, \mu) = 0 \tag{0.1}$$

* Данная работа выполнена в рамках государственного задания 2014/232 Министерства образования и науки России. Тема научно-исследовательской работы «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом и ударных воздействиях» и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

с вырожденным линейным оператором A при производной, подпространство нулей $N(A)$ которого одномерно, $N(A) = \varphi^{(1)}$ и достаточно гладкой нелинейностью

$$Ax' = B(\mu)x + R(x, \mu), \quad \|R(x, \mu)\| = o(\|x\|). \tag{0.2}$$

Известна роль обобщенной жордановой структуры (ОЖС) в задачах теории ветвления [1; 2] и качественной теории ОДУ [3; 4]. Следуя [1], определим B-жорданову цепочку (B-ЖЦ) $\{\varphi^{(k)}\}_1^p$ нуля $\varphi = \varphi^{(1)}$ оператора A соотношениями

$$A\varphi^{(k+1)} = B\varphi^{(k)}, \ \left\langle B\varphi^{(k)}, \psi^{(1)} \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1, p-1}; \left\langle B\varphi^{(p)}, \psi^{(1)} \right\rangle = 1, \tag{0.3}$$

где $\psi^{(1)}$ — базисный элемент подпространства нулей $N(A^*)$. B-ЖЦ оператора A максимальна, если $p = n$.

В монографии [2] рассмотрены теория разрешимости вырожденных линейных и нелинейных дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах с использованием метода Ляпунова – Шмидта.

Целью данной работы является развитие методики построения нормальных форм для вырожденных систем ДУ вида (0.2). Для сокращения объема работы опущены результаты для систем с максимальной ЖЦ длины четыре. Отметим, что уравнение вида (0.2) описывает модели аэроупругости при трансзвуковом обтекании пластин и оболочек потоком газа [6].

1. Нормальные формы для вырожденных автономных дифференциальных уравнений в пространствах размерности 2,3 — непараметрический вариант.

Далее будут рассматриваться вырожденные ДУ

$$Ax' = F(x) \equiv Bx + R(x), \quad F(0) = 0, \quad ||R(x)|| = o(||x||). \tag{1.1}$$

При этом в размерностях 3 и 4 будет существенно использоваться техника работы [7]. Однако для сокращения объема работы результаты для размерности 4 опущены.

A. Максимальная жорданова цепочка длины два.
Пусть $\dim E_1 = 2$ и элементы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ образуют базис E_1. Тогда, применением редукции Ляпунова–Шмидта, уравнение (1.1) приводится к системе:

$$x_2' = x_1 + f(x_1, x_2), \quad 0 = x_2 + g(x_1, x_2), \tag{1.2}$$

где функции f и g удовлетворяют условиям: $f(0,0) = 0$, $g(0,0) = 0$ и $Df(0,0) = 0$, $Dg(0,0) = 0$.

Заменой переменных $y_1 = x_1 + f(x_1, x_2)$, $y_2 = x_2$ система (1.2) приводится к виду

$$y_2' = y_1, \quad 0 = y_2 + h(y_1, y_2) \tag{1.3}$$

Если функция $h(y_1, y_2)$ аналитична и не зависит от y_1, то в некоторой окрестности точки $(0,0)$ $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ будет единственным решением системы (1.3). Если функция $h(y_1, y_2)$ зависит от y_1, то в некоторой окрестности точки $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ по теореме о неявной функции

$$y_2 = G(y_1), \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 0. \tag{1.4}$$

Поэтому она может быть записана в виде: $y_2 = G(y_1) = y_1^2 H(y_1)$. График функции $G(y_1)$ в окрестности $(0,0)$ плоскости y_1, y_2 назовем многообразием решений системы (1.3). Подставив $G(y_1)$ в первое уравнение системы (1.3),

построим векторное поле на многообразии решений

$$(2y_1 H(y_1) + y_1^2 H'(y_1))y_1' = y_1 \tag{1.5}$$

или

$$(2H(y_1) + y_1 H'(y_1))y_1' = 1, \qquad y_1 \neq 0. \tag{1.6}$$

Если $H(0) \neq 0$, то уравнение (1.6) имеет решение $y_1 = f(t)$, $f(0) = 0$. В этом случае для исходного вырожденного уравнения нарушается единственность решений в точке $(0,0)$. Если $H(0) = 0$, то $y_1 = 0$ является особой точкой для векторного поля на многообразии решений.

B. Максимальная жорданова цепочка длины три.

При $\dim E_1 = 3$ уравнение (1.1) редуцируется к системе:

$$x_2' = x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3), \quad x_3' = x_2 + f_2(x_1, x_2, x_3), \quad 0 = x_3 + f_3(x_1, x_2, x_3). \tag{1.7}$$

Замена переменных $y_1 = x_1 + f_1(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ приводит систему (1.7) к виду

$$y_2' = y_1, \quad y_3' = y_2 + g_2(y_1, y_2, y_3), \quad 0 = y_3 + g_3(y_1, y_2, y_3), \tag{1.8}$$

где, как и прежде, $g_2(0,0,0) = 0$, $g_3(0,0,0) = 0$ и $Dg_2(0,0,0) = 0$, $Dg_3(0,0,0) = 0$. Для построения нормальной формы (1.8) определим, какие мономы второй степени функции $g_2(y_1, y_2, y_3)$ могут быть уничтожены подходящей заменой переменных

$$y_1 = z_1 + h_1(z_1, z_2, z_3), \quad y_2 = z_2 + h_2(z_2, z_3), \quad y_3 = z_3 + h_3(z_2, z_3). \tag{1.9}$$

Дифференцируя y_2, y_3 по t, $y_2' = z_2' + \partial h_2/\partial z_2 \cdot z_2' + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z_3'$, $y_3' = z_3' + \partial h_3/\partial z_2 \cdot z_2' + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z_3'$, и обозначая через H вектор-функцию $(h_2, h_3)^T$, запишем

$\begin{pmatrix} y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = (I+DH)\begin{pmatrix} z_2' \\ z_3' \end{pmatrix}$, где $DH = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial z_2} & \frac{\partial h_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial h_3}{\partial z_2} & \frac{\partial h_3}{\partial z_3} \end{pmatrix}$, что даёт $\begin{pmatrix} z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = (I+ +DH)^{-1}\begin{pmatrix} y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = (I+DH)^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2+g_2 \end{pmatrix} = (I+DH)^{-1}\begin{pmatrix} z_1+h_1 \\ z_2+h_2+g_2 \end{pmatrix}$. Так как при малых значениях $Z : (I+DH)^{-1} = (I-DH)+O(||Z||^2)$, то система примет вид:

$$\begin{pmatrix} z_2' \\ z_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1+h_1 \\ z_2+h_2+g_2 \end{pmatrix} - DH\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + o(\|Z\|^2). \tag{1.10}$$

Если мы рассмотрим однородные полиномы второй степени, то из (1.10) получим:

$$\partial h_2/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z_2 - h_1 = 0, \tag{1.11}$$

$$\partial h_3/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(2)}. \tag{1.12}$$

Здесь $g_2^{(2)}$ — полином второй степени из струи функции g_2. Поскольку h_1 произвольный полином второго порядка зависящий от переменных z_1, z_2, z_3, его выбор позволяет всегда удовлетворить уравнение (1.11). Таким образом, остается установить для каких многочленов $g_2^{(2)}$ можно (нельзя) подобрать многочлены h_2, h_3, так чтобы удовлетворялось уравнение (1.12). Многочлены h_2, h_3 являются линейными комбинациями мономов: z_2^2, z_3^2, $z_2 \cdot z_3$, тогда как $g_2^{(2)}$ являются линейной комбинацией мономов: z_2^2, z_3^2, $z_2 \cdot z_3$, z_1^2, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$. Подставляя возможные значения полиномов h_2, h_3 в левую часть (1.12) , находим, что она может принимать следующие значения: $z_1 \cdot z_2$, $z_1 \cdot z_3$, z_2^2, z_3^2, $z_2 \cdot z_3$. Таким образом, только моном z_1^2 не может быть устранен заменой переменных вида (1.9).

Перейдем теперь к устранению мономов третей степени. Повторяя предыдущие рассуждения, получим систему

$$\partial h_2/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_2/\partial z_3 \cdot z_2 - h_1 = 0, \tag{1.13}$$

$$\partial h_3/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(3)}, \tag{1.14}$$

в которой h_1, h_2, h_3 и $g_2^{(3)}$ — полиномы третьего порядка. Как и выше первое уравнение всегда можно удовлетворить подходящим выбором h_1, поэтому рассмотрим второе уравнение. Возможные варианты для h_2, h_3 теперь: z_2^3, z_3^3, $z_2^2 \cdot z_3$, $z_3^2 \cdot z_2$, тогда как для $g_2^{(3)}$ это: z_1^3, z_2^3, z_3^3, $z_2^2 \cdot z_3$, $z_3^2 \cdot z_2$, $z_1^2 \cdot z_3$, $z_1^2 \cdot z_2$, $z_2^2 \cdot z_1$, $z_3^2 \cdot z_1$, $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$. Нетрудно проверить, что мономы z_1^3, $z_1^2 \cdot z_2$, $z_1^2 \cdot z_3$ не уничтожаются при любом выборе h_2 и h_3.

Рассмотрим теперь мономы степени n. Интерес представляет только уравнение

$$\partial h_3/\partial z_2 \cdot z_1 + \partial h_3/\partial z_3 \cdot z_2 - h_2 = g_2^{(n)}, \tag{1.15}$$

в котором h_2, h_3 и $g_2^{(n)}$ — полиномы n-го порядка. Возможные варианты для $g_2^{(n)}$ это: z_1^n, $z_1^{n-1}Q_1(z_2, z_3)$, $z_1^{n-2}Q_2(z_2, z_3), \ldots, z_1 Q_{n-1}(z_2, z_3)$, где $Q_s(z_2, z_3)$ — моном степени s. Остальные варианты можно не рассматривать, так как они уничтожаются выбором h_2. Так как z_1 входит в левую часть уравнения (1.15) в первой степени, то мономы z_1^n, $z_1^{n-1}Q_1(z_2, z_3)$, $z_1^{n-2}Q_2(z_2, z_3), \ldots, z_1^2 Q_{n-2}(z_2, z_3)$ не могут быть уничтожены никаким выбором h_2 и h_3. С другой стороны, мономы $z_1 Q_{n-1}(z_2, z_3)$ уничтожаются с помощью выбора: $h_3 = az_2 Q_{n-1}(z_2, z_3)$, $h_2 = bz_2 z_3 \partial Q_{n-1}/\partial z_3$.

Таким образом, для аналитической функции f система (1.7) приводится к нормальной форме:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2, z_3), \quad 0 = z_3 + f_3(z_1, z_2, z_3) \tag{1.16}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи системы (1.16):

1. Предположим, что функция f_3 зависит только от z_2. Тогда второе уравнение (1.16) превращается в уравнение:

$$z_2 = f_3'(z_2) z_1 - z_1^2 f_4(z_1, z_2) \tag{1.17}$$

(здесь функция f_4 получена из f_2 подстановкой $z_3 = -f_3(z_2)$. По теореме о неявной функции из уравнения (1.17) находим: $z_2 = f_5(z_1)$ и, учитывая третье уравнение системы (1.16), $z_3 = f_6(z_1)$. Эти два уравнения определяют "многообразие решений"(1.16) в окрестности нуля. Векторное поле на этом многообразии получается переносом векторного поля:

$$f_5'(z_1) z_1' = z_1. \tag{1.18}$$

В точке $z_1 = 0$ могут осуществляться особенности двух типов: если $f_5'(z_1) = z_1$ нарушается единственность: существуют решения $z_1 \equiv 0$ и $z_1 = t$. Этот случай осуществляется например для системы (1.16) вида:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2, \quad z_3 = z_2^2. \tag{1.19}$$

Во втором случае, когда $f_5'(z_1)$ имеет 0 выше первого порядка, производная на решении стремится к бесконечности при приближении к $z_1 = 0$.

2. Предположим, что функция f_3 зависит только от z_1. Тогда (1.16) превращается в систему:

$$z_2' = z_1, \quad -f_3'(z_1) z_1' = z_2 + z_1^2 f_4(z_1, z_2), \tag{1.20}$$

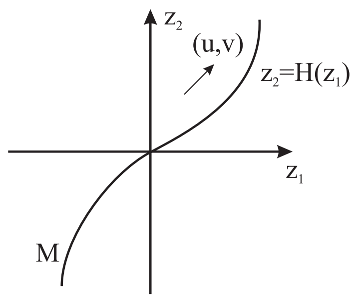
для которой прямая $z_1 = 0$ является линией вырождения (за исключением случая $f_3 \equiv 0$, когда решение существует только в точке $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$). Для любой точки (z_1, z_2) $z_1 \neq 0$ система (1.20) имеет единственное решение выходящее из этой точки. Исследуем поведение такого решения в окрестности оси $z_1 = 0$. Будем предполагать, что

$$-f_3'(z_1) = z_1^k F(z_1), \qquad F(0) > 0,$$

случай $F(0) < 0$ рассматривается аналогично. Уравнение

$$z_2 + z_1^2 f_4(z_1, z_2) = 0$$

в силу теоремы о неявной функции определяет кривую M (график $(z_1, H(z_1))$ неявной функции $z_2 = H(z_1)$, $H(0) = 0$ в окрестности точки $(0,0)$). Векторное поле, задаваемое системой (1.20), можно переписать в виде $(U, V) = (z_2 + +z_1^2 f_4(z_1, z_2)/z_1^k F(z_1), z_1)$. В первом квадранте над кривой M оно будет направлено, как показано на рисунке от оси z_2. В первом и четвертом квадрантах под кривой M оно будет направлено по направлению к оси z_2. Таким образом, верхняя половина оси z_2 отталкивает поток справа, а нижняя половина — его притягивает. Ситуация в левой полуплоскости зависит от четности числа k. Если число k четно, то верхняя полуось притягивает поток слева, а нижняя полуось его отталкивает, а если число k нечетно, то наоборот.



Для исследования поведения решений уравнения

$$z_2' = z_1, \quad z_1^k F(z_1) z_1' = z_2 + z_1^2 G(z_1, z_2) \tag{1.21}$$

в окрестности точки $(0,0)$ можно использовать технику «раздувания» особенности. Сделаем замену: $z_2 = u \cdot z_1$ и перейдем от переменных z_1, z_2 к переменным z_1, $u : u' \cdot z_1 + u \cdot z_1' = z_1$, $z_1^k F(z_1) z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$. Умножим первое уравнение системы на $z_1^k F(z_1)$ и вычтем второе уравнение, умноженное на u. Получим $u' \cdot z_1^{k+1} F(z_1) = z_1^{k+1} F(z_1) - u^2 \cdot z_1 - u \cdot z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$, $z_1' \cdot z_1^k F(z_1) = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$. Эта система имеет тот же фазовый портрет, что и система $u' = z_1^k F(z_1) - u^2 - u \cdot z_1 G(z_1, u \cdot z_1)$,$z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 G(z_1, u \cdot z_1)$, так как они при $z_1 \neq 0$ “делением” сводятся к одному и тому же уравнению первого порядка. Последняя система имеет неэлементарную особенность в точке $(0,0)$ поэтому для ее исследования проведем еще одно «раздувание»: от переменных z_1, u перейдем к переменным z_1, $v : u = v \cdot z_1$, $v' \cdot z_1 + v \cdot z_1' = z_1^k F(z_1) - v^2 \cdot z_1^2 - v \cdot z_1^2 G(z_1, v z_1^2)$, $z_1' = v \cdot z_1^2 + z_1^2 G(z_1, v \cdot z_1^2)$, или $v' \cdot z_1 = z_1^k F(z_1) - 2v^2 \cdot z_1^2 - 2v \cdot z_1^2 G(z_1, v z_1^2)$. Таким образом, система приводится к виду: $v' = z_1^{k-1} F(z_1) - 2v^2 \cdot z_1 - 2v \cdot z_1 G(z_1, v z_1^2)$, $z_1' = v \cdot z_1^2 + z_1^2 G(z_1, v \cdot z_1^2)$, который по приведенным выше соображениям имеет тот же фазовый портрет, что и система:

$$v' = z_1^{k-2}F(z_1) - 2v^2 - 2v \cdot G(z_1, vz_1^2),\ z_1' = v \cdot z_1 + z_1 G(z_1, v \cdot z_1^2).$$

В случае $G(0,0) \neq 0$ эта система имеет невырожденную линейную часть и мы можем применить теорему Гробмана–Хартмана. Заметим, что на прямой $(z_1 = 0, v)$ будут две особые точки $(0,0)$ и $(0, -G(0,0))$ и систему нужно исследовать в окрестности каждой из них. Если $G(0,0) = 0$, то для исследования особенности потребуются дальнейшие «раздувания». Например, если $G(z_1, z_2) = z_1$, то система $v' = z_1^{k-2}F(z_1) - 2v^2 - 2v \cdot z_1$, $z_1' = v \cdot z_1 + z_1^2$ упрощается после перехода к переменным $z_1, w : v = w \cdot z_1, w' \cdot z_1 + w \cdot z_1' = z_1^{k-2}F(z_1) - 2w^2 \cdot z_1^2 - 2w \cdot z_1^2$, $z_1' = w \cdot z_1^2 + z_1^2$, $\Rightarrow w' \cdot z_1 = z_1^{k-2}F(z_1) - 3w^2 \cdot z_1^2 - 3w \cdot z_1^2$. Как и выше система $w' = z_1^{k-3}F(z_1) - 3w^2 \cdot z_1 - 3w \cdot z_1$, $z_1' = w \cdot z_1^2 + z_1^2$ имеет тот же фазовый портрет, что и система $w' = z_1^{k-4}F(z_1) - 3w^2 - 3w$, $z_1' = w \cdot z_1 + z_1$, для которой справедлива теорема Гробмана–Хартмана.

3. Рассмотрим теперь общий случай, когда функция $f_3(z_1, z_2)$ зависит от обеих переменных z_1 и z_2. Здесь через f_3 снова обозначена функция выражающая z_3 через z_1 и z_2 из уравнения (1.16), которая существует в силу теоремы о неявной функции. Система (1.16) перепишется в виде:

$$z_2' = z_1, \quad \partial f_3/\partial z_1 \cdot z_1' = z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1. \qquad (1.22)$$

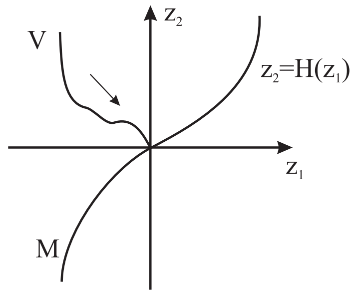
Уравнение $\partial f_3(z_1, z_2)/\partial z_1 = 0$ определяет множество (не обязательно многообразие) вырождения системы (1.22). Однако если точки этого множества являются одновременно нулями правой части второго уравнения (1.22) вырождения может не быть. Это иллюстрирует следующий пример:

$$z_2' = z_1, \quad z_3' = z_2 + z_1^2, \quad z_3 = z_2 \cdot z_1 \qquad (1.23)$$

который имеет решения $z_1 = z_1^0 + t$, $z_2 = z_2^0 + t \cdot z_1^0 + t^2/2$, $z_3 = z_2 \cdot z_1$. При этом в точке $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ нарушается единственность решения, так как помимо указанных уравнению (1.23) удовлетворяет тривиальное решение.

Для каждой ветви $z_2 = V(z_1)$, $V(0) = 0$ (если такие найдутся) решений уравнения $\partial f_3/\partial z_1(z_1, z_2) = 0$ можно провести исследование поведения потока в окрестности этой ветви аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте. Кривая M здесь является графиком неявной функции определяемой уравнением

$$z_2 + z_1^2 f_2(z_1, z_2) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1 = 0.$$



Случай, когда ветвь V лежит на кривой M, требует дополнительного рассмотрения.

Поведение решений системы (1.22) в окрестности точки $(0,0)$ в случае, когда точки (z_1, z_2) не являются решениями уравнения

$$\partial f_3(z_1, z_2)/\partial z_1 = 0,$$

не лежат на кривой M и осях координат, можно, как и выше, исследовать, «раздувая» особенность. Для системы (1.22) сделаем замену координат $z_2 = u \cdot z_1$ и перейдем от переменных z_1, z_2 к переменным z_1, $u : u' \cdot z_1 + u \cdot z_1' = z_1$, $\partial f_3/\partial z_1 \cdot z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$. Умножим первое уравнение системы на $\partial f_3/\partial z_1$ и вычтем второе уравнение, умноженное на u : $u' z_1 \partial f_3/\partial z_1 = z_1 \partial f_3/\partial z_1 - u^2 z_1 - u z_1^2 f_2(z_1, u z_1) + u z_1 \partial f_3/\partial z_2$, или $u' \partial f_3/\partial z_1 = \partial f_3/\partial z_1 - u^2 - -u z_1 f_2(z_1, u z_1) + u \partial f_3/\partial z_2$, $z_1' \partial f_3/\partial z_1 = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$. Как и выше, эта система имеет тот же фазовый портрет, что и система $u' = \partial f_3/\partial z_1 - u^2 - u z_1 f_2(z_1, u z_1) + u \partial f_3/\partial z_2$, $z_1' = u \cdot z_1 + z_1^2 f_2(z_1, u \cdot z_1) - \partial f_3/\partial z_2 \cdot z_1$, которая может быть далее упрощена одним или несколькими «раздуваниями» в зависимости от вида функций f_2 и f_3.

Замечание 1. Исследование случая максимальной ЖЦ длины четыре опускается для сокращения объема статьи. Здесь как и для максимальной ЖЦ длины три используется техника работы [7].

2. Вырожденные неавтономные дифференциальные уравнения.

А. Линейные неавтономные дифференциальные уравнения. Рассматривается достаточно общий частный случай для уравнения

$$Ax' = B(t)x, \quad t \in (a, b), \tag{2.1}$$

в предположении, что A, $B(t) : E_1 \to E_2$, $\dim E_1 = \dim E_2 = n$, A – вырожденный оператор, $\dim N(A) = 1$ и $N(A) = \{\varphi\}$, $N(A^*) = \{\psi\}$, функция $B(t)$ обладает нужной степенью гладкости.

Определение 1. *Элементы $\varphi^{(k)}(t)$ образуют $B(t)$ — дифференциальную жорданову цепочку (ДЖЦ) нуля оператора A, если они удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} &A\varphi^{(k+1)}(t) = B(t)\varphi^{(k)}(t) - A\{\varphi^{(k)}(t)\}', \\ &k = 1, \dots, p(t), \quad \varphi^{(1)} = \varphi \ \ \text{и} \ \ \langle B(t)\varphi^{(p(t))}, \psi\rangle \neq 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

здесь первые $p(t) - 1$ уравнений предполагаются разрешимыми, а последнее неравенство является условием обрыва ДЖЦ.

Замечание 2. Элементы ДЖЦ являются дифференцируемыми функциями.

Определение 2. *$B(t)$-ДЖЦ нуля оператора A : $\varphi^{(1)}(t), ..., \varphi^{(p(t))}(t)$ называется равномерной, если $p(t) = p$.*

Определение 3. *$B(t)$-равномерная ДЖЦ нуля оператора A : $\varphi^{(1)}(t)$, ..., $\varphi^{(p)}(t)$ называется максимальной, если при любом t ее элементы образуют базис пространства E_1 т. е. $p = n$.*

В этом разделе будем считать, что существует максимальная равномерная дифференциальная жорданова цепочка нуля оператора A : $\varphi^{(1)}(t), ..., \varphi^{(n)}(t)$.

Лемма 1. *Существует набор функционалов $\gamma^{(1)}(t), ..., \gamma^{(n)}(t)$, гладко зависящий от t и биортогональный к элементам $\varphi^{(1)}(t), ..., \varphi^{(n)}(t)$.*

Пусть векторы e_1, ..., e_n образуют базис пространства E_1 и u_1, ..., u_n набор биортогональных к нему функционалов. Разложим векторы $\varphi^{(k)}(t)$ по базису e_1, ..., e_n.

$$\begin{aligned} &\varphi^{(1)} = a_{11}e_1 + \cdots + a_{1n}e_n, \\ &\varphi^{(2)}(t) = a_{21}(t)e_1 + \cdots + a_{2n}(t)e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi^{(n)}(t) = a_{n1}(t)e_1 + \cdots + a_{nn}(t)e_n. \end{aligned}$$

В силу формул $a_{ks}(t) = \langle\varphi^{(k)}(t), u_s\rangle$ функции $a_{ks}(t)$ являются дифференцируемыми по t. Определяя функционалы $\gamma^{(s)}(t)$ в виде: $\gamma^{(s)}(t) =$

$b_{s1}(t)u_1 + \dots + +b_{sn}(t)u_n$, получим систему

$$\begin{aligned}
&0 = a_{11}b_{s1}(t) + \dots + a_{1n}b_{sn}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&1 = a_{s1}(t)b_{s1}(t) + \dots + a_{sn}(t)b_{sn}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&0 = a_{n1}(t)b_{s1}(t) + \dots + a_{nn}(t)b_{sn}(t),
\end{aligned}$$

для определения функций $b_{sm}(t)$. Так как $\det[a_{sk}(t)] \neq 0$, $t \in [a, b]$ из формул Крамера следует, что функции $b_{sm}(t)$ дифференцируемы.

Следствие 1. *Если $x(t)$ – решение вырожденного ДУ* (2.1) *и $x(t) = \xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t)$, то функции $\xi_s(t)$ – дифференцируемы. Это следует из формул $\xi_s(t) = \langle x(t), \gamma^{(s)}(t)\rangle$.*

Теорема 1. *Если существует максимальная равномерная ДЖЦ нуля оператора $A : \varphi^{(1)}$, ..., $\varphi^{(n)}(t)$, то вырожденное ДУ* (2.1) *имеет только нулевое решение.*

Пусть $x(t)$ — решение вырожденного ДУ (2.1) и

$$x(t) = \xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t). \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.1) $A(\xi_1'(t)\varphi^{(1)} + \xi_2'(t)\varphi^{(2)} + \xi_2(t)\{\varphi^{(2)}(t)\}' + \dots + \xi_n'(t)\varphi^{(n)} + +\xi_n(t)\{\varphi^{(n)}(t)\}') = B(t)(\xi_1(t)\varphi^{(1)} + \dots + \xi_n(t)\varphi^{(n)}(t))$, перепишем это уравнение в виде: $\xi_2' A\varphi^{(2)} + \xi_3' A\varphi^{(3)} + \xi_4' A\varphi^{(4)} + \dots + \xi_n' A\varphi^{(n)} + \xi_2 A\{\varphi^{(2)}\}' + \xi_3 A\{\varphi^{(3)}\}' + + \dots + \xi_{n-1}A\{\varphi^{(n-1)}\}' + \xi_n A\{\varphi^{(n)}\}' - \xi_1 B(t)\varphi^{(1)} - \xi_2 B(t)\varphi^{(2)} - \xi_3 B(t)\varphi^{(3)} - \dots - -\xi_{n-1}B(t)\varphi^{(n-1)} - \xi_n B(t)\varphi^{(n)} = 0$.

Сравнивая элементы, стоящие в одной колонке по формулам (2.2), получаем:

$$\begin{aligned}
(\xi_2' - \xi_1)A\varphi^{(2)} &+ (\xi_3' - \xi_2) + A\varphi^{(3)} + \dots +\\
&+ (\xi_n' - \xi_{n-1})A\varphi^{(n)} + \xi_n A\{\varphi^{(n)}\}' - \xi_n B(t)\varphi^{(n)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Применяя к равенству (2.30) функционал ψ, находим, что $\xi_n(t) \equiv 0$. Тогда

$$(\xi_2' - \xi_1)A\varphi^{(2)} + (\xi_3' - \xi_2)A\varphi^{(3)} + \dots + (\xi_n' - \xi_{n-1})A\varphi^{(n)} = 0,$$

и так как элементы $A\varphi^{(2)}(t), \dots, A\varphi^{(n)}(t)$ линейно независимы, то

$$\xi_2' - \xi_1 = 0, \xi_3' - \xi_2 = 0, \dots, \xi_n' - \xi_{n-1} = 0.$$

Отсюда следует $\xi_{n-1}(t) \equiv 0, \dots, \xi_2(t) \equiv 0$, $\xi_1(t) \equiv 0$ или $x(t) \equiv 0$.

B. Нелинейные неавтономные дифференциальные уравнения.

В условиях существования максимальной ДЖЦ нуля оператора A рассматривается нелинейное уравнение

$$Ax' = B(t)x + R(x,t), \quad t \in (a,b); \quad ||R(x,t)|| = o(||x||). \tag{2.31}$$

Повторяя выполненные ранее преобразования к уравнению (2.31), придем вместо уравнения (2.30) к уравнению

$$(\xi_2' - \xi_1)A\varphi^{(2)} + (\xi_3' - \xi_2)A\varphi^{(3)} + \cdots + (\xi_n' - \xi_{n-1})A\varphi^{(n)} + \\ + \xi_n A\{\varphi^{(n)}\}' - \xi_n B(t)\varphi^{(n)} - R(\xi_1\varphi^{(1)} + \cdots + \xi_n\varphi^{(n)}, t) = 0. \tag{2.32}$$

Векторы $A\varphi^{(2)}(t), \ldots, A\varphi^{(n)}(t)$ линейно независимы для любого t и образуют базис пространства $\operatorname{Im} A$, а вместе с вектором $B(t)\varphi^{(n)}(t)$ – базис пространства E_2. Они также гладко зависят от параметра t. Подобно лемме 1, можно построить биортогональную к ним систему функционалов $\psi^{(k)}(t)$ гладко зависящих от t.

$$\langle A\varphi^{(k)}(t), \psi^{(1)}(t)\rangle = 0, \quad \langle B(t)\varphi^{(n)}(t), \psi^{(1)}(t)\rangle = 1, \tag{2.33}$$

$\langle A\varphi^{(k)}(t), \psi^{(n+2-s)}(t)\rangle = \delta_{ks}, s = 2, n$; $\langle B(t)\varphi^{(n)}(t), \psi^{(1+i)}(t)\rangle = 0$, $i = 1, ..., n-1$. Применяя функционал $\psi^{(1)}(t)$ к равенству (2.32), получаем

$$\xi_n = \langle R(\xi_1\varphi^{(1)} + \cdots + \xi_n\varphi^{(n)}, t), \psi^{(1)}(t)\rangle,$$

отсюда, по теореме о неявной функции находим $\xi_n = F_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$, где $F_n(0, \ldots, 0, t) = 0$ и $D_\xi F_n(0, \ldots, 0, t) = 0$. Применяя к (2.32) функционал $\psi^{(2)}(t)$ ($s = n$, $i = 1$ в (43)), получаем

$$\xi_n' - \xi_{n-1} = -\xi_n \langle B\{\varphi^{(n)}\}', \psi^{(2)}(t)\rangle + \langle R(\xi_1\varphi^{(1)} + \cdots + \xi_n\varphi^{(n)}, t), \psi^{(2)}(t)\rangle$$

или $\xi_n' = \xi_{n-1} + F_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t)$, причем как и выше

$$F_{n-1}(0, \ldots, 0, t) = 0 \textbf{ и } D_\xi F_{n-1}(0, \ldots, 0, t) = 0,$$

и т. д. Наконец, применение функционала $\psi^{(n)}(t)$ дает

$$\xi_2' = \xi_1 + F_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t),$$

где $F_1(0, \ldots, 0, t) = 0$ и $D_\xi F_1(0, \ldots, 0, t) = 0$.

Таким образом, в случае существования максимальной равномерной ДЖЦ нуля оператора A вырожденное ДУ (2.31) сводится к системе

$$\begin{array}{ll} \xi_2' = \xi_1 + F_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t), & F_i(0, \ldots, 0, t) = 0, \\ \cdots & D_\xi F_i(0, \ldots, 0, t) = 0, \\ \xi_n' = \xi_{n-1} + F_{n-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t), & \xi_n = F_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, t) \end{array} \tag{2.34}$$

т. е. к дифференциальному уравнению разветвления в корневых подпространствах.

C. Неавтономные вырожденные дифференциальные уравнения с максимальной равномерной ЖЦ длины 2.

В этом разделе рассматриваются вырожденные ДУ вида:

$$Ax' = B(t)x + R(x,t), \quad t \in (a,b); \quad ||R(x,t)|| = o(||x||). \tag{2.35}$$

Как и прежде, операторы B, A и R действуют из пространства E_1 в пространство E_2, $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$ и элементы $B(t)$-ЖЦ $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ нуля оператора A образуют базис E_1. Функция R достаточно гладкая и $R(0,t) \equiv 0$, $R_x(0,t) \equiv 0$. Тогда, согласно (2.34), уравнение (2.35) приводится к системе

$$x_2' = x_1 + f(x_1,t), \;\; 0 = x_2 + g(x_1,t), \tag{2.36}$$

где функции f и g удовлетворяют условиям $f(0,t) = g(0,t) = 0$ и $Df(0,t) = Dg(0,t) = 0$.

Замена переменных $y_1 = x_1 + f(x_1,t)$, $y_2 = x_2$, приводит систему (2.36) к виду:

$$y_2' = y_1, \; 0 = y_2 + h(y_1,t), \; h(0,t) = 0 \tag{2.37}$$

Если функция $h(y_1,t)$ не зависит от y_1, то в некоторой окрестности точки $t=0$, $y_2 = Y(t)$ и $y_1 = Y'(t)$. Если $Y(t) \neq 0$, то это не единственное решение системы (2.36) при условиях $y_1(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$, — другим будет $y_1(t) \equiv 0$ и $y_2(t) \equiv 0$.

Если функция $h(y_1,t)$ зависит от y_1, то $y_2 = -h(y_1,t)$ и, так как $h(0,t) = 0$ и $D_y h(0,t) = 0$, она записывается как: $h(y_1,t) = -y_1^2 H(y_1,t)$. Подставляя выражение для y_2 в первое уравнение системы (2.37), находим

$$\begin{aligned}&\{2y_1 H(y_1,t) + y_1^2 \partial H(y_1,t)/\partial y_1\} y_1' = y_1 - y_1^2 \partial H(y_1,t)/\partial t \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \{2H(y_1,t) + y_1 \partial H(y_1,t)/\partial y_1\} y_1' = 1 - y_1 \partial H(y_1,t)/\partial t. \end{aligned}\tag{2.48}$$

Если $H(0,0) \neq 0$, то уравнение (2.48) имеет решение $y_1 = f(t)$ такое что $f(0) = 0$. Тогда для исходного вырожденного уравнения нарушается единственность решений в точке $(0,0)$. Если $H(0,0) = 0$, то $y_1 = 0$ является особой точкой для уравнения (2.48).

Замечание 3. При использовании понятия максимальной дифференциальной жордановой цепочки проведены исследования неавтономного ДУ для случаев максимальных цепочек длин 3 и 4, аналогичные изложенным в пункте 3 в настоящей работы. Эти результаты мало отличаются от там приведенных, но технически гораздо более громоздкие, ввиду того что, привлекая технику работы [7], приходится рассматривать не векторные пространства, а модули над кольцом гладких функций переменной t (полиномы с коэффициентами гладко зависящими от t). Поэтому исследование неавтономного ДУ с максимальными ДЖЦ длин три и четыре опущено для сокращения объема статьи.

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969.
2. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Dortrecht, Kluwer Academic Publ., 2002. – 548 p.
3. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 1999.
4. Ван Д. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005.
5. Логинов Б. В. Нормальные формы вырожденных автономных дифференциальных уравнений с максимальной жордановой цепочкой и простейшие приложения // Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак, Л. Р. Ким-Тян // Вестн. Юж.-Урал. ун-та.
6. Marszalek W. Fold points and singularity induced bifurcation in inviscid transonic flow / W. Marszalek // Physics Letters A. – 2012. – Vol. 376, issues 28-29. – P. 2032-2037. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.003
7. A simple global characterization for normal forms of singular vector fields / C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coullet, G. Iooss // Physica 29D. – North-Holland, Amsterdam, 1987. – P. 95–127.

Борис Владимирович Логинов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «высшей математики», Ульяновский государственный технический университет, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, (e-mail: `bvllbv@yandex.ru`)

Юрий Борисович Русак, кандидат физико-математических наук, доцент, Департамент социального сервиса правительства Австралии, Австралия, г. Канберра, (e-mail: `irousak@gmail.com`)

Луиза Ревмировна Ким-Тян, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математики», Национальный исследовательский технологический университет МИСиС, 119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4, (e-mail: `kim-tyan@yandex.ru`)

B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, L. R. Kim-Tyan

Normal Forms of the Degenerate Differential Autonomous and Non Autonomous Equations with the Maximal Jordan Chain of Length Two and Three

Известия Иркутского государственного университета.
2015. Т. 12. Серия «Математика». С. 58–71

Abstract. Standard methods of normal form construction are adapted for degenerate differential equations in the case of the existence of maximal length Jordan chain. For n=2 and 3 examples are considered. Some of indicated normal forms are obtained for non autonomous systems at the usage of determined in the article differential Jordan chains.

Keywords: degenerate differential equations, normal forms, Jordan chains, differential Jordan chains.

References

1. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of branching of solutions of non-linear equations. Noordhoof International Publishing, Leyden, 1974.
2. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dortrecht, Kluwer Academic Publ., 2002. 548 p.
3. Arnold V.I. *Geometricheskie metody v teoriy obiknovennykh differentsialnykh uravneniy* [Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, 1999.
4. Shui-Nee Chow, Chengzhi Li, Duo Wang. Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields. Cambridge University Press, 1994. 484 p.
5. Loginov B.V., Rousak Yu.B., Kim-Tyan L.R. Normal forms of the degenerate autonomous differential equations with the maximal Jordan chain and simple applications. *Bulletin of South-Ural University, Series Mathematics*, 2015, no 4.
6. Marszalek W. Fold Points and Singularity Induced Bifurcation in Inviscid Transonic Flow. *Physics Letters A.*, 2012, vol. 376, issues 28-29, pp. 2032–2037, http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2012.05.003
7. Elphick C., Tirapegui E., Brachet M.E., Coullet P., Iooss G. A Simple Global Characterization for Normal Forms of Singular Vector Fields. *Physica 29D*, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 95–127,

Boris Vladimirovich Loginov, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Ulyanovsk State Technical University, 32, Severny Venetz st., Ulyanovsk, 432027, (e-mail: `bvllbv@yandex.ru`)

Yuriy Borisovich Rousak, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Department of Families, Housing, Community Services and Indigenous Affairs, Government of Australia, Canberra, Australia
(e-mail: `irousak@gmail.com`)

Luisa Revmirovna Kim-Tyan, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), National University of Science and Technology (MISIS), Moscow, 4, Leninskii pr., 119049, (e-mail: `kim-tyan@yandex.ru`)