Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 71—88

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.517
MSC 49K20

Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом

А. Керимбеков, Р. Ж. Наметкулова, А. К. Кадиримбетова
Кыргызско-Российский Славянский университет

Аннотация. Рассматривается задача оптимального распределенного и граничного управления тепловым процессом, описываемым интегро-дифференциальным уравнением типа Фредгольма. Исследована однозначная разрешимость системы нелинейных интегральных уравнений оптимальных управлений. Найдены достаточные условия существования и единственности ее решения и задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения приближенных решений и доказаны их сходимость по оптимальному управлению, оптимальному процессу и функционалу, отмечено, что следует различать три вида приближений оптимального процесса.

Ключевые слова: функционал, принцип максимума, оптимальное управление, система нелинейных интегральных уравнений, приближенное решение, сходимость.

В данной статье согласно методике работы [3] исследована однозначная разрешимость системы нелинейных интегральных уравнений, полученных относительно распределенного и граничного управлений. Для задачи оптимизации найдены достаточные условия однозначной разрешимости и указан алгоритм построения решения задачи нелинейной оптимизации со сколь угодной точностью в виде тройки

$$\Big(\big(u^0(t),\vartheta^0(t)\big),\nu^0(t,x),I\big[u^0(t),\vartheta^0(t)\big]\Big),$$

где $u^0(t)$ и $\vartheta^0(t)$ — оптимальные управления, $\nu^0(t,x)$ — оптимальный процесс, $I\big[u^0(t),\vartheta^0(t)\big]$ – минимальное значение функционала. При построении приближений оптимального процесса отмечено, что следует различать три вида приближений, т. е. приближение по резольвенте, приближение, соответствующее приближенному оптимальному управлению, и приближение, определяемое конечной суммой, которое используется на практике.

1. Задача оптимального управления

В этой статье изложены результаты, которые являются продолжением работы [1]. Поэтому, сохраняя обозначения работы [1], рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать функционал

$$I(u,\vartheta)=\int_0^1 \left[\nu(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$
$$+\beta\int_0^T \left\{\int_0^1 q^2[t,x,u(t,x)]dx+\theta^2[t,\vartheta(t)]\right\}dt, \tag{1.1}$$
$$\beta>0, 0<x<1, 0<t\leq T,$$

на множестве решений краевой задачи

$$\nu_t=\nu_{xx}+\mu\int_0^T K(t,\tau)\nu(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)], \tag{1.2}$$

$$\nu(0,x)=\psi(x), 0<x<1, \tag{1.3}$$

$$\nu_x(t,0)=0, \nu_x(t,1)+\alpha\nu(t,1)=p[t,\vartheta(t)], (0<t\leq T), \tag{1.4}$$

где $K(t,\tau)$ — заданная функция, она определена в области $D=\{0\leq t\leq T, 0\leq\tau\leq T\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{1.5}$$

т.е. $K(t,\tau)\in H(D); \xi(x),\psi(x)\in H(0,1)$ — заданные функции; $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q), p[t,\vartheta(t)]\in H(0,T)$ – функции внешних источников, которые нелинейно зависят от функции управления $u(t,x)\in H(Q)$ и $\vartheta(t)\in H(0,T)$, причем имеют место соотношения

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0, p_\vartheta[t,\vartheta(t)]\neq 0,\ t\in(0,T),\ x\in(0,1), \tag{1.6}$$

известные функции $q[t,x,u(t,x)]\in H(Q)$ и $\theta[t,\vartheta(t)]\in H(0,T)$ – выпуклы по функциональным переменным $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$, соответсвенно, μ — параметр, постоянная $\alpha>0$, T — фиксированный момент времени, $Q=\{0<x<1; 0<t<T\}$, $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Как показано в работе [1], компоненты оптимального векторного управления $\{u(t,x),\vartheta(t)\}$ удовлетворяют системе нелинейных интегра-

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 16. Серия «Математика». С. 71–88

льных уравнений вида

$$\beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n(T,t,\mu)l_n-$$

$$-\int_0^T E_n(T,t,\mu)\varepsilon_n(T,\tau,\mu)[f_n(\tau,u)+z_n(1)p(\tau,\vartheta(\tau))]d\tau)z_n(x),$$

$$\beta\frac{\theta(t,\vartheta(t))\theta_\vartheta(t,\vartheta(t))}{p_\vartheta(t,\vartheta(t))}=\sum_{n=1}^{\infty}(E_n(T,t,\mu)l_n-\int_0^T E_n(T,t,\mu)\varepsilon_n(T,\tau,\mu)\times$$

$$\times[f_n(\tau,u)+z_n(1)p(\tau,\vartheta(\tau))]d\tau)z_n(1), \tag{1.7}$$

где $z_n(x), n=1,2,3,\ldots,$ — ортонормированная система функций, определенных в $H(0,1)$(см. [1]),

$$E_n(T,t,\mu)=e^{-\lambda_n^2(T-t)}+\mu\int_0^T\widetilde{R}_n(s,t,\mu)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds, \tag{1.8}$$

$$\varepsilon_n(T,\tau,\mu)=e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}+\mu\int_0^T R_n(T,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, \tag{1.9}$$

$$l_n=\xi_n-\psi_n[e^{-\lambda_n^2T}+\mu\int_0^T R_n(T,s,\mu)e^{-\lambda_n^2s}ds], \tag{1.10}$$

где $R_n(t,s,\mu)$ и $\widetilde{R}_n(s,t,\mu)$ — резольвенты, которые возникают при построении решений основной и сопряженной краевых задач, и дополнительным условиям

$$\begin{gathered} p_\vartheta\left(t,\vartheta(t)\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Big(\frac{\theta(t,\vartheta(t))\theta_\vartheta(t,\vartheta(t))}{p_\vartheta\left(t,\vartheta(t)\right)}\Big)>0,\\ f_u\left(t,x,u(t,x)\right)\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u\left(t,x,u(t,x)\right)}\Big)>0. \end{gathered} \tag{1.11}$$

Система нелинейных интегральных уравнений (1.7) решается согласно методике [3]. Положим

$$\begin{gathered} \beta\frac{q(t,x,u(t,x))q_u(t,x,u(t,x))}{f_u(t,x,u(t,x))}=b_1(t,x),\\ \beta\frac{\theta(t,\vartheta(t))\theta_\vartheta(t,\vartheta(t))}{p_\vartheta(t,\vartheta(t))}=b_2(t), \end{gathered} \tag{1.12}$$

где

$$b_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)\{l_n-$$
$$-\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\mu)\Big[\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1(\tau,y,b_1(\tau,y),\beta))z_n(y)dy+$$
$$+z_n(1)p[\tau,\varphi_2(\tau,b_2(\tau),\beta)]\Big]d\tau\}z_n(x),$$

$$b_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)\{l_n-$$
$$-\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\mu)\Big[\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1(\tau,y,b_1(\tau,y),\beta))z_n(y)dy+$$
$$+z_n(1)p[\tau,\varphi_2(\tau,b_2(\tau),\beta)]\Big]d\tau\}z_n(1).$$

В силу условия монотонности функций $f[t,x,u(t,x)]$ и $p[t,\vartheta(t)]$ по функциональным переменным из (1.12) функции $u(t,x)$ и $\vartheta(t)$ определяются однозначно, т. е. существуют функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$, такие что

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\varphi_1(t,x,b_1(t,x),\beta),\\ \vartheta(t)&=\varphi_2(t,b_2(t),\beta).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Введем обозначения

$$B[b_1(t,x),b_2(t)]=(b_1(t,x),b_2(t)),\ \ L[l_1(t,x),l_2(t)]=(l_1(t,x),l_2(t)),$$
$$\chi[B(b_1(t,x),b_2(t))]=(\chi_1[B(b_1(t,x),b_2(t))],\chi_2[B(b_1(t,x),b_2(t))]),$$

где $l_1(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)l_nz_n(x),\quad l_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)l_nz_n(1),$

$$\chi_1[B(b_1(t,x),b_2(t))]=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\mu)\times$$
$$\times\{\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1[\tau,y,b_1(\tau,y),\beta])z_n(y)dy+z_n(1)p(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta])\}d\tau z_n(x),$$
$$\chi_2[B(b_1(t,x),b_2(t))]=\sum_{n=1}^{\infty}E_n(T,t,\mu)\int_0^T\varepsilon_n(T,\tau,\mu)\times$$
$$\times\{\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1[\tau,y,b_1(\tau,y),\beta])z_n(y)dy+z_n(1)p(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta])\}d\tau z_n(1).$$

С учетом этих обозначений систему нелинейных интегральных уравнений (1.7) представим в операторной форме

$$B[b_1(t,x),b_2(t)]=L[l_1(t,x),l_2(t)]-\chi[B(b_1(t,x),b_2(t))].\tag{1.14}$$

Лемма 1. *Вектор функция* $L[l_1(t,x), l_2(t)]$ *является элементом пространства* $H(Q) \times H(0,T)$.

Доказательство. При вычислении будем пользоваться интегральным неравенством Коши – Буняковского и следующими соотношениями

$$\int_0^1 z_n^2(x)dx = 1, \int_0^T \widetilde{R}_n^2(s,t,\mu)ds \le \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2},$$
$$\int_0^T R_n^2(T,s,\mu)ds \le \frac{K_0}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2},$$
$$(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}.$$

Эти соотношения в дальнейшем будут использованы неоднократно. Непосредственными вычислениями имеем следующие неравенства

$$1) \int_0^T \int_0^1 l_1^2(t,x)dxdt = \int_0^T \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} E_n(T,t,\mu) l_n z_n(x))^2 dxdt =$$
$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2(T,t,\mu) l_n^2 dt \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\lambda_n^2(T-t)} +$$
$$+\mu \int_0^T \widetilde{R}_n(s,t,\mu) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds)^2 l_n^2 dt \le 2\sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-t)} dt +$$
$$+\mu^2 \int_0^T \int_0^T \widetilde{R}_n^2(s,t,\mu)ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(T-s)} dsdt) l_n^2 \le$$
$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2}) l_n^2 \le (1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2}) \times$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} (\xi_n - \psi_n [e^{-\lambda_n^2 T} + \mu \int_0^T R_n(T,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds])^2 \le$$
$$\le (1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n^2} (\xi_n^2 + 2\psi_n^2 [e^{-2\lambda_n^2 T} +$$
$$+\mu^2 \int_0^T R_n^2(T,s,\mu)ds \int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s} ds]) \le 2(1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2}) \times$$
$$\times \Big(\|\xi(x)\|^2_{H(0,1)} + 2\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} (1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\mu|\sqrt{K_0T})^2}) \Big) (\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6}) < \infty.$$

2) Используя неравенство Коши – Буняковского для суммы, оценку $z_n^2(x) \le 2$, для любого $x \in [0,1]$, и результат проведенных выше вычис-

лений имеем неравенство

$$\int_0^T l_2^2(t)dt = \int_0^T (\sum_{n=1}^{\infty} E_n(T,t,\mu) l_n z_n(1))^2 dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(1) E_n^2(T,t,\mu) \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 dt \leq 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\lambda_n^2(T-t)} +$$

$$+\mu \int_0^T \widetilde{R}_n(s,t,\mu) e^{-\lambda_n^2(T-s)} ds)^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})2\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n^2+\psi_n^2[e^{-\lambda_n^2 T}+$$

$$+\mu \int_0^T R_n(T,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds])^2 \leq 4(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})\times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^2 + 2\psi_n^2[1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2}]) \leq$$

$$\leq 4(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})(\|\xi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+2[1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2}]\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}) < \infty.$$

Учитывая эти неравенства и согласно соотношению

$$\|L[l_1(t,x), l_2(t)]\|^2_{H(Q)\times H(0,T)} = \int_0^T \int_0^1 l_1^2(t,x)dxdt + \int_0^T l_2^2(t)dt,$$

получим утверждение леммы. □

Лемма 2. *Оператор $\chi[\cdot]$ переводит пространство $H(Q) \times H(0,T)$ в себя.*

Доказательство. Учитывая (1.9) и соотношения, использованные при доказательстве леммы 1, непосредственными вычислениями имеем следующие неравенства

$$1) \int_0^T \int_0^1 \chi_1^2[B(b_1(t,x), b_2(t))]dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_0^1 (\sum_{n=1}^{\infty} E_n(T,t,\mu) \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\mu)\{\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1[\tau,y,b_1(\tau,y),\beta])\times$$

$$\times z_n(y)dy + z_n(1)p(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta])\}d\tau z_n(x))^2 dxdt \leq$$

$$\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2(T,t,\mu) \int_0^T \varepsilon_n^2(T,\tau,\mu)d\tau\times$$

$$\times 2\int_0^T [(\int_0^1 f(\tau,y,\varphi_1[\tau,y,b_1(\tau,y),\beta])z_n(y)dy)^2+$$

$$+(z_n(1)p(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta]))^2]d\tau dt \leq 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} E_n^2(T,t,\mu)dt\times$$

$$\times \int_0^T \varepsilon_n^2(T,\tau,\mu)d\tau\{\int_0^T \int_0^1 f^2(\tau,y,\varphi_1[\tau,y,b_1(\tau,y),\beta])dyd\tau\times$$

$$\times \int_0^1 z_n^2(y)dy + 2\int_0^T p^2(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta])d\tau\} \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})2\int_0^T (e^{-2\lambda_n^2(T-\tau)}+$$

$$+\mu^2\int_0^T R_n^2(T,s,\mu)ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s}ds)d\tau(\|f(t,y,\varphi_1[t,y,b_1(t,y),\beta])\|^2_{H(Q)}+$$

$$+2\|p(t,\varphi_2[t,b_2(t),\beta])\|^2_{H(0,T)}) \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})\frac{1}{\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})\times$$

$$\times(\|f(t,y,\varphi_1[t,y,b_1(t,y),\beta])\|^2_{H(Q)}+2\|p(t,\varphi_2[t,b_2(t),\beta])\|^2_{H(0,T)}) \leq$$

$$\leq 2(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})^2(\|f(t,y,\varphi_1[t,y,b_1(t,y),\beta])\|^2_{H(Q)}+$$

$$+2\|p(t,\varphi_2[t,b_2(t),\beta])\|^2_{H(0,T)})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4} \leq 2(1+\frac{\mu^2 K_0 T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T})^2})^2\times$$

$$\times(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3})(\|f(t,y,\varphi_1[t,y,b_1(t,y),\beta])\|^2_{H(Q)}+$$

$$+2\|p(t,\varphi_2[t,b_2(t),\beta])\|^2_{H(0,T)}) < \infty,$$

$$2)\ \int_0^T \chi_2^2[B(b_1(t,x),b_2(t))]dt = \int_0^T (\sum_{n=1}^{\infty} z_n(1)E_n(T,t,\mu)\times$$

$$\times \int_0^T \varepsilon_n(T,\tau,\mu)\{\int_0^1 f(t,y,\varphi_1(t,y,b_1[t,y],\beta))z_n(y)dy+$$

$$+z_n(1)p(\tau,b_2(\tau),\beta)\}d\tau)^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2(1)E_n^2(T,t,\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n^2(T,\tau,\mu)d\tau\times$$

$$\times 2\int_0^T (\int_0^1 (f^2(t,y,\varphi_1(t,y,b_1[t,y],\beta))z_n(y)dy)^2+$$

$$+z_n^2(1)p^2(\tau,\varphi_2[\tau,b_2(\tau),\beta]))d\tau dt \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T})^2})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}(1+\frac{\mu^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T})^2})\times$$
$$\times\{\|f[t,y,\varphi_1(t,y,b_1[t,y],\beta)]\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\varphi(t,b_2(t),\beta)]\|^2_{H(0,T)}\}\leq$$
$$\leq 4(1+\frac{\mu^2K_0T}{(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0T})^2})^2(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2})^2\{\|f(t,y,\varphi_1(t,y,b_1[t,y],\beta))\|^2_{H(Q)}+$$
$$+2\|p(\tau,b_2(\tau),\beta)\|^2_{H(0,T)}\}<\infty.$$

Учитывая эти неравенства и соотношение

$$\|\chi[B(b_1(t,x),b_2(t))]\|^2_{H(Q)\times H(0,T)}=\|\chi_1[B(b_1(t,x),b_2(t))]\|^2_{H(Q)}+$$
$$+\|\chi_2[B(b_1(t,x),b_2(t))]\|^2_{H(0,T)},$$

получим утверждение леммы. □

Лемма 3. *Пусть функции* $f[t,x,u(t,x)], p[t,\vartheta(t)], \varphi_1[t,x,b_1(t,x),\beta]$, $\varphi_2[t,b_2(t),\beta]$ *удовлетворяют условиям Липшица, т. е. имеют место неравенства*

$$\|f(t,x,\varphi_1[t,x,b_1(t,x),\beta])-f(t,x,\varphi_1[t,x,\bar b_1(t,x),\beta])\|^2_{H(Q)}\leq$$
$$\leq f_0^2\|\varphi_1[t,x,b_1(t,x),\beta]-\varphi_1[t,x,\bar b_1(t,x),\beta]\|^2_{H(Q)}\leq$$
$$\leq f_0^2\varphi_{01}^2(\beta)\|b_1(t,x)-\bar b_1(t,x)\|^2_{H(Q)}, f_0>0, \varphi_{01}(\beta)>0,$$

$$\|p[t,\varphi_2(t,b_2(t),\beta)]-p[t,\varphi_2(t,\bar b_2(t),\beta)]\|^2_{H(0,T)}\leq$$
$$\leq p_0^2\|\varphi_2(t,b_2(t),\beta)-\varphi_2(t,\bar b_2(t),\beta)\|^2_{H(0,T)})\leq$$
$$\leq p_0^2\varphi_{02}^2(\beta)\|b_2(t)-\bar b_2(t)\|^2_{H(0,T)}, p_0>0, \varphi_{02}(\beta)>0.$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=\left(1+\frac{\mu^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\times$$
$$\times M_0(\beta)\left(2\left[\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right]+4\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}<1,$$

где

$$M_0^2(\beta)=f_0^2\varphi_{01}^2(\beta)+2p_0^2\varphi_{02}^2(\beta),$$

$\chi[\cdot]$ *является сжимающим оператором.*

Доказательство. Проводя аналогичные вычисления, как в доказательстве леммы 2, имеем неравенство

$$\|\chi[B(b_1(t,x),b_2(t))]-\chi[B(\bar{b}_1(t,x),\bar{b}_2(t))]\|^2_{H(Q)\times H(0,T)}\leq$$
$$\leq\gamma^2\left\{\left\|b_1\,(t,x)-\bar{b}_1(t,x)\right\|^2_{H(Q)}+\left\|b_2\,(t)-\bar{b}_2(t)\right\|^2_{H(0,T)}\right\}=$$
$$=\gamma^2\left\|B(b_1(t,x),b_2(t))-B(\bar{b}_1(t,x),\bar{b}_2(t))\right\|^2_{H(Q)\times H(0,T)},$$

из которого следует утверждение леммы. □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1.6), лемм 1–3 и пара* (f,p) *удовлетворяет условию (1.11). Тогда при выполнении условия* $\gamma<1$ *операторное уравнение (1.14) имеет единственное решение в пространстве* $H(Q)\times H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из известной теоремы функционального анализа о принципе сжимающих отображений [2]. □

Решение операторного уравнения определяется методом последовательных приближений

$$B_n\left[b_{1n}(t,x),b_{2n}(t)\right]=L\left[b_1(t,x),b_2(t)\right]-\chi\left[B(b_{1n-1}(t,x),b_{2n-1}(t))\right],$$

где $n=1,2,3\ldots$, вектор-функция $(b_{10}(t,x),b_{20}(t))$ является произвольной. Точное решение операторного уравнения $\left(b_1^0(t,x),b_2^0(t)\right)$ определяется соотношением

$$\left(b_1^0(t,x),b_2^0(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(b_{1n}(t,x),b_{2n}(t)\right)$$

и имеет место оценка

$$\left\|B\left[b_1^0(t,x),b_2^0(t)\right]-B\left[b_{1n}(t,x),b_{2n}(t)\right]\right\|_{H(Q)\times H(0,T)}\leq$$
$$\leq\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|L\left[b_{10}(t,x),b_{20}(t)\right]-\chi\left[b_{10}(t,x),b_{20}(t)\right]-$$
$$-B\left[b_{10}(t,x),b_{20}(t)\right]\|_{H(Q)\times H(0,T)}. \qquad (1.15)$$

Далее решение операторного уравнения $\left(b_1^0(t,x),b_2^0(t)\right)$ подставляя в (1.13), находим компоненты векторного оптимального управления

$$\begin{cases} u^0(t,x)=\varphi_1[t,x,b_1^0(t,x),\beta], \\ \vartheta^0(t)=\varphi_2[t,b_2^0(t),\beta]. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Имея оптимальное распределенное и граничное управления находим оптимальный процесс

$$\nu^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t}+\mu\int_0^T R_n(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2 s}ds\right]+\right.$$
$$\left.+\int_0^T\varepsilon_n(t,\tau,\mu)\left[\int_0^1 f(\tau,y,u^0(\tau,y))z_n(y)dy+z_n(1)p(\tau,\vartheta^0(\tau))\right]d\tau\right\}z_n(x). \tag{1.17}$$

После этого минимальное значение функционала вычислим по формуле

$$I(u^0,\vartheta^0)=\int_0^1\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$
$$+\beta\int_0^T\left\{\int_0^1 q^2\big(t,x,u^0(t,x)\big)dx+\theta^2\big(t,\vartheta^0(t)\big)\right\}dt. \tag{1.18}$$

Найденная тройка $\Big(\big(u^0(t,x),\vartheta^0(t)\big),\nu^0(t,x),I^0[u^0(t,x),\vartheta^0(t)]\Big)$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

2. Приближенные решения задачи оптимизации и их сходимость

Поскольку оптимальный процесс и минимальное значение функционала определяются как сумма бесконечного ряда, то пользоваться ими на практике почти невозможно. Поэтому разрабатывают алгоритм построения приближенных решений и доказывают их сходимость.

I. Приближения оптимальных управлений и их сходимость

Приближенное решение операторного уравнения (1.14), подставляя в (1.13), получим n-е приближение оптимальных управлений, т. е.

$$\begin{cases} u_n(t,x)=\varphi_1(t,x,b_{1n}(t,x),\beta),\\ \vartheta_n(t)=\varphi_2(t,b_{2n}(t),\beta). \end{cases} \tag{2.1}$$

Поскольку

$$\|u^0(t,x)-u_n(t,x)\|^2_{H(Q)}=\|\varphi_1\big(t,x,b_1^0(t,x),\beta\big)-$$
$$-\varphi_1\big(t,x,b_{1n}(t,x),\beta\big)\|^2_{H(Q)}\le\varphi_{10}^2(\beta)\|b_1^0(t,x)-$$
$$-b_{1n}(t,x)\|^2_{H(Q)},$$

$$\|\vartheta^0(t)-\vartheta_n(t)\|^2_{H(0,T)}=\|\varphi_2\big(t,b_2^0(t),\beta\big)-\varphi_2\big(t,b_{2n}(t),\beta\big)\|^2_{H(0,T)}\le$$
$$\le\varphi_{20}^2(\beta)\|b_2^0(t)-b_{2n}(t)\|^2_{H(0,T)},$$

то из неравенства

$$\|u^0(t,x)-u_n(t,x)\|^2_{H(Q)}+\|\vartheta^0(t)-\vartheta_n(t)\|^2_{H(0,T)}\le$$
$$\le\varphi^2_{10}(\beta)\|b^0_1(t,x)-b_{1n}(t,x)\|^2_{H(Q)}+\varphi^2_{20}(\beta)\|b^0_2(t)-b_{2n}(t)\|^2_{H(0,T)}\le$$
$$\le\varphi^2_0(\beta)\{\|b^0_1(t,x)-b_{1n}(t,x)\|^2_{H(Q)}+\|b^0_2(t)-b_{2n}(t)\|^2_{H(0,T)}\}\le$$
$$\le\varphi^2_0(\beta)\Big\|B\big(b^0_1(t,x),b^0_2(t)\big)-B\big(b_{1n}(t,x),b_{2n}(t)\big)\Big\|^2_{H(Q)\times H(Q)},$$

где

$$\varphi^2_0(\beta)=\varphi^2_{10}(\beta)+\varphi^2_{20}(\beta),$$

согласно (1.15), следует сходимость приближений оптимальных управлений, т. е.

$$\|u^0(t,x)-u_n(t,x)\|^2_{H(Q)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$
$$\|\vartheta^0(t)-\vartheta_n(t)\|^2_{H(0,T)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

II. Приближения оптимального процесса и их сходимость.

2.1 m-ое приближение и его сходимость по резольвенте. Резольвента $R_n(t,s,\mu)$ определяется как сумма бесконечного ряда и не всегда удается выписать ее в явном виде. Обозначим через $R^m_n(t,s,\mu)$ m-е приближение резольвенты при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$ и выписываем соответствующее решение краевой задачи (1.2) – (1.4) в виде

$$\nu_m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\bigg(\psi_n\Big[e^{-\lambda^2_n t}+\mu\int_0^T R^m_n(t,s,\mu)e^{-\lambda^2_n s}ds\Big]+\int_0^T\varepsilon^m_n(t,\tau,\mu)\times$$
$$\times\Big[\int_0^1 f\big(\tau,y,u^0(\tau,y)\big)z_n(y)dy+z_n(1)p\big(\tau,\vartheta^0(\tau)\big)\Big]d\tau\bigg)z_n(x),\qquad(2.2)$$

назовем это решение m-м приближением оптимального процесса $\nu^0(t,x)$. Учитывая следующие оценки

1) $$\int_0^T\Big(R_n(t,s,\mu)-R^m_n(t,s,\mu)\Big)^2ds\le\int_0^T\bigg(\sum_{i=m+1}^{\infty}|\mu|^{i-1}\big|K_{n,i}(t,s)\big|\bigg)^2ds\le$$
$$\le\int_0^T\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta\frac{1}{2\lambda^2_n}\bigg[\sum_{i=m+1}^{\infty}\bigg(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda^2_n}}\bigg)^{i-1}\bigg]^2ds\le$$
$$\le\frac{K_0}{2\lambda^2_n}\bigg(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda^2_n}}\bigg)^{2m}\times\bigg(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda^2_n}}}\bigg)^2;$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad \int_0^T \Big(\varepsilon_n(t.\tau,\mu)-\varepsilon_n^m(t.\tau,\mu)\Big)^2 d\tau &= \int_0^t \Big(\varepsilon_n(t.\tau,\mu)-\varepsilon_n^m(t.\tau,\mu)\Big)^2 d\tau+ \\
&+\int_t^T \Big(\varepsilon_n(t.\tau,\mu)-\varepsilon_n^m(t.\tau,\mu)\Big)^2 d\tau = \\
&=\int_0^t \Big(\mu\int_\tau^T \big[R_n(t,s,\mu)-R_n^m(t,s,\mu)\big]e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\Big)^2 d\tau+ \\
&+\int_t^T \Big(\mu\int_\tau^T \big[R_n(t,s,\mu)-R_n^m(t,s,\mu)\big]e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\Big)^2 d\tau \le \\
&\le \mu^2\int_0^T\int_0^T \big[R_n(t,s,\mu)-R_n^m(t,s,\mu)\big]^2 ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(s-\tau)}dsd\tau \le \\
&\le \mu^2\int_0^T \frac{K_0}{2\lambda_n^2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2\frac{1}{2\lambda_n^2}d\tau = \\
&= \frac{\mu^2K_0T}{4\lambda_n^4}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2,
\end{aligned}
$$

и соотношение

$$
\varepsilon_n^m(t,s,\mu)=\begin{cases} e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\mu\int_\tau^T R_n^m(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & 0\le\tau\le t, \\ \mu\int_\tau^T R_n^m(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds, & t\le\tau\le T. \end{cases},
$$

имеем неравенство

$$
\begin{aligned}
\|\nu^0(t,x)-\nu_m(t,x)\|^2_{H(Q)} &= \int_0^T\int_0^1\Big[\sum_{n=1}^\infty\Big(\psi_n\mu\int_0^T\big[R_n(t,s,\mu)- \\
&-R_n^m(t,s,\mu)\big]e^{-\lambda_n^2 s}ds+\int_0^T\Big(\varepsilon_n(t,\tau,\mu)-\varepsilon_n^m(t,\tau,\mu)\Big)\times \\
&\times\Big[\int_0^1 f\big(\tau,y,u(\tau,y)\big)z_n(y)dy+z_n(1)p\big(\tau,\vartheta(\tau)\big)\Big]d\tau\Big)z_n(x)\Big]^2dxdt \le \\
&\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^\infty\Big\{\psi_n^2\mu^2\int_0^T\Big(R_n(t,s,\mu)-R_n^m(t,s,\mu)\Big)^2ds\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 s}ds+ \\
&+\int_0^T\Big(\varepsilon_n(t,\tau,\mu)-\varepsilon_n^m(t,\tau,\mu)\Big)^2d\tau 2\int_0^T\Big[\int_0^1 f^2(t,y,u(t,y))dy\|z_n(y)\|^2_{H(0,1)}+ \\
&+2p^2(t,\vartheta(t))\Big]d\tau\Big\}dt \le 2\sum_{n=1}^\infty\Big\{\psi_n^2\frac{\mu^2K_0}{2\lambda_n^2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\times
\end{aligned}
$$

$$\times\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2\frac{1}{2\lambda_n^2}+2\frac{\mu^2K_0T}{4\lambda_n^4}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2\times$$

$$\times\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\Bigg\}\leq$$

$$\leq\frac{\mu^2K_0T}{2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\big\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+T\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\big\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\leq$$

$$\leq\frac{\mu^2K_0T}{2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\big\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+T\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\big\}\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right)$$

$$\times\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2\frac{1}{2\lambda_n^2}+2\frac{\mu^2K_0T}{4\lambda_n^4}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}}\right)^2\times$$

$$\times\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\Bigg\}\leq$$

$$\leq\frac{\mu^2K_0T}{2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\big\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+T\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\big\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\leq$$

$$\leq\frac{\mu^2K_0T}{2}\left(|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2m}\left(1-\frac{1}{\ln|\mu|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\big\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$

$$+T\left(\|f(t,x,u^0[t,x])\|^2_{H(Q)}+2\|p[t,\vartheta^0(t)]\|^2_{H(0,T)}\right)\big\}\left(\frac{1}{\lambda_1^4}+\frac{1}{\pi^4}\frac{4}{3}\right),$$

из которого при $m\to\infty$ следует сходимость m-го приближения.

2.2 m,k**-е приближение и его сходимость по оптимальному управлению**.

Приближение оптимального процесса, соответствующее k-му приближению $(u_k(t,x),\vartheta_k(t))$ векторного оптимального управления

$(u_k^0(t,x), \vartheta_k^0(t))$, находим по формуле

$$\nu_m^k(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\psi_n \Big[e^{-\lambda_n^2 t} + \mu \int_0^T R_n^m(t,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds \Big] + \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\mu) \times$$
$$\times \Big[\int_0^1 f\big(\tau, y, u_k(\tau,y)\big) z_n(y) dy + z_n(1) p\big(\tau, \vartheta_k(\tau)\big) \Big] d\tau \Bigg) z_n(x). \qquad (2.3)$$

Из соотношения

$$\|\nu_m(t,x) - \nu_m^k(t,x)\|_{H(Q)}^2 = \int_0^T \int_0^1 \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \psi_n \Big[e^{-\lambda_n^2 t} +$$
$$+ \mu \int_0^T R_n^m(t,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds \Big] + \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\mu) \Big[\int_0^1 f\big(\tau, y, u^0(\tau,y)\big) z_n(y) dy +$$
$$+ z_n(1) p\big(\tau, \vartheta^0(\tau)\big) \Big] d\tau \Big\} z_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ \psi_n \Big[e^{-\lambda_n^2 t} + \mu \int_0^T R_n^m(t,s,\mu) e^{-\lambda_n^2 s} ds \Big] +$$
$$+ \int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\mu) \Big[\int_0^1 f\big(\tau, y, u_k(\tau,y)\big) z_n(y) dy +$$
$$+ z_n(1) p\big(\tau, \vartheta_k(\tau)\big) \Big] d\tau \Big\} z_n(x) \Bigg)^2 dx dt =$$
$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg(\int_0^T \varepsilon_n^m(t,\tau,\mu) \Big\{ \int_0^1 \big[f\big(\tau, y, u^0(\tau,y)\big) - f\big(\tau, y, u_k(\tau,y)\big) \big] z_n(y) dy +$$
$$+ z_n(1) \big[p\big(\tau, \vartheta^0(\tau)\big) - p\big(\tau, \vartheta_k(\tau)\big) \big] \Big\} d\tau \Bigg)^2 dt \le$$
$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \varepsilon_n^{2m}(t,\tau,\mu) d\tau \int_0^T \Big\{ \Big(\int_0^1 \big[f\big(\tau, y, u^0(\tau,y)\big) -$$
$$- f\big(\tau, y, u_k(\tau,y)\big) \big] z_n(y) dy \Big)^2 + z_n^2(1) \big[p\big(\tau, \vartheta^0(\tau)\big) - p\big(\tau, \vartheta_k(\tau)\big) \big]^2 \Big\} d\tau dt \le$$
$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \varepsilon_n^2(t,\tau,\mu) d\tau \Big\{ \|f\big(\tau, y, u^0(\tau,y)\big) - f\big(\tau, y, u_k(\tau,y)\big)\|_{H(Q)}^2 +$$
$$+ 2 \|p\big(\tau, \vartheta^0(\tau)\big) - p\big(\tau, \vartheta_k(\tau)\big)\|_{H(0,T)}^2 \Big\} dt \le$$
$$\le 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \Bigg(1 + \frac{\mu^2 K_0 T}{\Big(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\mu|\sqrt{K_0 T}\Big)^2} \Bigg) \Big\{ \|f\big(t, x, u^0(t,x)\big) -$$
$$- f\big(t, x, u_k(t,x)\big)\|_{H(Q)}^2 + 2 \|p\big(t, \vartheta^0(t)\big) - p\big(t, \vartheta_k(t)\big)\|_{H(0,T)}^2 \Big\} dt \le$$

$$\le 2T\Bigg(1+\frac{\mu^2K_0T}{\Big(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\mu|\sqrt{K_0T}\Big)^2}\Bigg)\Big(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\Big)\times\Big\{\|f\big(t,x,u^0(t,x)\big)-$$

$$-f\big(t,x,u_k(t,x)\big)\|^2_{H(Q)}+2\|p\big(t,\vartheta^0(t)\big)-p\big(t,\vartheta_k(t)\big)\|^2_{H(0,T)}\Big\}\le$$

$$\le M_0^2\Big\{\big\|u^0(t,x)-u_k(t,x)\big\|^2_{H(Q)}+\big\|\vartheta^0(t)-\vartheta_k(t)\big\|^2_{H(0,T)}\Big\}\xrightarrow[k\to\infty]{\forall m}\quad 0,$$

где $M_0^2=f_0^2+2p_0^2$, которое получено непосредственным вычислением, следует сходимость m,k-го приближения при каждом фиксированном m.

2.3 m,k,r-е приближение, используемое на практике, и его сходимость.

Приведенные выше приближения оптимального процесса малопригодны для использования в приложениях. Поэтому возникает необходимость построения приближения оптимального процесса,которыми можно пользоваться на практике. Таким приближением является функция

$$\nu_m^{k,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\psi_n\Big[e^{-\lambda_n^2t}+\mu\int_0^T R_n^m(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2s}ds\Big]+\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\mu)\times$$

$$\times\Big[\int_0^1 f\big(\tau,y,u_k(\tau,y)\big)z_n(y)dy+z_n(1)p\big(\tau,\vartheta_k(\tau)\big)\Big]d\tau\Bigg)z_n(x),\qquad(2.4)$$

называемая m,k,r-м приближением оптимального процесса $\nu^0(t,x)$.

Из соотношения

$$\|\nu_m^k(t,x)-\nu_m^{k,r}(t,x)\|^2_{H(Q)}=\int_0^T\int_0^1\Bigg(\sum_{n=r+1}^{\infty}\Big\{\psi_n\big[e^{-\lambda_n^2t}+$$

$$+\mu\int_0^T R_n^m(t,s,\mu)e^{-\lambda_n^2s}ds\big]+\int_0^T\varepsilon_n^m(t,\tau,\mu)\Big(\int_0^1 f(\tau,y,u_k(\tau,y))z_n(y)dy+$$

$$+z_n(1)p\big(\tau,\vartheta_k(\tau)\big)\Big)d\tau\Big\}z_n(x)\Bigg)^2dxdt=$$

$$=2\int_0^T\sum_{n=r+1}^{\infty}\Big\{2\psi_n^2\Big[e^{-2\lambda_n^2t}+\mu^2\int_0^T R_n^2(t,s,\mu)ds\int_0^T e^{-2\lambda_ns}ds\Big]+$$

$$+2\int_0^T\varepsilon_n^2(t,\tau,\mu)d\tau\Big[\big\|f(t,x,u_k(t,x))\big\|^2_{H(Q)}+2\big\|p(t,\vartheta_k(t))\big\|^2_{H(0,T)}\Big]\Big\}dt\le$$

$$\le 2\sum_{n=r+1}^{\infty}\Big\{\frac{\psi_n^2}{\lambda_n^2}\Big(1+\frac{\mu K_0T}{\big(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T}\big)^2}\Big)+$$

$$+\frac{2T}{\lambda_n^2}\Big(1+\frac{\mu K_0T}{\big(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0T}\big)^2}\Big)\Big\}\Big[\big\|f(t,x,u_k(t,x))\big\|^2_{H(Q)}+$$

$$+2\big\|p(t,\vartheta_k(t))\big\|^2_{H(0,T)}\Big] \leq 4\left(1+\frac{\mu K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\mu|\sqrt{K_0 T}\right)^2}\right)\Big\{\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)}+$$
$$+2T\Big[\big\|f(t,x,u_k(t,x))\big\|^2_{H(Q)}+2\big\|p(t,\vartheta_k(t))\big\|^2_{H(0,T)}\Big]\Big\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\xrightarrow[r\to\infty]{\forall m,k}\quad 0,$$

которое получено непосредственным вычислением, следует сходимость $m,k,r-$ приближения при каждой фиксированной паре (m,k).

2.4 Сходимость m,k,r-го приближения к оптимальному процессу следует из соотношения

$$\|\nu^0(t,x)-\nu_m^{k,r}(t,x)\|_{H(Q)} \leq \|\nu^0(t,x)-\nu_m(t,x)\|_{H(Q)}+$$
$$+\|\nu_m(t,x)-\nu_m^k(t,x)\|_{H(Q)}+\|\nu_m^k(t,x)-\nu_m^{k,r}(t,x)\|_{H(Q)}\xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

III. Приближения минимального значения функционала и их сходимость

В соответствии с приближениями оптимального процесса будем различать следующие приближения минимального значения функционала

$$I[u^0,\vartheta^0]=\int_0^1\big[\nu(T,x)-\xi(x)\big]^2dx+\beta\int_0^T\Big\{\int_0^1 q^2[t,x,u^0(t,x)]dx+$$
$$+\theta^2[t,\vartheta^0(t)]\Big\}dt.$$

3.1 m-е приближение функционала вычислим по формуле

$$I_m[u^0,\vartheta^0]=\int_0^1\big[\nu_m(T,x)-\xi(x)\big]^2dx+\beta\int_0^T\Big\{\int_0^1 q^2[t,x,u^0(t,x)]dx+$$
$$+\theta^2[t,\vartheta^0(t)]\Big\}dt.$$

Его сходимость следует из соотношения

$$\big|I(u^0,\vartheta^0)-I_m(u^0,\vartheta^0)\big| \leq \|\nu^0(T,x)+\nu_m(T,x)-2\xi(x)\|_{H(0,1)}\times$$
$$\times\|\nu^0(T,x)-\nu_m(T,x)\|_{H(0,1)}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

3.2 m,k-е приближение функционала вычислим по формуле

$$I_m[u_k,\vartheta_k]=\int_0^1\big[\nu_m^k(T,x)-\xi(x)\big]^2dx+\beta\int_0^T\Big\{\int_0^1 q^2[t,x,u_k(t,x)]dx+$$
$$+\theta^2[t,\vartheta_k(t)]\Big\}dt.$$

Его сходимость при каждом фиксированном $m = 1, 2, 3, \dots$ следует из соотношения

$$\big|I_m(u^0,\vartheta^0)-I_m(u_k,\vartheta_k)\big| \le \|\nu_m(T,x)+\nu_m^k(T,x)-2\xi(x)\|_{H(0,1)}\|\nu_m(T,x)- -\nu_m^k(T,x)\|_{H(0,1)} + \{\|q[t,x,u^0(t,x)] + q[t,x,u_k(t,x)]\|_{H(Q)}q_0\|u^0(t,x)- -u_k(t,x)\|_{H(Q)} + \|\theta^0[t,\vartheta^0(t)] + \theta_k[t,\vartheta_k(t)]\|_{H(0,T)}\theta_0\|\vartheta^0(t)- -\vartheta_k(t)\|_{H(0,T)}\} \xrightarrow[k\to\infty]{\forall m} 0, \quad q_0 > 0, \quad \theta_0 > 0.$$

3.3 m, k, r-е приближение функционала вычислим по формуле

$$I_m^r[u_k,\vartheta_k] = \int_0^1 \big[\nu_m^{k,r}(T,x)-\xi(x)\big]^2 dx + \beta\int_0^T \Big\{\int_0^1 q^2[t,x,u_k(t,x)]dx+ +\theta^2[t,\vartheta_k(t)]\Big\}dt.$$

Его сходимость следует из соотношения

$$\big|I_m(u_k,\vartheta_k) - I_m^r(u_k,\vartheta_k)\big| \le \|\nu_m^k(T,x) + \nu_m^{k,r}(T,x)- -2\xi(x)\|_{H(0,1)}\|\nu_m^k(T,x) - \nu_m^{k,r}(T,x)\|_{H(0,1)} \xrightarrow[r\to\infty]{\forall m,k} 0.$$

3.4 Сходимость приближения $I_m^r[u_k,\vartheta_k]$ к минимальному значению функционала $I[u^0,\vartheta^0]$ следует из соотношения

$$\big|I(u^0,\vartheta^0) - I_m^r(u_k,\vartheta_k)\big| \le \big|I(u^0,\vartheta^0) - I_m(u^0,\vartheta^0)\big|+ +\big|I_m(u^0,\vartheta^0) - I_m(u_k,\vartheta_k)\big| + \big|I_m(u_k,\vartheta_k) - I_m^r(u_k,\vartheta_k)\big| \xrightarrow[m,k,r\to\infty]{} 0.$$

Таким образом доказана сходимость приближений решения задачи нелинейной оптимизации к точному решению по оптимальному управлению, оптимальному процессу и минимальному значению функционала.

Список литературы

1. Керимбеков А. Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением / А. Керимбеков, Р. Ж. Наметкулова, А. К. Кадиримбетова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. -– Т. 15. – С. 41–52.
2. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Наука, 1965. – 520 с.
3. Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations / A. Kerimbekov // Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013), A series of trends in mathematics. – Switzerland : Springer International Publishing, 2015. – Vol. XVI. – P. 803–811.

Керимбеков Акылбек, доктор физико-математических наук, профессор, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Наметкулова Райхан Жанузаковна, соискатель, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Кадиримбетова Айша Казахбаевна, соискатель, Кыргызско-Российский Славянский университет, 720000, Бишкек, пр. Чуй, 6, тел.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

A. Kerimbekov, R. J. Nametkulova, A. K. Kadirimbetova

An Approximate Solution of Distributed and Boundary Control Problem for the Thermal Process

Abstract. A problem of nonlinear optimal distribution and boundary control of a thermal process, described by a Fredholm integral-differential equations, is considered. The unique solvability of a system of nonlinear integral equations of optimal controls is investigated. It was found the sufficient conditions for the existence of a unique solution of the problem of nonlinear optimization. The algorithm for constructing approximate solutions was developed and their convergence on optimal control, optimal processes and functionality, were proved, that it is necessary to distinguish between three types of approximations of the optimal process.

Keywords: functional, the maximum principle, the optimal control, system of nonlinear integral equations, approximate solution, convergence.

References

1. Kerimbekov A., Nametkulova R.J., Kadirimbetova A.K. Optimality conditions in the problem of thermal control with integral-differential equations(in Russian). *The bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2016, vol. 15, pp. 41-52.
2. Lusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of functional analiza (in Russian). Moscow, Russia, Nauka, 1965. 520 p.
3. Kerimbekov A. On the Solvability of a Nonlinear Optimal Control Problem for the Thermal Processes Described by Fredholm Integro-Differential Equations. *Current Trends in Analysis and Its Applications (Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakyw 2013, A series of trends in mathematics.)* Switzerland, Springer International Publishing, 2015, vol. XVI, pp. 803-811.

Kerimbekov Akylbek, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, Chuy av., Bishkek, 720000, tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Nametkulova Rayhan Djanuzakovna, Applicant, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, Chuy av., Bishkek, 720000, tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)

Kadirimbetova Aysha Kazahbaevna, Applicant, Kyrgyz-Russian Slavic University, 6, Chuy av., Bishkek, 720000, tel.: (+996 312)360232 (e-mail: akl7@rambler.ru)