Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 3. С. 94—103

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.5

Точечно термально полные клоны функций и решетки решеток всех подалгебр алгебр с фиксированным основным множеством

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. Исследуется строение решетки точечно термально полных клонов функций на фиксированном множестве

Ключевые слова: точечно термальные функции, клоны, решетки подалгебр

Изучение функциональных клонов (совокупностей функций на фиксированном множестве, замкнутых относительно суперпозиций и включающих в себя все селекторные функции вида $e_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ является актуальной проблематикой как для дискретного анализа, теории управления, так и для универсальной алгебры. Последнее связано с тем, что любой функциональный клон K на множестве A является совокупностью $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ термальных функций для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ (в частности, в случае включения в сигнатуру σ всех функций из K) и наоборот. Решетки клонов L_A (относительно теоретико-множественного включения) на множестве A являются бесконечными (счетными, для двухэлементных A — Пост [8], и континуальными, для конечных A в случае $|A| \geqslant 3$ — Янов и Мучник [6]), в силу чего одним из подходов к изучению этих решеток является рассмотрение различных естественных (в том числе алгебраически значимых) операций замыкания на L_A и совокупностей клонов замкнутых относительно этих операций замыкания. Одной из подобных операций замыкания и посвящена настоящая работа.

Функцию $g(\overline{x})$ на множестве A назовем *точечно термальной* для алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$, если для любого $\overline{a} \in A^n$ существует терм $t_{\overline{a}}(\overline{x}) \in \mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$, такой что

$$g(\overline{a}) = t_{\overline{a}}(\overline{a}).$$

Тем самым, функция $g(\overline{x})$ точечно термальна для $\mathfrak{A}$, если все подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ замкнуты относительно g (если g сохраняет одноместные отношения на A, соответствующие подалгебрам алгебры $\mathfrak{A}$). В частности, точечно термальными для любой алгебры $\mathfrak{A}$ будут все ее термальные, условно термальные, позитивно и элементарно условно термальные (см., к примеру, [2, 3]) функции, неявные, абстрактные операции на $\mathfrak{A}$ и т. д. Через $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех точечно термальных для $\mathfrak{A}$ функций. Очевидным образом совокупность $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A})$ является клоном функций на множестве A.

Для любого клона функций K на множестве A через $\mathfrak{A}_K = \langle A; K\rangle$ обозначим алгебру с основным множеством A, сигнатурные функции которой суть функции из K. Через $\overline{K}^P$ обозначим клон $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A}_K)$. Имеют место следующие очевидные свойства оператора $K \to \overline{K}^P$ на решетке L_A:

1) $K \subseteq \overline{K}^P (\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PTr}(\mathfrak{A}))$;

2) $\overline{K}^P(\overline{K}^P) = \overline{K}^P (\mathrm{PTr}(\langle A; \mathrm{PTr}(\mathfrak{A})\rangle) = \mathrm{PTr}(\mathfrak{A}))$

3) если $K_1 \subseteq K_2$ (если $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_2)$), то $\overline{K}_1^P \subseteq \overline{K}_2^P$ (то $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathrm{PTr}(\mathfrak{A}_2)$).

Заметим также, что для любой алгебры $\mathfrak{A}$, любого гомоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{B}$ и любой точечно термальной для $\mathfrak{A}$ функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ будет точечно термальным для $\mathfrak{B}$ φ-сопряжение функции $g(\overline{x})$ (функция $\varphi g(\varphi^{-1}(x_1), \ldots \varphi^{-1}(x_n))$).

Клоны вида $\overline{K}^P$ будем называть *точечно термальными замыканиями клонов* K, а клоны K, удовлетворяющие равенству $K = \overline{K}^P$, — *точечно термально полными.* Совокупность всех точечно термально полных клонов на множестве A обозначим как PCL_A.

Без труда, непосредственно замечается, что теоретико-множественное пересечение любого числа точечно термально полных клонов является точечно термально полным. Тем самым, совокупность всех точечно термально полных клонов на A является полной решеткой с операцией $\wedge$, совпадающей с теоретико-множественным пересечением клонов. При этом, как показывает следующий пример, операция $\vee$ на решетке $\langle PCL_A; \wedge, \vee\rangle$, вообще говоря, не совпадает ни с операцией теоретико-множественного объединения клонов, ни с операцией $\vee$ из решетки $\langle L_A; \wedge, \vee\rangle$ всех клонов на множестве A.

Действительно, пусть $A = \{0, 1, 2\}$, K_0 — клон всех функций на A, сохраняющих множество $\{0, 1\}$, K_1 — клон всех функций на A, сохраняющих множество $\{2\}$, $F(A)$ — совокупность всех функций на A (единица решеток $\langle L_A; \wedge, \vee\rangle$ и $\langle PCL_A; \wedge, \vee\rangle$). Тогда очевидно, что $K_0, K_1 \in PCL_A$ и в решетке $\langle PCL_A; \wedge, \vee\rangle$ имеет место равенство $K_0 \vee K_1 = F(A)$, но $K_0 \vee K_1$ не совпадает с $F(A)$ в решетке $\langle L_A; \wedge, \vee\rangle$.

Далее, через $\wedge_P$ ($\vee_P$) будем обозначать операции inf и sup в решеточно упорядоченном множестве $\langle PCL_A; \subseteq\rangle$. Тем самым, для любых $K_1, K_2 \in PCL_A$ имеет место $K_1 \wedge_P K_2 = K_1 \wedge K_2 = K_1 \cap K_2$, в то время как, вообще говоря, $K_1 \vee_P K_2 \neq K_1 \vee K_2 \neq K_1 \cup K_2$.

Через $Sel(A)$ будем далее обозначать совокупность всех селекторных функций на множестве A — нулевой элемент решетки $\langle L_A; \wedge, \vee\rangle$. Через $PSel(A)$ обозначим совокупность всех *точечно селекторных функций* на A, т.е. функций $g(x_1, \dots, x_n)$ на A, таких что для любого кортежа $a_1, \dots, a_n$ элементов из A имеет место включение

$$g(a_1, \dots, a_n) \in \{a_1, \dots a_n\}.$$

Очевидно, что $\overline{Sel(A)}^P = PSel(A)$ и последняя совокупность есть нулевой элемент решетки $\langle PCL_A; \wedge_P \vee_P\rangle$.

Через $\operatorname{Sub} K$ будем далее обозначать решетку подалгебр $\operatorname{Sub}\mathfrak{A}_K$ алгебры $\mathfrak{A}_K$. Заметим, что для любого $K \in L_A$ имеет место равенство $\operatorname{Sub} K = \operatorname{Sub}\overline{K}^P$.

Далее, под *решеткой подмножеств множества* A будем понимать решеточно упорядоченную отношением $\subseteq$ некоторую совокупность S подмножеств множества A, включающую в себя $\{A\}$ и замкнутую относительно произвольных пересечений. Тем самым, соответствующая решетка $\langle S; \wedge, \vee\rangle$ является полной. Хорошо известен ([7], см., также [4]) критерий, когда решетка S подмножеств множества A совпадает с решеткой подалгебр некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$: объединение любой направленной вверх (относительно $\subseteq$) совокупности S-множеств так же лежит в S. Через Sub_A обозначим совокупность всех решеток подалгебр алгебр вида $\langle A; \sigma\rangle$. В силу известного соответствия Галуа (см., к примеру, [4]) между функциональными клонами и клонами сохраняемых ими отношений на A и того, что одноместные предикаты из клона отношений, порожденного совокупностью одноместных предикатов, замкнутой относительно произвольных конъюнкций и направленных вверх объединений, суть предикаты из этой порождающей совокупности, элементы совокупности Sub_A (решетки подалгебр алгебр вида $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$) являются инвариантами точечно термально полных клонов.

Тем самым, совокупность $\operatorname{Sub}(A)$, частично упорядоченная отношением $\subseteq$, является двойственной решетке $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle$ и значит сама является решеточно упорядоченной. Через $\wedge_S$ ($\vee_S$) обозначим операции inf (sup) в решеточно упорядоченной совокупности $\langle \operatorname{Sub}_A; \subseteq\rangle$. При этом, для $K_1, K_2 \in PCL_A$ имеют место равенства $\operatorname{Sub}(K_1 \vee_P K_2) = \operatorname{Sub} K_1 \wedge_S \operatorname{Sub} K_2 = \operatorname{Sub} K_1 \cap \operatorname{Sub} K_2$. Действительно, непосредственно замечается, что совокупность $\operatorname{Sub} K_1 \cap \operatorname{Sub} K_2$ подмножеств множества A удовлетворяет критерию “быть решеткой подалгебр некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$”. С другой стороны, так же непосредственно проверяется, что наименьшей совокупностью подмножеств множества A, включающей в себя совокупности $\operatorname{Sub} K_1$ и $\operatorname{Sub} K_2$ и удовлетворяющей критерию "быть решеткой подалгебр некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$" является совокупность объединений направленных вверх (относительно $\subseteq$) семейств подмножеств множества A, имеющих вид $B \cap C$ (где $B \in \operatorname{Sub} K_1$, $C \in \operatorname{Sub} K_2$). Далее подобную совокупность будем обозначать как $\cup\uparrow\cap(\operatorname{Sub} K_1, \operatorname{Sub} K_2)$. Тем самым, для $K_1, K_2 \in PCL_A$ выполнено $\operatorname{Sub}(K_1 \wedge_P K_2) = \operatorname{Sub} K_1 \vee_S \operatorname{Sub} K_2 = \cup\uparrow\cap(\operatorname{Sub} K_1, \operatorname{Sub} K_2)$. Представляет естественный интерес вопрос о строении и свойствах решеток вида $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle$.

Теорема 1. *Любая (конечная) решетка изоморфно вложима в решетку вида $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle$ для подходящего (конечного) множества A.*

Доказательство. Через $\langle \operatorname{Part} A; \wedge, \vee\rangle$ обозначим решетку разбиений множества A с традиционно определяемыми на ней операциями $\wedge$ и $\vee$. Для любого разбиения $T = \{B_i \mid i \in I\}$ множества A через $\operatorname{Sub} T$ обозначим совокупность $\{\bigcup_{i\in J} B_i \mid J \subseteq I\}$ подмножеств множества A, очевидным образом удовлетворяющую критерию "быть решеткой подалгебр некоторой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ и, тем самым, существует, причем единственный, клон $K_T \in PCL_A$, такой что $\operatorname{Sub} K_T = \operatorname{Sub} T$. При этом непосредственно замечается, что для любых $T_1, T_2 \in \operatorname{Part} A$ выполнены равенства

$$\begin{array}{rlcl} & \operatorname{Sub}(T_1 \wedge T_2) & = & \cup\uparrow\cap(\operatorname{Sub} T_1, \operatorname{Sub} T_2) \\ = & \operatorname{Sub} T_1 \vee_S \operatorname{Sub} T_2 & = & \operatorname{Sub}(K_{T_1} \wedge_P K_{T_2}) \\ \text{и} & \operatorname{Sub}(T_1 \vee T_2) & = & \operatorname{Sub} T_1 \cap \operatorname{Sub} T_2 \\ = & \operatorname{Sub} K_{T_1} \cap \operatorname{Sub} K_{T_2} & = & \operatorname{Sub}(K_{T_1} \vee K_{T_2}). \end{array}$$

Тем самым, отображение $\varphi : \operatorname{Part} A \to PCL_A$, такое что $\varphi(T) = K_T$ является изоморфным вложением решетки $\langle \operatorname{Part} A; \wedge, \vee\rangle$ в решетку

$$\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle.$$

Как было доказано в [10] ([9]), любая (конечная) решетка вложима в решетку вида $\langle \operatorname{Part} A; \wedge, \vee\rangle$ для некоторого (конечного) множества A, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Следствие 1. *Никакое нетривиальное решеточное тождество не является истинным на классе всех решеток точечно термально полных клонов.*

Очевидно, что коатомами решетки $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle$ являются клоны K, такие что $\operatorname{Sub} K = \{\varnothing, B, A\}$ для некоторого $\varnothing \subset B \subset A$. В силу же того, что любое подмножество множества A представимо как пересечение подмножеств множества A, имеющих одноэлементное дополнение, атомами решетки $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P\rangle$ являются клоны K, такие что

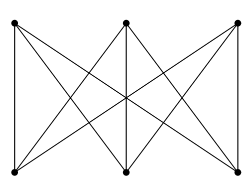
$\operatorname{Sub} K = P(A) \backslash \{B\}$, где $P(A)$ — совокупность всех подмножеств множества A и B — подмножество множества A, имеющее одноэлементное дополнение.

Далее остановимся на некоторых свойствах решеток $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P \rangle$ для конечных A. Традиционно под n ($n \in \omega$) будем понимать множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Очевидно, что решетка $\langle PCL_2; \wedge_P, \vee_P \rangle$, двойственная решетке $\langle \mathrm{Sub}_2; \wedge_S, \vee_S \rangle$, является четырехэлементной не линейно упорядоченной. Непосредственно вычисляется, что решетка $\langle \mathrm{Sub}_3; \wedge_S, \vee_S \rangle$, а значит и решетка $\langle PCL_3; \wedge_P, \vee_P \rangle$ состоит из 45 элементов, имеет 3 атома, 6 коатомов и длину 6.

Без труда замечается, что длина решетки $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ равна $2^n - 2$. Действительно, через $P_m(n)$ обозначим совокупность всех m-элементных подмножеств множества n и пусть $P_m(n) = \{D_1^m, \ldots, D_{C_n^m}^m\}$, а $R_0 = \{\varnothing, n\}$, $R_1 = \{\varnothing, n, D_1^1\}$, $R_2 = \{\varnothing, n, D_1^1, D_2^1\}$, $\ldots$, $R_{C_n^1} = \{\varnothing, n\} \cup P_1(n)$, $R_{C_n^1+1} = R_{C_n^1} \cup \{D_1^2\}$, $\ldots$, $R_{C_n^1+C_n^2} = \{\varnothing, n\} \cup P_1(n) \cup P_2(n)$, $\ldots$, $R_{C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}} = P^n(n)$. Так как $|R_{i+1} \backslash R_i| = 1$ для любого i, $R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_{C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}}$ будет цепью в интервале $[\{\varnothing, n\}, P(n)]$ частично упорядоченного множества $\langle P(n); \subseteq \rangle$, состоящей из решеток подмножеств множества n, имеющей максимальную в нем длину, т. е. длина $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ равна $C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} = 2^n - 2$.

Отметим теперь, что решетка $\langle PCL_m; \wedge_P, \vee_P \rangle$ является ретрактом решетки $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ для любого $n > m$. Достаточно доказать это для $n = m+1$. Определяя $\varphi(S)$, как $\{\{m\}, m \cap B \mid B \in S\}$ для любого $S \in \mathrm{Sub}_{m+1}$, получаем гомоморфизм решетки $\langle \mathrm{Sub}_{m+1}; \wedge_C, \vee_C \rangle$ на главный фильтр F этой решетки, порожденный ее элементом $\{\{m\}, m\}$, тождественный на этом фильтре F. А так как решетка $\langle \operatorname{Sub} m; \wedge_C, \vee_C \rangle$ изоморфна фильтру F, а решетки $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ и $\langle \operatorname{Sub} n; \wedge_C, \vee_C \rangle$ двойственны, решетка $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ действительно является ретрактом решетки $\langle PCL_{n+1}; \wedge_P, \vee_P \rangle$.

Отметим теперь, что графы решеток $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$, при $n \geqslant 3$ не являются плоскими. Для этого, в силу того, что решетка $\langle PCL_3; \wedge_P, \vee_P \rangle$ является ретрактом решетки $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$, достаточно по теореме Понтрягина — Куратовского указать в графе решетки $\langle PCL_3; \wedge_P, \vee_P \rangle$ (или, что то же самое, в графе решетки $\langle \mathrm{Sub}_3; \wedge_C, \vee_C \rangle$) подграф изоморфный графу $K_{3,3}$ (полному двудольному графу, см., к примеру, [5])



Роль такого подграфа очевидным образом играют следующие элементы из Sub_3:

$$S_0 = \{\{0\}\}, \quad S_1 = \{\{1\}\}, \quad S_2 = \{\{2\}\}, \quad S_{01} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\}\},$$
$$S_{02} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{0,2\}\} \quad \text{и} \quad S_{12} = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{1,2\}\}.$$

Очевидно, что любая перестановка π на множестве n индуцирует соответствующий автоморфизм φ_π на решетке $\langle \mathrm{Sub}_n; \wedge_C, \vee_C\rangle$ (а значит и на решетке $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P\rangle$): для $S \in \mathrm{Sub}\, n$ полагаем $\varphi_\pi(S) = \{\pi(B) \mid B \in S\}$. На самом деле все автоморфизмы $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle$ исчерпываются автоморфизмами вида φ_π.

Определим равенство $\mathrm{rank}(x) = k$ как элементарную формулу решеточной сигнатуры утверждающую, что для элемента x рассматриваемой решетки длина интервала $[0, x]$ равна k (здесь 0 — наименьший элемент рассматриваемой решетки, а k — натуральное число). Через $\mathrm{At}(x)$, $\mathrm{Coat}(x)$ обозначим элементарные формулы, утверждающие, x — атом, x — коатом, соответственно.

Пусть $\psi_1(x) = \mathrm{At}(x) \,\&\, \forall y(\mathrm{At}(y) \to \mathrm{rank}(x \vee_C y) = 2)$. Очевидно, что $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_c\rangle \models \psi_1(S)$ тогда и только тогда, когда $S = S_i$ для некоторого $i \leqslant n$, где $S_i = \{\varnothing, n, \{i\}\}$. Пусть элементарная формула $\psi_2(x)$ утверждает, что x — атом и существуют ровно два элемента x_1, x_2, такие что $\&_{i=1}^2 \psi_1(x_i)$ и для любого атома y, такого что $\mathrm{rank}(x \vee_C y) = 3$, один из этих $x_i \leqslant x \vee_C y$. Очевидно, что $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle \models \varphi_2(S)$ тогда и только тогда, когда $S = \{\varnothing, n, B\}$ и $|B| = 2$. Пусть $\psi_2'(x, z)$ утверждает, что $\psi_2(x) \& \psi_1(z)$ и z играет роль одного из x_i в написании формулы $\psi_2(x)$. Таким образом, $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle \models \psi_2'(S_1, S_2)$ тогда и только тогда, когда $S_1 = \{\varnothing, n, B\}$, $|B| = 2$, $S_2 = \{\varnothing, n, \{i\}\}$ и $i \in B$.

Пусть

$$\begin{aligned}\psi(x, y) = &\psi(x) \,\&\, \mathrm{At}(y) \,\&\, \forall z, u(\mathrm{Coat}(z) \,\&\, u \wedge z = 0 \,\&\, u \vee z = 1 \,\& \\ &\forall v((\psi_2(v) \,\&\, \psi_2'(v, x) \to \mathrm{rank}(z \vee u) = 3) \to y \leqslant z).\end{aligned}$$

Легко видеть, что для любых $S', S'' \in \mathrm{Sub}\, n$ выполнено

$$\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle \models \psi(S', S'')$$

тогда, и только тогда, когда $S' = S_i$, $S'' = \{\varnothing, n, B\}$ для некоторых $i \in n$, $B \subseteq n$ и $i \notin B$.

Пусть теперь φ — некоторый автоморфизм решетки $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle$. Т.к. φ сохраняет формульные подмножества, существует перестановка π множества n, такая что $\varphi(S_i) = S_{\pi(i)}$, а т.к.

$$\psi(S', S'') \Leftrightarrow \psi(\varphi(S'), \varphi(S'')),$$

для любого $S = \{\varnothing, n, B\}$ $(B \subseteq n)$ имеет место равенство $\varphi(S) = \{\varnothing, n, \{\pi(i) \mid \in B\}\}$. Тем самым, φ совпадает на решетке $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C\rangle$ с автоморфизмом φ_π, индуцированном перестановкой π.

Формулы $\psi_1(x)$ и $\psi(x, y)$ позволяют проинтерпретировать в элементарной теории решеток $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C \rangle$ модели вида $\langle n \cup P(n); \in \rangle$, состоящие из элементов множества n, его подмножеств и отношения теоретико-множественной принадлежности. Последнее же, в свою очередь, позволяет элементарной формулой выделить в решетках $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C \rangle$ элементы z вида $\mathrm{Sub}\, T$ для $T \in \mathrm{Part}\ n$ (см., доказательство теоремы 1). Достаточно записать, что для каждого элемента x решетки

$$\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C \rangle,$$

удовлетворяющего формуле $\psi_1(x)$ под элементом z существует атом z_x, такой что соответствующее ему подмножество множества n минимально по включению среди подмножеств, соответствующих атомам решетки, лежащим под z, $x \in z_x$, при этом если z_{x_1} и z_{x_2} — два различных подобных элемента, то соответствующие им подмножества множества n дизъюнктны и кроме того, подмножества, соответствующие атомам, лежащим под z, являются объединениями подмножеств, соответствующих элементам вида z_x. Фиксация любых двух подобных элементов $\mathrm{Sub}\, T_1$, $\mathrm{Sub}\, T_2$ позволяет проинтерпретировать в элементарных теориях моделей $\langle \mathrm{Sub}\, n; \wedge_C, \vee_C \rangle$ модели вида $\langle n; \sim_1, \sim_2 \rangle$ с двумя произвольными отношениями эквивалентности. Хорошо известная же (см., к примеру, [1]) наследственная неразрешимость элементарной теории этого класса влечет неразрешимость элементарной теории класса решеток вида $\langle \mathrm{Sub}; \wedge_C, \vee_C \rangle$, а значит и класса решеток вида $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P \rangle$.

Резюмируем отмеченные свойства решеток $\langle PCL_A; \wedge_P, \vee_P \rangle$ в следующем утверждении.

Теорема 2. *а) Длина решетки $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ равна $2^n - 2$, число ее коатомов так же равно $2^n - 2$, число атомов — n;*
б) решетки $\langle PCL_m; \wedge_P, \vee_P \rangle$ являются ретрактами решеток

$$\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$$

при $n \geqslant m$;
в) графы решеток $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ не планарны, при $n \geqslant 3$;
г) все автоморфизмы решеток $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ индуцируются перестановками множества n;
д) элементарная теория класса решеток $\{\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle\}$ наследственно неразрешима.

Среди вопросов, связанных с решетками вида $\langle PCL_n; \wedge_P, \vee_P \rangle$ естественными, но остающимися открытыми представляются оценки (в том числе и асимптотические) числа элементов в этих решетках.

Остановимся еще на одном вопросе, связанном с клонами вида $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A})$. Включения

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{PTr}() \subseteq F(A)$$

для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ инициируют интерес к случаям равенств $\mathrm{PTr}(\mathfrak{A}) = F(A)$ и $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A}) = \mathrm{PTr}(\mathfrak{A})$ соответственно. В первом случае алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *точечно термально примальной* и очевидно, что $\mathfrak{A}$ является таковой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ не содержит собственных подалгебр. Во втором случае алгебру $\mathfrak{A}$ назовем *точечно термально полной*. Очевидно, что если $\mathfrak{A}$ точечно термально полна, то она не обладает нетривиальными внутренними гомоморфизмами. Напомним, что внутренний гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ — это любой гомоморфизм одной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$ на другую и подобный гомоморфизм нетривиален, если он нетождественен и если его образ неодноэлементен.

Напомним также, что для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ неиндексированной прямой степенью $\mathfrak{A}^{(I)}$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется алгебра $\langle A^I; \sigma^{(I)} \rangle$, сигнатура которой состоит из функций $f_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, где φ — любое отображение множества I в совокупность $\mathrm{Tr}_n(\mathfrak{A})$ всех n-местных термов сигнатуры σ. При этом для $g_1, \ldots, g_n \in A^I$ имеет место

$$f_\varphi(g_1, \ldots, g_n)(i) = \varphi(i)(g_1(i), \ldots, g_n(i))$$

для любого $i \in I$.

Очевидно, что условие точечно термальной полноты алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ равносильно тому, что

основные множества подалгебр алгебр $\mathfrak{A}^{A^n}$ и $\mathfrak{A}^{(A^n)}$ совпадают. $(*)$

Столь же очевидно, что необходимое условие отсутствия нетривиальных внутренних гомоморфизмов точечно термально полных алгебр есть частный случай критерия $(*)$.

Наконец, естественным, в свете определения точечно термальных функций представляется и следующее понятие. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на основном множестве A алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *локально термальной*, если для любого натурального m и любых $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m \in A^n$ существует терм $t_{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m}(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры $\mathfrak{A}$, такой что для всех $i \leqslant m$ имеют место равенства

$$f(\overline{a}_i) = t_{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m}(\overline{a}_i).$$

Через $\mathrm{LTr}(\mathfrak{A})$ обозначим совокупность всех локально термальных для $\mathfrak{A}$ функций.

Для любого функционального клона K на множестве A через $\overline{K}^L$ обозначим клон $\mathrm{LTr}(\mathfrak{A}_k)$. Очевидно, что оператор $K \to \overline{K}^L$ является оператором замыкания на решетке всех функциональных клонов на множестве A. Клоны вида $\overline{K}^L$ будем называть *локально термальными замыканиями* клонов K.

Далее для любого натурального n и любого клона K через K_n будем обозначать совокупность n-местных функций из K. Очевидно, что для любого $n \in \omega$ при рассмотрении n-местных функций на A, как элементов множества A^{A^n}, множество $\overline{K}_n^L$ является замыканием совокупности K_n в тихоновской топологии на множестве A^{A^n} при исходной дискретной топологии на A. Клоны K, удовлетворяющие равенству $\overline{K}^L = K$, будем называть *локально термально полными.*

Локально термально полными являются любые клоны на конечных множествах. Безусловно точечно термально полные клоны являются и локально полными. Примером локально термально полных клонов на бесконечных множествах являются, в частности, совокупности термальных функций любой бесконечной булевой алгебры. На самом деле очевидно следующее более общее утверждение.

Теорема 3. *Если алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ порождает локально конечное многообразие, то клон* $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ *является локально термально полным на множестве A.*

Утверждение теоремы очевидно в силу того, что на A в условиях теоремы имеется лишь конечное число попарно различных термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$ от n переменных для любого натурального n.

Столь же очевидно, что условия локальной конечности лишь самой алгебры $\mathfrak{A}$ не достаточно. Действительно, пусть A_n $(n \in \omega)$ дизъюнктные n-элементные множества, $\sigma = \langle f_m(x) \,|\, m \in \omega \rangle$ и f_m являются циклами на множествах A_m для $m \leqslant n$ и f_m тождественны на A при $m > n$. Очевидно, что клон термальных функций локально конечной алгебры $\mathfrak{A}$, являющейся дизъюнктным объединением алгебр $\mathfrak{A}_n = \langle A_n; \sigma \rangle$, не является локально термально полным.

Список литературы

1. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели / Ю. Л. Ершов. – М. : Наука, 1980.
2. Пинус А. Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений / А. Г. Пинус. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002.
3. Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений / А. Г. Пинус // Успехи мат. наук. – 2001. – Т. 56, № 4. – С. 35–72.
4. Пинус А. Г. Производные структуры универсальных алгебр / А. Г. Пинус. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1979.
6. Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
7. Birkhoff G., Frink O. Representations of lattices by sets / G. Birkhoff, O. Frink. – Trans. Amer. Math. Soc. – 1948 – Vol. 64. – P. 299–316.
8. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Ann. of Math. Studies. – Princeton Univ. Press., 1941. – Vol. 5.

9. Pudlak P., Tuma J. Every finite lattice can be embedded into a finite partition lattice / P. Pudlak, J. Tuma // Alg. univ. – 1980. – Vol. 10, N 1. – P. 74–95.
10. Whitman P. M. Lattices, equivalence relations and subgroups / P. M. Whitman // Bulletin of AMS. – 1946. – Vol. 52. – P. 507–522.

A.G. Pinus

The point-termal complete clones of functions and the lattices of lattices of all subalgebras of algebras with fixed basic set

Abstract. It is investigated the structure of the lattice of point-termal complete clones of functions on a fixed set

Keywords: point-termal functions, clones, the lattices of subalgebras

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: (383)346-11-66 (ag.pinus@gmail.com)

Pinus Alexander, professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marks St., Novosibirsk, 630092, Phone: (383)3461166
(ag.pinus@gmail.com)