Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 89—101

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.55+517.962.2
MSC 32A05+11B68

Многочлены Бернулли от нескольких переменных и суммирование мономов по целым точкам рационального параллелотопа *

О. А. Шишкина
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Многочлены Бернулли для натурального x впервые рассматривал Я. Бернулли (1713) в связи с задачей суммирования степеней последовательных натуральных чисел. Для произвольного x эти многочлены изучал Эйлер. А термин многочлены Бернулли был введен Раабе (J. L. Raabe, 1851). Числа и многочлены Бернулли хорошо изучены, нашли широкое применение в различных областях теоретической и прикладной математики.

Работа посвящена некоторым обобщениям чисел и многочленов Бернулли на случай нескольких переменных. Вводится понятие чисел Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом, который порожден векторами с целочисленными координатами. Используя числа Бернулли, определяются многочлены Бернулли нескольких переменных. Далее строится разностный оператор, действующий на функциях, определенных в рациональном конусе, и методами теории производящих функций доказывается многомерный аналог основного свойства, состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению.

Кроме того, вычислены значения интегралов от многочлена Бернулли по сдвигам фундаментального параллелотопа, и для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа найден многомерный аналог формулы Бернулли, в которой сумма выражается через интеграл от многочлена Бернулли по параллелотопу с «переменной» вершиной.

Ключевые слова: Числа и многочлены Бернулли, производящие функции, суммирование функций, рациональный параллелотоп.

* Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006)

1. Введение

Числа Бернулли b_μ — это коэффициенты разложения функции $T(\xi) = \frac{\xi}{e^\xi - 1}$ в ряд:

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} b_\mu \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Многочлены Бернулли

$$B_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\mu} C_\mu^k b_{\mu-k} x^k, \;\; C_\mu^k = \frac{\mu!}{k!\,(\mu-k)!}, \tag{1.1}$$

где $b_\mu = B_\mu(0)$ — числа Бернулли, для натурального x рассматривал Я.Бернулли (1713) в связи с задачей суммирования степеней последовательных натуральных чисел: $1^\mu + 2^\mu + ... + x^\mu$. Для произвольного x эти многочлены впервые изучал Эйлер([9]). Термин многочлены Бернулли ввел Раабе (J.L. Raabe, 1851).

Основное свойство многочленов Бернулли состоит в том, что они удовлетворяют разностному уравнению

$$B_\mu(x+1) - B_\mu(x) = \mu x^{\mu-1} \equiv (x^\mu)', \tag{1.2}$$

и поэтому многочлены Бернулли играют в исчислении конечных разностей ту же роль, что и степенные функции в дифференциальном исчислении.

Из соотношения 1.2 сразу получается формула Бернулли для суммы степеней последовательных натуральных чисел:

$$\sum_{t=0}^{x} t^\mu = \frac{1}{\mu+1}\left[B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}(0)\right]. \tag{1.3}$$

Интегрируя 1.2 по отрезку $[0, x]$ можно получить другое выражения для искомой суммы:

$$\sum_{t=0}^{x} t^\mu = \int\limits_0^{x+1} B_\mu(t)\,dt, \tag{1.4}$$

в которой она выражается через интеграл от многочлена Бернулли.

Числа и многочлены Бернулли хорошо изучены, нашли широкое применение в различных областях теоретической и прикладной математики [1; 3; 7].

Суммированию функций нескольких переменных по целым точкам рациональных многогранников посвящены работы [10; 12; 11; 14; 8], в которых получены различные варианты формулы Эйлера-Маклорена. В [10; 12; 11] решается задача суммирования многочлена нескольких переменных, но не определяются понятие многочлена Бернулли и аналогов формул 1.3, 1.4 в этих работах нет.

В данной работе рассматриваются некоторые обобщения чисел и многочленов Бернулли на случай нескольких переменных и получены многомерные аналоги этих формул. Во втором параграфе вводится понятие чисел Бернулли, ассоциированных с рациональным конусом, который порожден векторами с целочисленными координатами. Используя числа Бернулли, определяются многочлены Бернулли нескольких переменных. Далее строится разностный оператор, действующий на функциях, определенных в рациональном конусе, и методами теории производящих функций (см. [3; 6]) доказывается многомерный аналог основного свойства, состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению. В третьем параграфе для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа найден многомерный аналог формулы Бернулли 1.4, в которой сумма выражается через интеграл от многочлена Бернулли по параллелотопу с «переменной» вершиной.

2. Определение чисел и многочленов Бернулли от нескольких переменных. Основное свойство

В данном параграфе введем понятие рационального конуса и ассоциированных с ним чисел и многочленов Бернулли, построим разностный оператор, действующий на функциях, определенных на подрешетке целочисленной решетки, порожденной векторами $a^1, ..., a^n$. Этот оператор позволяет перенести основное свойство классических многочленов Бернулли 1.4 на случай нескольких переменных (теорема 1).

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a^j_1, \ldots, a^j_n\right)$, $a^j_i \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — целые числа. *Рациональным конусом*, построенным на векторах $a^1, \ldots, a^n$, назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \ldots, n\}$.

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\ngeqslant} v$, если $u \in K \backslash \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geqslant} v$ не выполняется.

Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, и отметим, что любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ .. & .. & .. \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Для $j = 1, ..., n$ рассмотрим гиперплоскости

$$L_{j,k} = \left\{ \xi : \left\langle a^j, \xi \right\rangle = 2k\pi i \right\},$$

где i — мнимая единица, $j = 1, ..., n, k = 0, \pm 1, \pm 2 ...$, и отметим, что для мероморфной функции

$$T(\xi) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\left\langle a^j, \xi \right\rangle}{e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1}, \tag{2.1}$$

где $\left\langle a^j, \xi \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^j \xi_k$, $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, гиперплоскости $L_{j,0}$, $j = 1, ..., n$ являются «устранимыми» особыми множествами, поэтому функция $T(\xi)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат, точнее для $R = 2\pi / \max_j \left\| a^j \right\|$ она голоморфна в полицилиндре

$$U_R = \left\{ \xi : |\xi_j| < R, j = 1, ..., n \right\},$$

а гиперплоскости $L_{j,k}$ для $k = 0, \pm 1, \pm 2 ...$ не пересекаются с полицилиндром U_R. Следовательно, функция $T(\xi)$ разлагается в этом полицилиндре в ряд

$$T(\xi) = \sum_{\mu \geq 0} \frac{b_\mu^A}{\mu!} \xi^\mu, \tag{2.2}$$

где $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$, $\mu! = \mu_1! ... \mu_n!$, $\xi^\mu = {\xi_1}^{\mu_1} ... {\xi_n}^{\mu_n}$, а $\mu \geq 0$ означает, что $\mu_j \geq 0$, $j = 1, ..., n$.

Определение 1. *Коэффициенты b_μ^A ряда 2.2 назовем числами Бернулли, ассоциированными с конусом K.*

Определение 2. *Для $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ многочленом Бернулли нескольких переменных назовем многочлен вида*

$$B_\mu^A(x) = \sum_{0 \leq k \leq \mu} \frac{\mu!}{(\mu - k)! k!} b_{\mu - k}^A x^k, \tag{2.3}$$

где b_k^A — числа Бернулли, $k = (k_1, ..., k_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $\mu - k = (\mu_1 - k_1, ..., \mu_n - k_n)$.

Для $n = 1$ и $a = 1$ определенные нами числа и многочлены Бернулли совпадают с классическими 1.1.

Пример 1. Для конуса K, порожденного векторами $a^1 = (1,0)$ и $a^2 = (1,1)$, несколько первых чисел Бернулли равны: $b_{00} = 1$, $b_{10} = -1$, $b_{01} = -\frac{1}{2}$, $b_{11} = \frac{5}{12}$, а для $\mu = (1,1)$ многочлен Бернулли имеет вид $B_{11}^{A}(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{5}{12}$.

Для того чтобы сформулировать многомерный вариант основного свойства 1.2 многочленов Бернулли нам потребуются некоторые понятия и обозначения из теории многомерных разностных уравнений (см., например, [5; 4; 13])

На комплекснозначных функциях $f(y)$ целочисленных аргументов $y = (y_1, ..., y_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j-ой переменной

$$\delta_j f(y) = f(y_1, ..., y_{j-1}, y_j + 1, y_{j+1}, ..., y_n)$$

и обозначим $P(\delta) = \sum\limits_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_ω, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in K \cap \mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} ... \delta_n^{\omega_n}$. Здесь Ω — конечное множество точек из $K \cap \mathbb{Z}^n$. Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(y)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta) f(y) = \varphi(y), y \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Далее нам потребуется полиномиальный разностный оператор вида $Q(\delta) = \prod_{j=1}^{n} \left(\delta^{a^j} - 1\right)$, где $\delta = (\delta_1, ... \delta_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a_1^j} ... \delta_n^{a_n^j}$, и операторы дифференцирования по направлению векторов a^j

$$D_j = \left\langle a^j, \partial \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \partial_k,$$

где ∂_j — операторы дифференцирования по j-ой переменной, $\partial = (\partial_1, ..., \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} ... \partial_n^{\mu_n}$ $j = 1, ..., n$. Обозначим $D = D_1 ... D_n$.

Теорема 1. *Многочлены Бернулли, определенные формулой 2.3, удовлетворяют разностному уравнению*

$$Q(\delta) B_\mu^A(x) = D x^\mu. \tag{2.4}$$

Для $n = 1$ и $a = 1$ уравнение 2.4 совпадает с 1.2.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся методами теории производящих функций.

Производящим рядом (функцией) кратной последовательности $f(\mu)$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^n$ будем называть степенной ряд вида $F(\xi) = \sum\limits_{\mu \geq 0} f(\mu) \frac{\xi^\mu}{\mu!}$.

Производящую функцию для последовательности многочленов Бернулли $B_{\mu}^{A}(x)$ обозначим $F(x;\xi)$:

$$F(x;\xi)=\sum_{\mu\geq 0}B_{\mu}^{A}(x)\,\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}. \tag{2.5}$$

Лемма 1. *Производящий ряд (функция) 2.5 для многочленов Бернулли сходится для любого x и его сумма равна*

$$F(x;\xi)=T(\xi)\,e^{\langle x,\xi\rangle}\equiv\prod_{j=1}^{n}\frac{\langle a^{j},\xi\rangle}{e^{\langle a^{j},\xi\rangle}-1}e^{\langle x,\xi\rangle}, \tag{2.6}$$

где $\langle x,\xi\rangle=x_1\xi_1+...+x_n\xi_n$.

Доказательство. Функция 2.1 раскладывается в ряд 2.2 в полицилиндре U_R, а функция $e^{\langle x,\xi\rangle}$ для любого x раскладывается в ряд вида

$$e^{\langle x,\xi\rangle}=\sum_{k\geq 0}x^{k}\frac{\xi^{k}}{k!}.$$

Перемножим эти ряды

$$T(\xi)\,e^{\langle x,\xi\rangle}=\sum_{\mu\geq 0,k\geq 0}b_{\mu}^{A}x^{k}\frac{\xi^{\mu+k}}{\mu!k!},$$

и после перегруппировки полученного ряда с учетом 2.3 найдем

$$T(\xi)\,e^{\langle x,\xi\rangle}=\sum_{\mu\geq 0}\left(\sum_{0\leq k\leq\mu}\frac{\mu!}{(\mu-k)!k!}b_{\mu-k}^{A}x^{k}\right)\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}=\sum_{\mu\geq 0}B_{\mu}^{A}(x)\,\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}=F(x;\xi)\,.$$

□

В следующей лемме показано, как разностный оператор $Q(\delta)$ действует на производящую функцию $F(x;\xi)$ многочленов Бернулли.

Лемма 2. *Для производящей функции 2.6 многочленов Бернулли справедливы следующие равенства*

$$Q(\delta)\,F(x;\xi)=\prod_{j=1}^{n}\langle a^{j},\xi\rangle e^{\langle x,\xi\rangle},$$

$$Q(\delta)\,F(x;\xi)=De^{\langle x,\xi\rangle},$$

где операторы $Q(\delta)$ и D действуют по переменной x.

Доказательство. Так как

$$\left(\delta^{a^j} - 1\right) e^{\langle x,\xi\rangle} = \left(e^{\left\langle a^j,\xi\right\rangle} - 1\right) e^{\langle x,\xi\rangle},$$

то

$$Q\left(\delta\right) e^{\langle x,\xi\rangle} = \prod_{j=1}^{n} \left(\delta^{a^j} - 1\right) e^{\langle x,\xi\rangle} = \prod_{j=1}^{n} \left(e^{\left\langle a^j,\xi\right\rangle} - 1\right) e^{\langle x,\xi\rangle}.$$

Тогда

$$Q\left(\delta\right) F\left(x;\xi\right) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\left\langle a^j,\xi\right\rangle}{e^{\langle a^j,\xi\rangle} - 1} Q\left(\delta\right) e^{\langle x,\xi\rangle} = \prod_{j=1}^{n} \left\langle a^j,\xi\right\rangle e^{\langle x,\xi\rangle}$$

Так как

$$D_j e^{\langle x,\xi\rangle} = \left\langle a^j,\xi\right\rangle e^{\langle x,\xi\rangle},$$

то

$$D e^{\langle x,\xi\rangle} = \prod_{j=1}^{n} \left\langle a^j,\xi\right\rangle e^{\langle x,\xi\rangle}.$$

□

Доказательство. (теоремы 1) По лемме 1 производящая функция (ряд) $F\left(x;t\right) := \sum\limits_{\mu\geq 0} B_\mu^A\left(x\right) \frac{\xi^\mu}{\mu!}$ для многочлена Бернулли сходится. Применяя разностный оператор $Q\left(\delta\right)$ по переменной x, получим

$$Q\left(\delta\right) F\left(x;t\right) = \sum_{\mu\geq 0} Q\left(\delta\right) B_\mu^A\left(x\right) \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Согласно лемме 2 имеем $Q\left(\delta\right) F\left(x;t\right) = De^{\langle x,\xi\rangle}$, а значит

$$De^{\langle x,\xi\rangle} = \sum_{\mu\geq 0} Q\left(\delta\right) B_\mu^A\left(x\right) \frac{\xi^\mu}{\mu!}.$$

Разлагая функцию $e^{\langle x,\xi\rangle}$ в ряд, получим равенство

$$D \sum_{\mu\geq 0} \frac{x^\mu \xi^\mu}{\mu!} = \sum_{\mu\geq 0} Q\left(\delta\right) B_\mu^A\left(x\right) \frac{\xi^\mu}{\mu!},$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим утверждение теоремы. □

3. Формула Бернулли для суммы значений мономов в целых точках рационального параллелотопа

Сформулируем общую задачу суммирования функций по целым точкам рационального конуса. Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$, построенный на образующих конуса K. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, ..., t_n)$ *задача состоит в отыскании суммы* ее значений по всем целочисленнынам точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$ с «переменной» вершиной x:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \tag{3.1}$$

В данной работе нас интересует случай, когда $\varphi(t) = t^\mu$. Введем необходимые определения и обозначения.

Для любой точки $x \in K$ обозначим $\pi_j x$ ее проекцию вдоль вектора a^j, т.е. если $x = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$, то $\pi_j x = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + ... + \lambda_n a^n$.

Пусть ν — множество всех 2^n наборов $J = (j_1, ..., j_k) \subset \{1, ..., n\}$, включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ ... \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа можно записать в виде

$$V(x) = \{\pi_J x, J \in \nu\}.$$

Отметим, что $\pi_\varnothing x = x$.

Обозначим $\Lambda = \left\{y \in \mathbb{Z}^n : y = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_n a^n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, ..., n\right\}$ подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, ..., a^n$. Обозначим Π_a — фундаментальный параллелотоп $\Pi_a = \left\{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{<} a\right\}$, где $a = a^1 + ... + a^n$. Отметим, что множество точек с целыми координатами, лежащих в фундаментальном паралелотопе Π_a конечно и равно $d(\Lambda)$ — индексу подрешетки Λ в решетке $\mathbb{Z}^n$, кроме того, $d(\Lambda) = \Delta$. (см., например, [2])

Конус, построенный на таких векторах $a^1, ..., a^n$, что определитель матрицы A, столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется *унимодулярным конусом.*

Для унимодулярного конуса K и функции $f(x)$, которая является решением разностного уравнения $Q(\delta) f(x) = \varphi(x)$, в [8] доказано, что для суммы 3.1 справедлива формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\#J} f(\pi_J(x + a)), \ \ x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \tag{3.2}$$

где $\#J$ означает число элементов множества J, $a = a^1 + ... + a^n$.

Формула 3.2 показывает, что искомая сумма выражается через значения решения разностного уравнения в вершинах $V(x+a)$ параллелотопа $\Pi_K(x+a)$.

В частности, в силу теоремы 1 многочлен Бернулли $B_\mu^A(x)$ удовлетворяет разностному уравнению $Q(\delta) B_\mu^A(x) = Dx^\mu$, поэтому по формуле 3.2 для $\varphi(x) = Dx^\mu$ получим выражение для суммы значений „производной" Dt^μ монома t^μ в целых точках рационального параллелотопа

$$\sum_{t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n} Dt^\mu = \sum_{J\in\nu} (-1)^{\# J} B_\mu^A(\pi_J(x+a)).$$

Эту формулу можно рассматривать как многомерный аналог формулы Бернулли 1.3.

Для отыскания суммы 3.1 в случае, когда $\varphi(t) = t^\mu$, нужно «проинтегрировать» последнюю формулу, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть конус K — унимодулярный и пусть x лежит на подрешетке Λ решетки $\mathbb{Z}^n$ с базисом $a^1, ..., a^n$. Для суммы значений мономов t^μ в целых точках рационального параллелотопа $\Pi_K(x)$ справедлива формула:*

$$\sum_{t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n} t^\mu = \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Pi_K(x+a)} B_\mu^A(\tau)\, d\tau. \tag{3.3}$$

Отметим, что при $n = 1$ и $a = 1$ из 3.3 получаем формулу Бернулли 1.4.

Обозначим $\Pi_K(x; x+a) = \{t \in \mathbb{R}^n : x \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x + a\}$ — сдвиг параллелотопа $\Pi_K(a)$ на вектор x.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма, в которой условие унимодулярности конуса не требуется

Лемма 3. *Пусть $x \in \Lambda$. Для любого $J \in \nu$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)} B_\mu^A(\tau)\, d\tau = \Delta\, (\pi_J t)^\mu\, , \mu \geq 0,$$

в частности, для $J = \oslash$

$$\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\Pi_K(t;t+a)} B_\mu^A(\tau)\, d\tau = t^\mu. \tag{3.4}$$

Доказательство. По лемме 1

$$\sum_{\mu\geq 0} B_{\mu}^{A}(\tau)\,\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}=\prod_{j=1}^{n}\frac{\left\langle a^{j},\xi\right\rangle}{e^{\langle a^{j},\xi\rangle}-1}e^{\langle\tau,\xi\rangle}. \tag{3.5}$$

Пусть $J\in\nu$, проинтегрируем 3.5 по параллелотопу $\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)$

$$\sum_{\mu\geq 0}\int\limits_{\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)} B_{\mu}^{A}(\tau)\,d\tau\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}=\prod_{j=1}^{n}\frac{\left\langle a^{j},\xi\right\rangle}{e^{\langle a^{j},\xi\rangle}-1}\int\limits_{\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)} e^{\langle\tau,\xi\rangle}d\tau. \tag{3.6}$$

Так как

$$\int\limits_{\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)} e^{\langle\tau,\xi\rangle}d\tau=\Delta\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{\left\langle a^{j},\xi\right\rangle}-1}{\langle a^{j},\xi\rangle}e^{\langle\pi_J t,\xi\rangle}, \tag{3.7}$$

то после разложения функции $e^{\langle\pi_J t,\xi\rangle}$ в ряд по переменной ξ и подстановки полученного выражения 3.7 в 3.6, получим

$$\sum_{\mu\geq 0}\int\limits_{\Pi_K(\pi_J t;\pi_J t+a)} B_{\mu}^{A}(\tau)\,d\tau\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}=\Delta\sum_{\mu\geq 0}(\pi_J t)^{\mu}\,\frac{\xi^{\mu}}{\mu!}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получаем утверждение леммы.

□

Формула 3.4 означает, что интеграл от многочлена Бернулли по сдвигам $\Pi_K(x;x+a)$ параллелотопа $\Pi_K(a)$ выражается через значение монома в вершине x параллелотопа $\Pi_K(x)$.

Доказательство. (теоремы 2) Просуммируем равенство 3.4 по целым точкам $t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n$, получим

$$\sum_{t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n} t^{\mu}=\sum_{t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{\Pi_K(t;t+a)} B_{\mu}^{A}(\tau)\,d\tau.$$

Так как $\Pi_K(x+a)=\bigcup\limits_{t\in\Pi_K(x)\cap\mathbb{Z}^n}\Pi_K(t,t+a)$, то из свойства аддитивности интеграла следует утверждение теоремы 2.

□

Пример 2. Для унимодулярного конуса K, порожденного векторами $a^1=(1,0)$ и $a^2=(1,1)$, параллелограм $\Pi_K(x)$ для $x=(x_1,x_2)\in K$ можно задать неравенствами $0\leq t_1-t_2\leq x_1-x_2$, $0\leq t_2\leq x_2$, а сумма значений монома $t_1^{\mu_1} t_2^{\mu_2}$ по его целым точкам (для $\mu_1 = \mu_2 = 1$) согласно формуле 3.3 после вычисления интеграла равна

$$S(x_1, x_2) = \sum_{0 \le t_1 - t_2 \le x_1 - x_2, 0 \le t_2 \le x_2} t_1 t_2 = \frac{5}{12}(x_1 - x_2 + 1)(x_2 + 1) - \\ -\frac{1}{4}(x_1 - x_2 + 1)^2 (x_2 + 1) - \frac{3}{4}(x_1 - x_2 + 1)(x_2 + 1)^2 + \\ +\frac{1}{3}(x_1 - x_2 + 1)(x_2 + 1)^3 + \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + 1)^2 (x_2 + 1)^2.$$

Раскрывая скобки получим, что искомая сумма равна

$$S(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{12}\left(3x_1 x_2^2 - 2x_1 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2 - 2x_2^3 - x_2^4 + 5x_1 x_2 + 3x_1^2 x_2 + 2x_2 + x_2^2\right).$$

Список литературы

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967.
2. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел / Дж. В. С. Касселс. – М. : Мир, 1965.
3. Ландо С. К. Лекции о производящих функциях / С. А. Ландо. – 3-е изд., испр. — М. : МЦНМО, 2007.
4. Лейнартас Е. К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце полиномов / Е. К. Лейнартас, М. С. Рогозина // Сиб. мат. журн. – 2015. – Т. 56, № 1. – С. 111–121.
5. Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнения / Т. И. Некрасова // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 88–96.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли // Москва, Издательство „Мир“, 1990
7. Устинов А. В. Дискретный аналог формулы суммирования Эйлера / А. В. Устинов // Мат. заметки. – 2002. – Т. 71, вып. 6. – С. 931–936.
8. Шишкина О. А. Формула Эйлера – Маклорена для рационального параллелотопа / О. А. Шишкина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.‘Математика. – 2015. – Т. 13. – С. 56–71.
9. Эйлер. Л. Дифференциальное исчисление : пер. с лат. / Л. Эйлер. – М. ; Л., 1949.
10. Brion M. Local Euler-Maclaurin formula for polytopes / M. Brion, N. Berline // Moscow Mathematical Society Journal. – 2007. – Vol. 7. – P. 355–383.
11. Brion M. Lattice points in simple polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – Vol. 10, N 2. – P. 371–392.
12. Brion M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – Vol. 10, N 4. – P. 797–833.

13. Leinartas E. K. Constant coefficient linear difference equations on the rational cones of the integer lattice / E. K. Leinartas, T. I. Nekrasova // Siberian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 57, N 1. – P. 74–85.
14. Shishkina O. A. The Euler-Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. – 2015. – Vol. 8, N 1. – P. 86–93.

Шишкина Ольга Андреевна, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79, тел. +79135173555
(e-mail: olga_a_sh@mail.ru)

O. A. Shishkina

Bernoulli Polynomials in Several Variables and Summation of Monomials over Lattice Points of a Rational Parallelotope

Abstract. The Bernoulli polynomials for natural x were first considered by J.Bernoulli (1713) in connection with the problem of summation of the powers of consecutive positive integers. For arbitrary x these polynomials were studied by L.Euler. The term "Bernoulli polynomials" was introduced by Raabe (J.L. Raabe, 1851). The Bernoulli numbers and polynomials are well studied, and are widely used in various fields of theoretical and applied mathematics.

The article is devoted to some generalizations of the Bernoulli numbers and polynomials to the case of several variables. The concept of Bernoulli numbers associated to a rational cone generated by vectors with integer coordinates is defined. Using the Bernoulli numbers, we introduce the Bernoulli polynomials of several variables. Next we construct a difference operator acting on functions defined in a rational cone, and by methods of the theory of generating functions we prove a multidimensional analogue of the main property, which is the fact that the Bernoulli polynomials satisfy a difference equation.

Also, we calculate the values of the integrals of the Bernoulli polynomials over shifts of the fundamental parallelotope, and for the sum of monomials over integer points of a rational parallelotope we find a multidimensional analogue of the Bernoulli formula, where the sum above is expressed in terms of the integral of the Bernoulli polynomial over a parallelotope with variable "top" vertex.

Keywords: Bernoulli numbers and polynomials, generating functions, summation of functions, rational parallelotope.

References

1. Gelfond A.O. Calculus of finite differences (in Russian). Moscow, Nauka, 1977.
2. Cassels J.W.S An introduction to the geometry of numbers (in Russian). Moscow, Mir, 1965.
3. Lando S.K. Lectures on generating functions(in Russian). Moscow, MZNMO, 2007.
4. Leinartas E.K., Rogozina M.S. Solvability of the Cauchy problem for a polynomial difference operator and monomial bases for the quotients of a polynomial ring (in Russian). *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no 1, pp. 111-121.

5. Nekrasova T.I. Sufficient conditions of algebraicity of generating functions of the solutions of multidimensional difference equations (in Russian). *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika"*, 2013, vol. 6, no 3, pp. 88-96.
6. Stanley R. Enumerative combinatorics (in Russian). Moscow, Mir, 1990.
7. Ustinov A.V A discrete analoge of Euler's summation formula (in Russian). *Mat. Zametki*, 2002, vol. 71, issue 6, pp. 931-936.
8. Shishkina O.A. The Euler-Maclaurin formula for rational parallelotope(in Russian). *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika"*, 2015, vol. 13, pp. 56-71.
9. Euler L. Differential calculus (in Russian), translation from lat., M.-L., 1949
10. Brion M., Berline N. Local Euler-Maclaurin formula for polytopes. *Moscow Mathematical Society Journal*, 2007, vol. 7, pp. 355-383.
11. Brion M., Vergne M. Lattice points in simple polytopes. *Journal of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 10, no 2, pp. 371-392.
12. Brion M., Vergne M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes. *Journal of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 10, no 4, pp. 797-833.
13. Leinartas E.K., Nekrasova T.I. Constant coefficient linear difference equations on the rational cones of the integer lattice. *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no 1, pp. 74-85.
14. Shishkina O.A. The Euler-Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics*, 2015, vol. 8, no 1, pp. 86-93.

Shishkina Olga, Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041 tel.: (913)5173555
(e-mail: `olga_a_sh@mail.ru`)