Серия «Математика»
2017. Т. 22. С. 90—105

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54
MSC 20K01
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.90

Об одном достаточном условии существования периодической части в группе Шункова

А. А. Шлепкин
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Группа G насыщена группами из множества групп, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ из приведенного выше определения называется насыщающим множеством для группы. Под группой Шункова G понимается группа, в которой для любой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Группа Шункова не обязана быть периодической. Поэтому вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе Шункова с условием насыщенности приходится решать отдельно. Если в группе G все элементы конечных порядков содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется периодической частью группы G. Ранее доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами лиева типа ранга 1, изоморфна группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем. В данной работе рассматриваются произвольные группы Шункова (не обязательно периодические). Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

Ключевые слова: насыщенность группы множеством групп, группа Шункова.

1. Введение

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ [17]. Множество $\mathfrak{X}$ из приведенного выше определения называется насыщающим множеством для группы G [4].

Напомним, что под группой Шункова G понимается группа, в которой для любой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу [10]. Отметим, что группа Шункова не обязана быть периодической. В связи с чем вопрос о расположении элементов конечного порядка в группе Шункова приходится решать отдельно для каждого конкретного случая. В [15] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами лиева типа ранга 1, изоморфна группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем. В данной работе рассмотрены произвольные группы Шункова (не обязательно периодические). Если в группе G все элементы конечных порядков содержатся в периодической подгруппе группы G, то она называется *периодической частью группы* G и обозначается $T(G)$ ([2], с. 90). Доказан следующий результат.

Теорема. *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга* 1*, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга* 1 *над подходящим локально конечным полем.*

При доказательстве данной теоремы мы будем использовать обозначения и схему доказательства из [15].

2. Доказательство теоремы

Пусть G — из условия теоремы. Положим

$$\mathfrak{M} = \{L_2(r), U_3(q), Sz(2^{2n+1}), Re(3^{2n+1})\},$$

где q, n не фиксируются (в случае $L_2(r), r > 3$). Тогда с точностью до изоморфизма $\mathfrak{M}$ — множество всех конечных простых групп лиева типа ранга 1 [24], и $\mathfrak{M}$ является насыщающим множеством для группы G.

Лемма 1. *Силовская* 2*-подгруппа S – группы G одного из следующих видов*:

1. $S = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1}\rangle$ — *полудиэдральная группа* (S *изоморфна силовской* 2 - *подгруппе* $U_3(q)$, *где* $q \equiv 1 \pmod 4$)*.*

2. $S = \langle a, w | a^{2^n} = b^{2^n} = w^2 = 1, a^w = b, ab = ba\rangle$ — *сплетенная* 2*-группа* (S *изоморфна силовской* 2*-подгруппе* $U_3(q)$, *где* $q \equiv -1 \pmod 4$)

3. S — *конечная элементарная абелева* 2*-группа ранга не менее трех.*

4. S — *группа диэдра.*

5. S *изоморфна силовской* 2*-подгруппе группы* $Sz(2^{2n+1})$*.*

6. S *изоморфна силовской* 2*-подгруппе группы* $U_3(2^n)$*.*

7. S — *бесконечная группа периода не более* 4*, и все инволюции из* S *лежат в* $Z(S)$*.*

8. *S — черниковская 2-группа ранга не более 2.*

Доказательство. Пусть S — конечная группа. Тогда ввиду того, что силовские 2-подгруппы из G сопряжены (предложение 20 из [3]) и условия насыщенности, S — одного из видов 1–6 утверждения леммы.

В дальнейшем считаем, что S — бесконечная группа. Пусть S содержит элементарную абелеву подгруппу D порядка 8. Тогда все инволюции из S лежат в $Z(S)$, S периода не более 4, S — локально конечная группа (теорема Санова [11], [7]), и лемма доказана. Осталось рассмотреть случай, когда S не содержит элементарных абелевых групп порядка более четырех. В данном случае S — ограниченного ранга, и по [20] (теоремы 1,2) и [5] (теорема 2) S — черниковская. По условию леммы ранг S равен 2. □

Положим

$\mathfrak{N} = \{L_2(2^n); Re(3^{2n+1}); U_3(2^{2n}); Sz(2^{2n+1}); L_2(q), q \equiv 3, 5 \pmod 8\}$,

$\mathfrak{A} = \{L_2(q), q-$ нечетно и $q \not\equiv 3, 5 \pmod 8\}$,

$\mathfrak{B} = \{U_3(q), q-$ нечетно$\}$.

Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$.

Пусть M — группа, K — подгруппа M, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_M(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы M, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы M, то $\mathfrak{X}_M(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы M, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_M(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_M(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Лемма 2. *Для $\mathfrak{M}(1)$ возможны только следующие взаимоисключающие случаи:*

(A) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1)$.

(B) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1)$, *где* $\mathfrak{A}(1) \neq \varnothing$.

(C) $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{N}(1) \cup \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1)$, *где* $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$,

Доказательство. Непосредственное следствие определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{N}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1)$.

□

Доказательство теоремы для случая (A)

В данном случае теорема доказана в [13].

Доказательство теоремы для случая (B)

В этом случае любая конечная 2-подгруппа из группы G является подгруппой конечной группы диэдра. Следовательно, для любого $X \in \mathfrak{M}(1), X \simeq L_2(q)$. Тогда , как показано в [12], $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, и теорема доказана.

Доказательство теоремы для случая (C)

Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример к заключению теоремы.

Лемма 3. *G — содержит бесконечно много элементов конечного порядка. В частности, G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Действительно, в противном случае по теореме Дицмана [1] G обладает конечной периодической частью $T(G)$. По условию насыщенности $T(G) \tilde{\in} \mathfrak{M}$. Противоречие с выбором G в качестве контрпримера. Второе утверждение леммы доказано в [18]. $\square$

Лемма 4. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы G. Тогда S – одного из видов 1, 2, 8, перечисленных в условии леммы 1.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, то пусть $1 \neq K \in \mathfrak{B}(1)$ и S_K — силовская 2-подгруппа из K. Если S — конечная группа, то можно считать, что $S_K < S$, S содержит элемент порядка 8 (предложение 5 из [15]), $Z(S)$ не содержит все инволюции из S, и в этом случае S либо вида 1, либо вида 2 из условия леммы 1, и лемма доказана. Если S — бесконечная группа, то все силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа из G, содержащая S_K. В этом случае S_1 содержит элемент порядка 8, и, следовательно, S_1 — вида 8 из леммы 1. Если в G найдется силовская 2-подгруппа S_2 вида 7 из леммы 1, то по лемме 6 из [8] можно считать, что $|S_1 \cap S_2| > m$ для любого наперед заданного натурального m. В этом случае всегда можно подобрать такое m, что $S_1 \cap S_2$ содержит элемент порядка 8 из S_1., что невозможно, так как S_2 — группа периода 4. Итак, G не может содержать силовких 2-подгрупп вида 7 из леммы 1. Следовательно, S – вида 8 из леммы 1. $\square$

Лемма 5. *Пусть S — вида 8 из утверждения леммы 1, и ранг $\tilde{S}$ равен 2. Тогда $S = (A \times A^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ — сплетение квазициклической 2-группы A при помощи инволюции w.*

Доказательство. В этом случае $\tilde{S} = A \times B$, где A, B — квазициклические группы. Возьмем в $\tilde{S}$ конечную подгруппу $R = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, где $a \in A, b \in B$, и $|a| = |b| > 2$. По условию насыщенности $R < K \in \mathfrak{B}(1)$.

По предложению 5 (пункты 1–4) из [15] в R найдется инволюция w такая, что $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle < S$. Осталось показать, что $S < \tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle$. Действительно, как нетрудно видеть, S насыщена сплетенными группами, и по [16] $\tilde{S} \leftthreetimes \langle w \rangle = S$. □

Лемма 6. *Пусть S — вида 8 из условия леммы 1. Если $R_n < S$, где $R_n = \langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle$, $|a_n| = |b_n| > 2$, то S – из утверждения леммы 5.*

Доказательство. Предположим обратное. По лемме 5 $\tilde{S}$ — квазициклическая группа, и $\tilde{S} < C_S(A)$, где A — четверная группа из R_n. Из условия насыщенности вытекает, что $C_G(A)$ насыщена конечными абелевыми группами. По лемме 8 из [14] $C_G(A)$ обладает периодической частью $T(C_G(A)$, силовская 2-подгруппа S_A которой является полной абелевой группой ранга 2. Следовательно, $S < S_1$, где S_1 — некоторая силовская 2-подгруппа группы G, содержащая группу S_A. Противоречие с тем, что S — силовская 2-подгруппа группы G. □

Лемма 7. *Пусть S — вида 8 из условия леммы 1. Если $D_n < S$, где $D_n = \langle a^{2^n} = v^2 = 1, a^v = a^{2^{n-1}-1} \rangle$ — полудиэдральная группа, то S содержит подгруппу $\tilde{S} \times \langle x \rangle$, где $\tilde{S}$ — квазициклическая 2-группа, x — инволюция.*

Доказательство. Если $\tilde{S}$ ранга 2, то лемма доказана в связи с утверждением леммы 5. Предположим, что $\tilde{S}$ — квазициклическая 2-группа. Тогда $|D_n : C_{D_n}(\tilde{S})| \leqslant 2$, и для некоторой инволюции $x \in S$, $\tilde{S} \times \langle x \rangle$ — подгруппа в S.

□

Лемма 8. $\mathfrak{M}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных групп, и для любой группы $K \in \mathfrak{M}(1)$*

$$K \,\tilde{\in}\, \{L_2(r), U_3(q)\},$$

где q, r — нечётные и $r > 3$.

Доказательство. По лемме 3 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Последнее означает , что порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных конечных подгрупп.

Докажем второе утверждение леммы. Если силовская 2-подгруппа S группы G конечна, то из леммы 4 и того факта, что $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, вытекает, что либо S — полудиэдральная группа, либо S — сплетенная группа. Следовательно, если для некоторой конечной подгруппы K группы G, $K \in \mathfrak{B}(1)$, то $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетно, а если $K \notin \mathfrak{B}(1)$, то силовская 2-подгруппа S_K группы K является группой диэдра, $K \simeq L_2(r)$, где r — нечетное, больше 3.

Пусть S — бесконечная группа. Тогда S_K — 2-ранга два (лемма 4) и по [9], [21]

$$K \tilde{\in} \{L_2(r), U_3(q)\},$$

где q, r — нечетные и $r > 3$. □

Лемма 9. *Все инволюции в G сопряжены. Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогично доказательству лемм 7,8 из [15] с учетом предложения 20 из [3]. □

Лемма 10. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда порядки групп из $\mathfrak{B}(1)$ ограничены в совокупности.

1. Пусть x — инволюция из G. Тогда $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

По лемме 8 множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. Следовательно, $C_G(x)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.

Пункт 1 доказан.

2. Множество простых делителей порядков элементов из $C_G(x)$ конечно.

Поскольку множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит конечное число неизоморфных групп, то существует такое натуральное m, что для любой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$, $|Y| < m$. Возьмем в $C_G(x)$ элемент b простого порядка $p > m$. Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g \rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g \rangle < R_g$, где $R_g \in \mathfrak{M}(1)$. Так как $p > m$, то $R_g \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра, $\langle b \rangle = \langle b^g \rangle$, и $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа в $C_G(x)$. Так как $C_G(x)$ содержит $C_K(x)$, где $K \in \mathfrak{B}(1)$, то $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Ввиду того, что $\langle b \rangle C_K(x)$ — конечная группа, то по условию насыщенности $\langle b \rangle C_K(x) < W$, где $W \in \mathfrak{M}(1) \setminus \mathfrak{B}(1)$, поскольку W содержит элемент b. В этом случае $W \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. Следовательно, $C_W(x)$ — группа диэдра, что невозможно, поскольку $C_K(x) < C_W(x)$. Противоречие.

Пункт 2 доказан.

3. Силовские 2-подгруппы из $C_G(x)$ конечны.

Утверждение данного пункта вытекает из лемм 6, 7.

Пункт 3 доказан.

4. В $C_G(x)$ существует квазициклическая p-подгруппа D, где p – простое нечетное число.

Возьмем в $C_G(x)$ бесконечную абелеву локально конечную подгруппу D (лемма 8). Так как силовская 2-подгруппа из $C_G(x)$ конечна, то силовская 2-подгруппа из D также конечна. В силу конечности множества простых делителей порядков элементов из D (пункт 1, доказанный выше) и того факта, что ранги конечных p-групп из D не более 2, D — черниковская группа (теорема Блекберна [22]). Следовательно, можно считать. что D —квазициклическая p-группа (p —простое нечетное число, так как по пункту 3 силовская 2-подгруппа в $C_G(x)$ конечна).

Пункт 4 доказан.

5. Возьмем в D элемент b простого порядка p. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений.

i. В $C_G(x)$ найдется элемент c порядка p такой, что $\langle c\rangle \times \langle b\rangle$ — подгруппа в $C_G(x)$.

ii. В $C_G(x)$ найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Так как G — группа Шункова, то для любого $g \in C_G(x)$ группа $\langle x, b, b^g\rangle$ конечна. По условию насыщенности $\langle x, b, b^g\rangle < R_g$, где $R_g \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что для любого g $R_g \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r. В силу того, что $C_R(x)$ — группа диэдра, $\langle b\rangle = \langle b^g\rangle$, и $\langle b\rangle$ — нормальная подгруппа в $C_G(x)$. Так как $\mathfrak{B}(1) \neq \varnothing$, то G содержит конечную подгруппу $K \in \mathfrak{B}(1)$. Ввиду леммы 9 можно считать, что $x \in K$. Так как $C_K(x) < C_G(x)$, то $\langle b\rangle C_K(x)$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b\rangle C_K(x) < M$, где $M \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку R содержит $C_K(x)$, и $C_K(x) \simeq GU_2(q)$. Следовательно, $M \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1, и $|b|$ делит $q_1 + 1$ поскольку $\langle b\rangle$ — нормальная подгруппа в $C_R(x)$. Следовательно, в $C_M(x)$ есть подгруппа $\langle b\rangle \times \langle c\rangle$, где $|b| = |c|$, и имеет место утверждение i.

Предположим, что для некоторого $g \in C_G(x)$, $R_g \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2. Если $|b|$ делит $q_2 + 1$, то рассуждая как выше, получаем, что имеет место утверждение i. Если $|b|$ не делит $q_2 + 1$, то $|b|$ делит $q_2 - 1$, и имеет место утверждение ii.

Пункт 5 доказан.

6. Возьмем в D произвольный элемент b. Тогда имеет место одно из следующих двух утверждений.

i. В $C_G(x)$ найдется элемент c порядка p такой, что $\langle c\rangle \times \langle b\rangle$ — подгруппа в $C_G(x)$.

ii. В $C_G(x)$ найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Предположим обратое. Ввиду пункта 5, доказанного выше, будем считать, что $|b| > p$ и для $b^p = b_1$ имеют место утверждения i или ii.

Предположим, что для b_1 имеет место утверждение i. Группа $\langle x, b, b^c\rangle$ содержит конечную нормальную подгруппу $\langle x, b_1\rangle$. Тогда фактор-группа $\langle x,\ b\ , b^c\ \rangle/\langle x, b_1\rangle = \langle\overline{b},\ \overline{b^c}\rangle$ — конечная группа. Следовательно, $\langle x,\ b,\ b^c\ \rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle x,\ b,\ b^c\ \rangle < R_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Следовательно, $R_1 \simeq U_3(q_2)$ для некоторого нечетного q_2, и $C_{R_1}(x) \simeq GU_2(q_2)$. В этом случае либо $|b|$ делит $q_2 + 1$, либо $|b|$ делит $q_2 - 1$, $b_2 \in C_{R_1}(x) < C_G(x)$. В первом случае в R_1 найдется элемент c

такой, что $|c| = |b|$, и $\langle c \rangle \times \langle b \rangle$ — подгруппа в $C_{R_1}(x)$. Во втором случае в R_1 найдется элемент c такой, что $c^2 = x$ и $b^c = b^{-1}$.

Предположим, что для b_1 имеет место утверждение ii. Тогда $\langle x, b, b^c \rangle$ — конечная группа (поскольку G — группа Шункова). По условию насыщенности конечная группа $\langle x, b, b^c \rangle < M \in \mathfrak{B}(1)$, где $M \simeq U_3(q_3)$ для некоторого нечетного q_3 ($C_M(x)$ — не группа диэдра). Поскольку $b \in C_M(x)$, то либо $|b|$ делит q_3+1, либо $|b|$ делит q_3-1. В первом случае для b имеет место утверждение i. Во втором случае для b имеет место утверждение ii.

Пункт 6 доказан.

Завершим доказательство леммы. Возьмем в группе D (пункт 4) элемент b со свойством $|b| > m$, где m — число из пункта 2. По пункту 6 либо $C_G(x)$ содержит конечную группу вида $\langle x \rangle \times \langle c \rangle \times \langle b \rangle$, где $|c| = p$, либо $C_G(x)$ содержит конечную подгруппу вида $(\langle x \rangle \times \langle b \rangle)\langle c \rangle$, где $c^2 = x$, и $b^c = b^{-1}$. В первом случае по условию насыщенности $(\langle x \rangle \times \langle c \rangle \times \langle b \rangle) < T \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку $C_T(x)$ содержит подгруппу, не являющуюся подгруппой группы диэдра. Но $|T| > m$, что невозможно. Во втором случае по условию насыщенности $(\langle x \rangle \times \langle \times \langle b \rangle)\langle c \rangle < T \in \mathfrak{B}(1)$, поскольку $C_T(x)$ содержит подгруппу, не являющуюся подгруппой группы диэдра. Но $|T| > m$, что невозможно. Полученные противоречия завершают доказательство леммы.

□

По лемме 10 в $\mathfrak{B}(1)$ найдётся группа, изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечётно. Отождествим указанную группу с группой U из [15] (предложение 5) и будем далее использовать обозначения этого предложения : $i, j, w, b, d_1, d_2, A, V, B$. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 11. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K < R \in \mathfrak{B}(1)$. По предложению 5 (пункт 4) из [15], $C_R(A)$ — абелева группа ранга 2, следовательно, K — абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из C_A, получаем, что все конечные подгруппы из C_A – абелевы ранга не более 2. По лемме 8 из [14] C_A обладает периодической частью $T(C_A)$. По лемме 10 C_A содержит конечные подгруппы сколь угодно большого порядка. Следовательно, C_A содержит бесконечное множество элементов конечного порядка, а $T(C_A)$ является бесконечной абелевой группой ранга 2 и является счетной.

□

Лемма 12. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \leftthreetimes V$.*

Доказательство. $T(C_A)$ — характеристическая подгруппа в N. По лемме 11 и лемме 2.4.3 из [19] фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\overline{b}$ — элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \overline{b}, \overline{b}^{\overline{g}} \rangle$ — конечная подгруппа для любого $\overline{g} \in \overline{N}$. Пусть K — некоторый ее конечный прообраз в N, содержащий конечную подгруппу $\langle b, b^g, A\rangle$ в качестве собственой подгруппы. По условию насыщенности $\langle b, b^g, A\rangle < K < R \in \mathfrak{B}(1)$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) < N$. По предложению 5 (пункты 1–4) из [15], $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) < T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \overline{b} \rangle = \langle \overline{b}^{\overline{g}} \rangle$ и $T(C_A) \rightthreetimes \langle b \rangle) \lhd N$. В этом случае $N/(T(C_A) \rightthreetimes \langle b \rangle)$ — группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w} \rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A)) \rightthreetimes \langle b \rangle)$, и $T(C_A) \rightthreetimes V = T(N)$.

□

Лемма 13. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами:

1. $A < M_n \in \mathfrak{B}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) < N_{M_2}(A) < \cdots < N_{M_n}(A) < \ldots$.
3. $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 16 из [15]. □

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 13.

Лемма 14. *В G существует подгруппа M такая, что*

1. $M \simeq U_3(Q)$ *для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.*
2. $A < M$.
3. *Для любой четверной подгруппы $F < M$, $T(N_G(F)) = N_M(F)$.*
4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы S_M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа из G.*
5. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*

Доказательство. По построению $B = \langle w \rangle \times \langle j \rangle < M_n$ для любого n. Из леммы 13 вытекает, что для любого n $N_{M_n}(B) < T(N_G(B)) = T(C_G(B)) \rightthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V . Покажем, что

$$C_{M_1}(B) < C_{M_2}(B) < \cdots < C_{M_n}(B) < \ldots.$$

Действительно, $C_{M_n}(A) < C_{M_{n+1}}(A) < T(C_A)$ для любого n. По лемме 9, $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g < (C_{M_{n+1}}(A))^g < T(C_A)^g,$$

$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$
$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B),$$
$$T(C_A)^g = C_{G^g}(A^g) = T(C_G(B)),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) < C_{M_{n+1}^g}(B) < T(C_G(B)).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) < T(C_G(B))$, то $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) < C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n M_n не изоморфна $U_3(5)$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (предложение 5 (пункт 9) из [15]) и с учетом леммы 13 (пункт 2)

$$M_1 < M_2 \ , \dots < M_n \ , \dots .$$

По теореме 2 из [14] $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.

Пункт 1 доказан.

2. Данный пункт очевиден.

3. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 13 (свойство 3) получаем, что $N_M(A) = T(N)$. Следовательно, $T(N) = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in N\rangle = T(N_G(F)).$$

Пункт 3 доказан.

4. Предположим обратное. Пусть $S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Если S — конечная группа, то она либо вида 1, либо вида 2 из леммы 1. Поскольку полудиэдральная группа не может содержать в качестве собственной подгруппы полудиэдральную группу, то S — сплетенная 2-группа вида 2 из леммы 1 порядка не менее 32, и $S < T(N_G(F))$ для некоторой четверной подгруппы F из S. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 9), то можно считать. что $F < M$. По пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Если S — бесконечная группа, то она вида 8 из леммы 1, её полная часть $\tilde{S}$ является полной абелевой группой ранга 2, и $S < T(N_G(F))$ для четверной подгруппы F из в $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать, что $F < M$. По пункту 3 $S < M$. Следовательно, $S_M = S$. Противоречие с выбором S.

Пункт 4 доказан.

5. Пусть $S_1,\ S_2$ — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена с другой по предложению 20 из [3]. Если они бесконечны,то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп, лежащих в их полных абелевых подгруппах группы M.

Пункт 5 доказан.

$\square$

Лемма 15. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$, и $R \cap M$ содержит четверную подгруппу C. Тогда $R < M$.*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 17 из [15]. $\square$

Лемма 16. *Пусть z — инволюция из M, h — элемент нечетного порядка из $C_G(z)$. Тогда $h \in M$.*

Доказательство. Предположим обратное.

1. Рассмотрим случай, когда $|h| = p$ — простое число. Для любой отличной от z инволюции $x \in C_M(z)$ группа $\langle z, h, x\rangle$ конечна. По условию насыщенности и лемме 8 $\langle h, x, z\rangle < K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Если для некоторого x $K \simeq U_3(q)$, где q — нечетное, и $\langle x, z\rangle < M \cap K$, то $K < M$ (лемма 15). Следовательно, $h \in M$, и в этом случае все доказано. Пусть для всех инволюций $x \in C_M(z), K \simeq L_2(r)$, где r — нечетное больше 3. Тогда $C_K(z)$ — группа диэдра. Следовательно, $\langle h\rangle = \langle h^x\rangle = \langle h\rangle^x$, и $\langle h\rangle$ — нормальная подгруппа в $\langle h\rangle I(C_M(z))$, где $I(C_M(z))$ — подгруппа из $C_M(z)$, порожденная всеми ее инволюциями. Возьмем в $C_M(z)$ подгруппу K_1, содержащую z, и $K_1 \simeq GU_2(q)$. Рассмотрим подгруппу $I(K_1)$, порожденную всеми инволюциями из K_1. По условию насыщенности конечная группа $\langle h\rangle I(K_1) < K_2 \in \mathfrak{B}(1)$, и $K_2 \cap M$ содержит четверную группу. Следовательно, $K_2 < M$ (лемма 15). Но тогда $h \in M$.

2. Рассмотрим случай, когда $|h| = p^l, l > 1$. Пусть P — максимальная характеристическая подгруппа из $C_G(z)$, порожденная инволюцией z и элементами нечетных порядков из M. По пункту 1, доказанному выше, $1 \neq P < M$. Ясно, что P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Без ограничения общности можно считать, что $h^p \in P$. Возьмем в $C_M(z)$ конечную неразрешимую подгруппу $W \simeq SL_2(q)$. Так как W порождается элементами простых нечетных порядков, то $W < P$. Как отмечалоь выше, P — локально конечная характеристическая подгруппа в $C_G(z)$. Так как $\langle z, h, W\rangle$ — конечная группа, то по условию насыщенности и лемме 8 $\langle z, h, W\rangle < K$, где $K \in \mathfrak{M}(1)$. Ввиду того, что $\langle z, h, W\rangle < C_K(z)$, $K \simeq U_3(q_1)$ для некоторого нечетного q_1. Так как $C_K(z) = Z \cdot L \cdot \langle f\rangle$, где $L \simeq SL_2(q_1)$, и L — нормальная подгруппа в

$C_K(z)$, $Z = Z(C_K(z))$ — циклическая группа,

$$|Z| = \left(\frac{q+1}{(3, q+1)}\right),$$

$| \ Z \cap L \ |= 2$, $f^2 \in Z$. Так как L порождается элементами простых нечетных порядков, то по лемме 16 $L \in P < M$. Следовательно, h не лежит в L, и p делит $q+1$. Следовательно, в $C_K(z)$ найдется подгруппа $\langle z \rangle \times \langle d^p \rangle \times \langle h^p \rangle$, где $|h| = |d|$. Ясно, что $\langle z \rangle \times \langle d^p \rangle \times \langle h^p \rangle$ лежит в $C_K(F) \cap P < M$, где F — некоторая четверная группа из K, содержащая инволюцию z. В этом случае $F < M$. По лемме 15 $K < M$. Так как $h \in K$, то $h \in M$.

□

Лемма 17. *Пусть z — инволюция из M. Тогда все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M.*

Доказательство. Пусть P — подгруппа из $C_G(z)$, порожденная всеми элементами нечетных порядков из $C_G(z)$ и инволюцией z. По доказанному выше, P — характеристическая подгруппа в $C_G(z)$, и $P < M$. Возьмем в P такую конечную подгруппу L, что $z \in L$, и $L \simeq SL_2(r)$ (r — нечетное больше 3). Возьмем в $C_M(z)$ инволюцию $y \neq z$. Пусть x — произвольная инволюция из $C_G(z)$. Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y \rangle$ — конечная группа, и $P\langle x, y \rangle$ — локально конечная группа. По условию насыщенности конечная группа $\langle L, y, x \rangle \leq R$, где $R \simeq U_3(q)$ для некоторого нечетного q. Так как $M \cap R$ содержит четверную подгруппу $\langle z \rangle \times \langle y \rangle$. то по лемме 15 $R < M$, и $x \in M$. В силу произвольности выбора x, как инволюции, из $C_G(x)$, получаем, что все инволюции из $C_G(z)$ лежат в M.

□

Завершим доказательство теоремы. Пусть $X \in \mathfrak{M}(1)$, и X не лежит ни в каком $Y \in \mathfrak{B}(1)$. Следовательно, $X \simeq L_2(r)$ для некоторого нечетного r (лемма 8). По леммам 9, 14 (пункт 3) можно считать, что

$$N_X(F) < X \cap M,$$

где $F = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ — четверная подгруппа из X. Если X не изоморфна A_5, то из списка максимальных подгрупп X ([23], стр. 377) и леммы 17 вытекают равенство $X = \langle C_X(x), C_X(y) \rangle$ и включение $X < M$. Следовательно, $X < K \in \mathfrak{B}(1)$. Противоречие с выбором X. Пусть $X \simeq A_5$. Возьмем элемент h порядка 3 из $N_X(A)$ и инволюции $v \in N_X(\langle h \rangle)$, $w \in N_M(\langle b \rangle)$ такие, что $b^v = b^{-1}, b^w = b^{-1}$. Ясно, что $\langle h, v \rangle \neq \langle h, w \rangle$. По условию насыщенности конечная группа $\langle v, w, h \rangle < R$, R не лежит в M и R не изоморфна A_5 (поскольку $\langle h, v \rangle \neq \langle h, w \rangle$). Если $R \simeq L_2(q)$ для некоторого нечетного q, то $R = \langle C_R(bw), C_R(b^2w) \rangle$, и по лемме 17 $R <$

M. Противоречие. Следовательно, $R \in \mathfrak{B}(1)$. Так как $C_R(w) \simeq GU_2(q)$ для некоторого нечетного q, то $R \cap M$ содержит четверную подгруппу, и по лемме 15 $R < M$. Противоречие с выбором R. Таким образом, для любого $X \in \mathfrak{M}(1)$ найдется $Y \in \mathfrak{B}(1)$ такой, что $X < Y$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{B}(1)$ — насыщающее множества для G, и по теореме 2 из [14] G обладает периодической частью $T(G) \simeq U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. Дицман А. П. О центре p-групп / А. П. Дицман // Труды семинара по теории групп. – М., 1938. – С. 30–34.
2. Каргаполов М. И. Основы теории групп / М. И. Капгаполов, Ю. И. Мерзляков. – М. : Наука, 1982.
3. Группы с условием насыщенности / А. А. Кузнецов, Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватулина, К. А. Филиппов ; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2010.
4. Кузнецов А. А. Группы, насыщенные заданным множеством групп / А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 230–246.
5. Ли Б. Дж. О силовских 2-подгруппах периодических групп, насыщенных конечными простыми группами / Б. Дж. Ли, Д. В. Лыткина// Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 6. – С. 1313–1319.
6. Лыткина Д. В. О группах, насыщенных конечными простыми группами / Д. В. Лыткина // Алгебра и логика. – 2009.– Т. 48, № 2. – С. 523–628. https://doi.org/10.1007/s10469-009-9063-z
7. Лыткина Д. В. Строение группы порядки элементов которой не превосходят числа 4 / Д. В. Лыткина // Мат. системы. – 2005. – № 4. – С. 54–59.
8. Лыткина Д. В. Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп II / Д. В. Лыткина // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52. – С. 1096–1112. https://doi.org/10.1134/S0037446611050120
9. Мазуров В. Д. Конечные группы / В. Д. Мазуров // Алгебра. Топология. Геметрия. – М. : ВИНИТИ, 1976. – Т. 14. – С. 5–56.
10. Остыловский А. Н. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности / А. Н. Остыловский, В. П. Шунков // Исследования по теории групп. – Красноярск, 1975. – С. 32–48.
11. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для периода 4 / И. Н. Санов // Учен. зап. ЛГУ. Сер. Математика. – 1940. – № 55. – С. 166–170.
12. Филиппов К. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$ / К. А. Филиппов // Вестн. СибГАУ. – 2012. – № 1. – С. 611–617.
13. Шлепкин А. А. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами с силовской 2-подгруппой специального вида / А. А. Шлепкин // Сиб. электрон. мат. изв. (в печати).
14. Шлепкин А. А. О Периодических группах и группах Шункова, насыщенных унитарными группами степени 3 / А. А. Шлепкин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, № 3. – С. 299–307.

15. Шлепкин А.А. О Периодической группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа ранга 1 / А. А. Шлепкин // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. – Т. 16 – С. 102–116.
16. Шлепкин А. А. Группы Шункова, насыщенные сплетенными группами / А. А. Шлепкин // Сиб. электрон. мат. изв. – 2013. – Т. 10. – С. 56–64.
17. Шлепкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы / А. К. Шлепкин // Третья Междунар. конф. по алгебре : сб. тез. – Красноярск, 1993.
18. Шлепкин А. К. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. – 1983. – № 22. – С. 226–231.
19. Шлепкин А. К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А. К. Шлепкин ; Краснояр. гос. ун-т. – Красноярск, 1999.
20. Шунков В. П. Об одном классе p-групп / В. П. Шунков // Алгебра и логика. – 1970. – № 4. – С. 484–496.
21. Alperin J. L. Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert / J. L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein // Scripta Math. – 1973. – vol. 29, N 3–4, P. 191–214.
22. Blacbern N. Same remarks on Chernikov's groups / N. Blakbern // J. Math. – 1962. – Vol. 6. – P. 525–554.
23. Bray John N. The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups / John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal. – Cambridge University Press, 2013. – P. 319–325.
24. Carter R. W. Simple groups of Lie type / R. W. Carter // New York : Wiley and Sons, 1972.

Шлепкин Алексей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерной безопасности, Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, Россия, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный 79. (e-mail: shlyopkin@mail.ru)

A. A. Shlepkin

On a Sufficient Condition for the Existence of a Periodic Part in the Shunkov Group

Abstract. The group G is saturated with groups from the set of groups if any a finite subgroup K of G is contained in a subgroup of G, which is isomorphic to some group in $\mathfrak{X}$. The set $\mathfrak{X}$ from the above definition is called the saturating set for the group. By the Shunkov group G we mean a group in which for any of its finite subgroup H in the factor group $N_G(H)/H$ any two conjugate elements of prime order generate a finite subgroup. The Shunkov group does not have to be periodic. Therefore, the problem of the location of elements of finite order in the Shunkov group with the saturation condition must be solved separately. If in a group G all elements of finite orders are contained in a periodic subgroup of the group G, then it is called the periodic part of the group G. It was proved that a periodic Shunkov group, saturated with finite simple non-abelian groups of Lie type of rank 1, is isomorphic to a group of Lie type of rank 1 over a suitable locally finite field. In this paper we consider arbitrary Shunkov groups (not necessarily periodic). It is proved that the Shunkov group G, saturated with groups from the set of finite simple groups of Lie type of rank 1, has a periodic part that is isomorphic to a simple group of Lie type of rank 1 over a sutable locally finite field.

Keywords: groups saturated with the set of groups, Shunkov group

References

1. Dicman A. P. O centre p - grupp [On p — group center]. *Trudy seminara po teorii grupp*, Moscow, 1938, pp. 30–34. (In Russian).
2. Kargapolov M.I. Merzljakov. Ju.I. *Osnovy teorii grupp* [Fundamentals of group theory]. Moscow: Nauka Publ., 1982. (In Russian).
3. Kuznecov A.A, Lytkina D.V., Tuhvatulina L.R., Filippov K.A. *Gruppy s usloviem nasyshhennosti* [Groups with saturation conditions]. Krasnoyarsk. Krasnojar. gos. agrar. un-t Publ., 2010. (In Russian).
4. Kuznecov A.A. Filippov K.A., Gruppy, nasyshhennye zadannym mnozhestvom grupp [Groups, saturated with given set of groups]. *Sib. jelektron. mat. izv.*, 2011, vol. 8, pp. 230–246. (In Russian).
5. Li B. Dzh. Lytkina D.V. O silovskih 2-podgruppah periodicheskih grupp, nasyshhennyh konechnymi prostymi gruppami [On sylow 2-subgroups of periodic groups, saturated with finite simple groups]. *Sib. matem. zhurn.*, 2016, Vol. 57. no 6, pp. 1313–1319. (In Russian).
6. Lytkina D.V. On groups saturated by finite simple groups. *Algebra and Logic*, 2009, Vol. 48, no. 5, pp. 357-370. https://doi.org/10.1007/s10469-009-9063-z
7. Lytkina D.V. Stroenie gruppy porjadki jelementov kotoroj ne prevoshodjat chisla 4 [The structure of a group of orders of elements of which does not exceed 4]. *Matem. sist.,* 2005, Vol. 4, pp. 54–59. (In Russian).
8. Lytkina D.V. Periodicheskie gruppy, nasyshhennye prjamymi proivedenijami konechnyh prostyh grupp II [Periodic groups, saturated with direct products of finite simple groups II]. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, Vol. 52, pp. 1096–1112. (In Russian). https://doi.org/10.1134/S0037446611050120
9. Mazurov V.D. Konechnye gruppy [Finite groups] *Algebra. Topologija. Gemetrija.* Moscow: VINITI, 1976, Vol. 14, pp. 5–56. (In Russian).
10. Ostylovskij A. N. Shunkov V.P. O lokal'noj konechnosti odnogo klassa grupp s usloviem minimal'nosti [On the local finiteness of a class of groups with the minimality condition]. *Issledovanija po teorii grupp*, 1975, pp. 32–48. (In Russian).
11. Sanov I.N Reshenie problemy Bernsajda dlja perioda 4 [Solution of the Burnside problem for period 4]. *Uchen. zapiski LGU. Ser. Matem.*, 1940, no. 55 pp. 166–170. (In Russian).
12. Filippov K.A. O periodicheskoj chasti gruppy Shunkova, nasyshhennoj $L_2(p^n)$ [On the periodic part of the Shunkov group saturated with $L_2(p^n)$]. *Vestnik SibGAU*, 2012, no 1, pp. 67–72. (In Russian).
13. Filippov K.A. On periodic groups saturated by finite simple groups. *Siberian Math. J.*, 2012, Vol. 53, no. 2, pp. 345–351.
14. Shlepkin A.A. O Periodicheskih gruppah i gruppah Shunkova, nasyshhennyh unitarnymi gruppami stepeni 3 [On periodic groups and Shunkov groups saturated with unitary groups of degree 3]. *Trudy instituta matematiki i mehaniki UrO RAN*, 2016, Vol. 22, no. 3, pp. 299–307. (In Russian).
15. Shlepkin A.A. On the periodic Shunkov group saturated by finite simple groups of Lie type 1. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2016, Vol.16, pp. 102–116. (In Russian).

16. Shlepkin A.A. Gruppy Shunkova, nasyshhennye spletennymi gruppami. [Shunkov groups, saturated with woven groups.] *Sib. jelektron. matemat. izv.*, 2013, Vol. 10. pp. 56–64. (In Russian).
17. Shlepkin A. K. Soprjazhenno biprimitivno konechnye gruppy, soderzhashhie konechnye nerazreshimye podgruppy [Conjugately biprimitively finite groups containing finite unsolvable subgroups]. *Tret'ja mezhdunar. konf. po algebre. Sb. tez. Krasnojarsk*, 1993. (In Russian).
18. Shlepkin A. K. O soprjazhenno biprimitivno konechnyh gruppah s usloviem primarnoj minimal'nosti, [On conjugate biprimitively finite groups with a primary minimum condition]. *Algebra and Logic,* 1983. no. 22. 226–231. (In Russian).
19. Shlepkin A. K. *Gruppy Shunkova s dopolnitel'nymi ogranichenijam* [Shunkov groups with additional restrictions], Krasnoyarsk. state. Univer. Publ., 1999. (In Russian).
20. Shunkov V.P. Ob odnom klasse p-grupp [On a class of p -groups]. *Algebra and Logic,* 1970, no. 4, pp. 484–496. (In Russian).
21. J.L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein, Finite simple groups of 2-rang two. *Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert. Scripta Math.* **29**, no 3–4, pp. 191–214, 1973.
22. Blacbern N. Same remarks on Chernikov ' s groups. *J. Math.* 1962, no 6, pp. 525–554.
23. John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty - Dougal. The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups. *Cambridge university press.* 2013.
24. Carter R. W. *Simple groups of Lie type.* New York, Wiley and Sons, 1972.

Shlepkin Alexey Anatolievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, Svobodny 79, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation. (e-mail: shlyopkin@mail.ru)