Серия «Математика»
2015. Т. 13. С. 3—15

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.642

Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре k-шаговыми методами *

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

О. С. Будникова
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье описаны численные методы решения интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в ядре. Предлагаемые методы основаны на явных методах типа Адамса и формуле интегрирования произведений для интегральной части и на эктраполяционных формулах для главной части. Получены веса квадратурных формул. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения, многошаговые методы, методы Адамса, слабая особенность.

1. Введение

В 1983 году была опубликована работа [7], в которой для моделирования различных развивающихся систем используются системы взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра первого и второго рода. Такие системы называют интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ).

Разработка численных методов решения таких задач еще в самом начале пути своего развития. Первая работа была опубликована в 1987 году [11], в которой был предложен метод, основанный на квадратурной формуле правых прямоугольников. Затем, уже в 2000-х гг., вышло несколько статей, посвященных численному решению полуявных ИАУ [16], [13], [15], [18], в которых рассматриваются коллокационнные

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-31224мол_а и 15-01-03228 А.

методы и методы типа Рунге – Кутта. Работы [5], [4], [3] посвящены построению и исследованию свойств многошаговых методов для ИАУ.

Данная статья посвящена численному решению ИАУ со слабой особенностью в ядре. Работ по качественному исследованию и численному решению таких уравннений почти нет. Достаточные условия существования единственного непрерывного решения таких задач приведены в [14]. Численному решению полуявных ИАУ со слабой особенностью в ядре посвящена статья [19] с применением полиномов наилучшего приближения. Недавно вышла статья [12], посвященная качественному исследованию ИАУ со слабой особенностью в ядре.

Цель данной работы — построение многошаговых методов для численного решения ИАУ со слабой особенностью, основанных на экстрополяции для первого слагаемого, на явных методах типа Адамса для интегрального слагаемого и на формуле интегрирования произведений [20].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t)+\int\limits_0^t (t-s)^{-a}K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \leq s \leq t \leq 1, 0 < a < 1, \quad (2.1)$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — $(n\times n)$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ n -мерные известная и искомая вектор-функции. Предполагается, что элементы $A(t), K(t,s), f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи 2.1 будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$ обращающую 2.1 в тождество.

Будем изучать задачи 2.1 с условием

$$A(t) \neq 0, det A(t) \equiv 0. \quad (2.2)$$

Задачи 2.1 с условием 2.2 будем называть ИАУ со слабой особенностью в ядре или ИАУ типа Абеля.

Приведем некоторые известные определения и утверждения, которые понадабятся нам в дальнейшем изложении.

Определение 1. [11]. *Пучок матриц* $\lambda A(t) + B(t)$ *удовлетворяет критерию ранг-степень на отрезке* $[0,1]$ *(имеет индекс один, имеет простую структуру), если*

$$rank A(t) = deg(det(\lambda A(t) + B(t))) = m = const \; \forall t \in [0,1],$$

где λ *скаляр, символ deg (.) означает показатель степени многочлена (.), а операция deg(0) не определена.*

Теорема 1. [14]. *Пусть для задачи 2.1 с условием 2.2 выполнены следующие требования:*
1. элементы

$$A(t) \in C^1_{[0,1]},\ f(t) \in C^1_{[0,1]},\ K(t,s) \in C^1_{\Delta},\ \Delta \ = \ \{0 \le s \ \le \ t \ \le \ 1\};$$

2. пучок $\lambda A(t)+K(t,t)$ *удовлетворяет критерию ранг–степень на всем отрезке* $[0,1]$*;*
3. $rankA(0) = rank(A(0) \mid f(0))$.
Тогда исходная система имеет единственное непрерывное решение.

Прокомментируем условия теоремы. Условия гладкости входных данных — стандартные условия, необходимые при проведении доказательства теоремы. Если подставим в 2.1 значение $t = 0$, то получим систему $A(0)x(0) = f(0)$, разрешимость которой гарантирует третье условие. Второе условие Теоремы 1 гарантирует отсутствие на отрезке $[0,1]$ сингулярных точек, т. е. точек, в которых решение может не существовать или через которые проходит неединственное решение.

Если $x(t)$ — скалярная функция, то второе условие Теоремы 1 с условием 2.2 означает, что $K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$, а третье условие теоремы примет вид $f(0) = 0$. Это условия разрешимости интегрального уравнения Вольтерра I рода со слабой особенностью ядра (см., например, [13], [8]).

Если третье условие теоремы является необходимым, то второе только достаточным. Точки, в которых ранг матрицы $A(t)$ изменяется, не всегда являются сингулярными. Покажем это на примерах.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{1-a}}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^{2-a}}{(1-a)(2-a)} \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1], a \in (0,1).$$

Данная система имеет семейство решений $y(t) = const, z(t) = t$.

В данном примере второе условие теоремы 1 нарушено в точке $t = 0$. В самом деле,

$$\lambda A(t) + K(t,t) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{t^{1-a}}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\frac{t^{1-a}}{1-a} - 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $rankA(t) = \begin{cases} 0, t = 0 \\ 1, t \neq 0 \end{cases}$ является переменным и

$$deg(det(\lambda A(t) + K(t,t))) = deg(\lambda\frac{t}{2} - 1) = \begin{cases} 0, t = 0 \\ 1, t \neq 0. \end{cases}$$

Степень определителя пучка матриц меняется в той же точке, что и ранг матрицы $A(t)$, т. е. $t = 0$ является сингулярной.

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{t^{1-a}}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \int_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{t^{2-a}}{(1-a)(2-a)} \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1],\ a \in (0,1).$$

Эта система имеет единственное решение $y(t) = \frac{t}{2-a},\ z(t) = t$.

Выпишем пучок матриц

$$\lambda A(t) + K(t,t) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{t^{1-a}}{1-a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\frac{t^{1-a}}{1-a} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $rankA(t) = \begin{cases} 0, t = 0 \\ 1, t \neq 0. \end{cases}$, однако

$$deg(det(\lambda A(t) + K(t,t))) = deg(1) = 0.$$

Степень определителя пучка матриц не зависит от переменной t.

Если матричный пучок $\lambda A(t) + K(t,t)$ не удовлетворяет критерию ранг-степень, то исследование наталкивается на большие трудности, так как система 2.1 с условием 2.2 может иметь множество решений.

3. Численный метод

Приведем описание численных методов для рассматриваемой задачи 2.1 с условием 2.2.

Эффективным способом борьбы со слабыми особенностями является выделение весовой функции и применение квадратурных формул соответствующих данной весовой функций [2]. Тогда возникает вопрос о выборе подходящих квадратурных формул. В данной статье рассмотрены методы, основанные на явных методах типа Адамса, так как данные методы зарекомендовали себя при численном решении интегральных уравнений Вольтерра первого рода с ядром на диагонали не равного нулю [10].

Так явные методы Адамса, описание которых можно найти, например в [10], [17], [3] с весовой функцией $p_a(t,s) = (t-s)^{-a}, a \in (0,1)$ примут следующий вид.

Зададим на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, i = 1, 2, \dots, N,\ h = \frac{1}{N}.$$

Тогда для заданной функции $g(t)$

$$\int_0^{t_{i+1}} (t-s)^{-a} g(\tau)d\tau = \int_0^{t_{k+1}} (t-s)^{-a} g(\tau)d\tau + \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t-s)^{-a} g(\tau)d\tau \approx$$

$$\approx \int_0^{t_{k+1}} (t_{i+1}-s)^{-a} L_{k+1}^0(g_0, g_1, ..., g_k, \tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{i+1}-s)^{-a} L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, \tau)d\tau = \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} g_l, \tag{3.1}$$

где $L_{k+1}^j(g_{j-k}, g_{j-k+1}, ..., g_j, t)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки $(g_{j-k}, t_{j-k}), (g_{j-k+1}, t_{j-k+1}), ..., (g_j, t_j),\ j = k+1, k+2, \cdots, i$.

С учетом выше сказанного, предлагаемые многошаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j} + \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1},\ i = k, k+1, \dots, N-1. \tag{3.2}$$

Предполагается, что начальные значения $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ заранее вычислены с достаточной точностью.

Немного подробнее о вычислении коэффициентов α_j. Выражение $A_{i+1} x_{i+1}$ будем находить следующим образом.

Пусть $L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t)$ — интерполяционный полином степени k, проходящий через точки (x_{i-k}, t_{i-k}), (x_{i-k+1}, t_{i-k+1}), ..., (x_i, t_i). Будем вычислять x_{i+1} как значение данного интерполяционного полинома в точке $t = t_{i+1}$, то есть

$$x_{i+1} \approx L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1}, ..., x_i, t_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x_{i-j}.$$

Выпишем коэффициенты α_j для различных $k = 1, 2, ..., 5$ см. таблицу 1.

Далее выписаны $k-$шаговые алгоритмы при $k = 0, 1, 2$.

Например, при $k = 0$ получим метод

$$A_{i+1} x_i + \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1},$$

Таблица 1

Значения коэффициентов α_j

k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	2	-1	–	–	–	–
2	3	-3	1	–	–	–
3	4	-6	4	-1	–	–
4	5	-10	10	-5	1	–
5	6	-15	20	-15	6	-1

с весами

$$\omega_{i+1,l} = \frac{((i+1-l)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-l)h)^{1-a}}{1-a}.$$

При $k = 1$ получим метод

$$A_{i+1}(2x_i - x_{i-1}) + \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1},$$

веса имеют следующий вид:

$$\omega_{i+1,0} = D_{0,i}, i = 1, 2, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,1} = D_{1,i}, i = 1, \quad \omega_{i+1,1} = D_{1,i} + D_{2,i-j}|_{j=2}, i = 2, 3, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,l} = D_{3,i-j}|_{j=l} + D_{2,i-j}|_{j=l+1}, i = 2, 3, ..., N, l = 2, ..., i-1,$$

$$\omega_{i+1,i} = D_{3,i-j}|_{j=i}, i = 2, 3, ..., N.$$

Здесь приняты обозначения:

$$D_{0,i} = \frac{((i-1)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i+1)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i-1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} - \frac{((i+1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{1,i} = -2\frac{((i-1)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} + \frac{((i+1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{2,i-j} = \frac{((i-j)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} - \frac{((i+1-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)},$$

$$D_{3,i-j} = -2\frac{((i-j)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i+1-j)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{((i-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} + \frac{((i+1-j)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)}.$$

При $k = 2$ получим метод

$$A_{i+1}(3x_i - 3x_{i-1} + x_{i-2}) + \sum_{l=0}^{i} \omega_{i+1,l} K_{i+1,l} x_l = f_{i+1},$$

веса имеют следующий вид:

$$\omega_{i+1,0} = D_{0,i}, i = 2, 3, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,1} = D_{1,i}, i = 2,\ \ \omega_{i+1,1} = D_{1,i} + D_{3,i-l}|_{l=3}, i = 3, 4, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,2} = D_{2,i}, i = 2,\ \omega_{i+1,2} = D_{2,i} + D_{4,i-l}|_{l=3}, i = 3,$$

$$\omega_{i+1,2} = D_{2,i} + D_{4,i-l}|_{l=3} + D_{3,i-l}|_{l=4}, i = 4, 5, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,m} = D_{5,i-l}|_{l=m} + D_{4,i-l}|_{l=m+1} + D_{3,i-l}|_{l=m+2}, m = 3, ..., i-2,\ i = 5, ..., N,$$

$$\omega_{i+1,i-1} = D_{5,i-l}|_{l=i-1} + D_{4,i-l}|_{l=i},\ i = 4, 5..., N,$$

$$\omega_{i+1,i} = D_{5,i-l}|_{l=i}, i = 4, 5, ..., N.$$

Здесь приняты обозначения:

$$D_{0,i} = -\frac{((i-2)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i+1)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{3((i-2)h)^{2-a}}{2h(1-a)(2-a)} -$$

$$-\frac{3((i+1)h)^{2-a}}{2h(1-a)(2-a)} - \frac{((i-2)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} + \frac{((i+1)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$D_{1,i} = 3\frac{((i-2)h)^{1-a}}{1-a} + 4\frac{((i-2)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} + 2\frac{((i+1)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} +$$

$$+2\frac{((i-2)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} - 2\frac{((i+1)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$D_{2,i} = -3\frac{((i-2)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{5((i-2)h)^{2-a}}{2h(1-a)(2-a)} - \frac{((i+1)h)^{2-a}}{2h(1-a)(2-a)} -$$

$$-\frac{((i-2)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} + \frac{((i+1)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$D_{3,i-l} = -\frac{((i-l)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{3}{2}\frac{((i-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} + \frac{1}{2}\frac{((i+1-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} -$$

$$-\frac{((i-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} + \frac{((i+1-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$D_{4,i-l} = 3\frac{((i-l)h)^{1-a}}{1-a} + 4\frac{((i-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} - 2\frac{((i+1-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} +$$

$$+2\frac{((i-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} - 2\frac{((i+1-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)},$$

$$D_{5,i-l} = -3\frac{((i-l)h)^{1-a}}{1-a} + \frac{((i+1-l)h)^{1-a}}{1-a} - \frac{5}{2}\frac{((i-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} +$$

$$+\frac{3}{2}\frac{((i+1-l)h)^{2-a}}{h(1-a)(2-a)} - \frac{((i-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)} + \frac{((i+1-l)h)^{3-a}}{h^2(1-a)(2-a)(3-a)}.$$

Веса для $k = 3, 4, 5$ не приведены из-за громозкости формул.

4. Численные эксперименты

Численные расчеты проводились на нескольких тестовых ИАУ со слабой особенностью ядра.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t (t-s)^{-a} \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ -2se^{-s} & e^{t+s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$\begin{pmatrix} e^t + te^{-t} + e^t \frac{t^{1-a}}{1-a} \\ te^t + t^2 e^{-t} - 2\frac{t^{2-a}}{(1-a)(2-a)} + e^t \frac{t^{1-a}}{1-a} \end{pmatrix},$$

$$t \in [0,1], a \in (0,1).$$

Точное решение: $x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{-t}$.

Результаты расчетов приведены в таблицах.

Таблица 2

для примера 3, $k = 1$

h	$pog(a = 0)$	$pog(a = 1/97)$	$pog(a = 1/47)$	$pog(a = 1/12)$	$pog(a = 1/11)$
$0,2$	0.04038	0.04023	0.04007	0.03911	0.038986
$0,1$	0.010122	0.01007	0.010015	0.00977	0.00974
$0,05$	0.00258	0.00258	0.0025687	0.002489	0.0024783

Таблица 3

для примера 3, $k = 1$

h	$pog(a = 1/7)$	$pog(a = 1/5)$	$pog(a = 1/3)$	$pog(a = 1/2)$	$pog(a = 3/5)$
$0,2$	0.03813	0.037123	0.03447	0.03019	0.0268
$0,1$	0.009536	0.0092988	0.00868	0.0077	0.0069
$0,05$	0.002402	0.0023102	0.00216	0.00193	0.00175

Таблица 4

для примера 3, $k = 1$

h	$pog(a = 3/4)$	$pog(a = 4/5)$	$pog(a = 0.9)$	$pog(a = 0.99)$	$pog(a = 0.999)$
$0,2$	0.0198	0.0168	0.0094	0.00102	0.000103
$0,1$	0.0052	0.0044	0.0025	0.00028	0.0000286
$0,05$	0.00133	0.0011	0.00065	0.000073	0.00000745

Таблица 5

для примера 3, $k = 2$

h	$pog(a = 0)$	$pog(a = 1/97)$	$pog(a = 1/47)$	$pog(a = 1/12)$	$pog(a = 1/11)$
$0,2$	0.0065995	0.00657	0.006535	0.006337	0.006311
$0,1$	0.0008275	0.000823	0.0008190	0.000794	0.000790
$0,05$	0.000101	0.00010	0.000100	0.0000976	0.0000973

Таблица 6

для примера 3, $k = 2$

h	$pog(a = 1/7)$	$pog(a = 1/5)$	$pog(a = 1/3)$	$pog(a = 1/2)$	$pog(a = 3/5)$
$0,2$	0.006131	0.0059172	0.005351	0.004482	0.0038475
$0,1$	0.0007681	0.0007426	0.000678	0.000582	0.0005106
$0,05$	0.0000952	0.0000928	0.0000864	0.000076	0.0000676

Таблица 7

для примера 3, $k = 2$

h	$pog(a = 3/4)$	$pog(a = 4/5)$	$pog(a = 0.9)$	$pog(a = 0.99)$	$pog(a = 0.999)$
$0,2$	0.002677	0.002215	0.001173	0.000121	0.000012
$0,1$	0.0003714	0.000313	0.000174	0.000019	0.0000019
$0,05$	0.000050	0.000042	0.000024	0.0000026	$2.65 \cdot 10^{-7}$

Анализ результатов численных расчетов показал, что предложенные $k-$шаговые алгоритмы при малых значениях a имеют $k + 1$ порядок точности. Порядок точности уменьшается на единицу при $a \to 1_{-0}$.

Простым примером, рассматриваемых задач, являются уравнения

$$A(t)x(t+\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 \le s \le t \le 1, 0 < a < 1, det A(t) \equiv 0.$$

Данный класс имеет большое практическое приложение.

Пример 4. Рассмотрим ИАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+t}} + \pi - 2arctg\frac{1}{\sqrt{t}} \\ \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad t \in (0,1], a \in (0,1).$$

Точное решение: $x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}}, x_2(t) = 1 + t$.

Результаты численных расчетов приведены в таблице 4.

Таблица 7

h	$pog(k=1)$	$pog(k=2)$
$0,2$	0.0037266	0.0017753
$0,1$	0.0006868	0.0000609
$0,05$	0.0001488	0.0000063

Как видно из результатов численных расчетов, уменьшение шага в два раза влечет уменьшение погрешности в более чем 4 раза для одношагового метода и в более чем 8 раз для двушагового метода. Это указывает на $(k+1)$ порядок сходимости.

Анализируя численные расчеты в целом, приходим к выводу, что порядок погрешности находится в диапазоне между k и $k+1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ: гранты 14-01-31224 мол_а и 15-01-03228 А.

Список литературы

1. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы / А. С. Апарцин. – Новосибирск : Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1999.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы /Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975. – 632 с.
3. Будникова О. С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами / О. С. Будникова, М. В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 829–839
4. Булатов М. В. Исследование многошаговых методов для интегро-алгебраичес-ких уравнений: построение областей устойчивости / М. В. Булатов, О. С. Будникова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2013. – Т. 7 – С. 16–27.

5. Булатов М. В. Об устойчивых алгоритмах численного решения интегро-алгебраических уравнений / М. В. Булатов, О. С. Будникова // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 4. – С. 5–14.
6. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, решения / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – Киев : Наукова думка, 1986.
7. Глушков В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 350 с.
8. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и Техника, 1987.
9. Сизиков В. С. Численное решение сингулярного интегрального уравнения Абеля обобщенным методом квадратур / В. С. Сизиков, А. В. Смирнов, Б. А. Федоров // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 8. – С. 62–70.
10. Тен Мен Ян Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода : дис. ... канд. физ.-мат. наук / Тен Мен Ян. – Иркутск, 1985. – 215 с.
11. Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск : Наука, 1987. – С. 231–239.
12. Bulatov M. V. Existence and Uniqueness of Solutions to Weakly Singular Integral-Algebraic and Integro-Differential Equations / M. V. Bulatov, P. M. Lima, E. B. Weinmüller // Central European Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 12, N 2. – P. 308–321.
13. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations / H. Brunner. – Unversity Press, Cambridge, 2004.
14. Brunner H. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels / H. Brunner, M. V. Bulatov // Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar: Optimization Methods and their Applications, 1998. – P. 64-–67.
15. Hadizadeh M. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 / M. Hadizadeh, F. Ghoreishi, S. Pishbin // Appl. Numer. Math. – 2011. – Vol. 61, N 1. – P.131–148.
16. Kauthen J. P. The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by pollinomial spline collocation methods / J. P. Kauthen // Math. Comp. – 2000. – N 236. – P. 1503–1514.
17. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations / P. Linz. – SIAM, Philadelphia, 1985.
18. Pishbin S. On the numerical solution of integral equations of the fourh kind with higher index: differentiability and tractability index-3 / S. Pishbin // Journal of Mathematical Modeling. – 2015/ – Vol. 2, N 2. – P. 156–169.
19. Pishbin S. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments / S. Pishbin, F. Ghoreishi, M. Hadizadeh // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2013. – Vol. 245, N 1. – P. 121–132.
20. Weiss R. A. Product Integration Method for a Class of Singular First Kind Volterra Equations / R. Wiess, R. S. Anderssen // Numer. Math. – 1972. – Vol. 18, N 2. – P. 442–456.

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952) 42-71-00 (e-mail: mvbul@icc.ru)

Будникова Ольга Сергеевна, кандидат физико-математических наук, ассистент, кафедра математики и методики обучения математике, Педагогический институт, Иркутский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)243345
(e-mail: osbud@mail.ru)

M. V. Bulatov, O. S. Budnikova

Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations with Weakly Singular Kernels by $k-$step Methods

Abstract. In this paper we describe numerical methods for solution integral-algebraic equations wiht weakly singular kernels. Methods are based on explicit Adam's methods, product integration methods for the integral part and on extrapolation formulas for the main part of the equation are proposed. We got weights of quadrature formulas. Presented results of numerical experiments.

Keywords: integral-algebraic equations, multistep methods, Adam's methods, weakly singular, numerical methods.

References

1. Apartsyn A.S. Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind. Nauka, Novosibirsk, 1999; VSP, Utrecht, 2003.
2. Bakhvalov N.S. Numerical Methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations. Moscow, Nauka,1975; Moscow, Mir, 1977.
3. Budnikova O.S., Bulatov M.V. Numerical solution of integral-algebraic equations for multistep methods. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no 5 , pp. 691-701.
4. Bulatov M.V., Budnikova O.S. An analysis of multistep methods for solving integral-algebraic equations: Construction of stability domains. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no 9, pp. 1260-1271.
5. Bulatov M.V., Budnikova O.S. On stable algorithms of numerical solution of integral-algebraic equations. *Bulletin of the South Ural State University, Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no 4, pp. 5-14.
6. Verlan' A.F., Sizikov V.S. Integral equations: methods, algoritms, solutions [*Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, reshenija*]. Kiev, Naukova dumka, 1986.
7. Gluhkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. Simulation of Evolving Systems (in Russian). Moscow, Nauka, 1983.
8. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order, and some applications(in Russian). Minsk, Nauka and Tehnika, 1987.
9. Sizikov V.S., Smirnov A.V., Fedorov B.A.Numerical solution of the singular Abel integral equation by the generalized quadrature method. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2004, vol. 48, no 8, pp. 59-66.
10. Ten Men YanApproximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind(in Russian). Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Irkutsk, 1985.

11. Chistyakov V.F. On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and Their Integrals Analogues. *Lyapunov Functions and Applications.* Novosibirsk, Nauka, 1987, pp. 231-239.
12. Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmüller E.B. Existence and Uniqueness of Solutions to Weakly Singular Integral-Algebraic and Integro-Differential Equations. *Central European Journal of Mathematics*, 2014, vol. 12, no 2, pp. 308-321.
13. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functioal Equations. Unversity Press, Cambridge, 2004.
14. Brunner H., Bulatov M.V. On singular systems of integral equations with weakly singular kernels. *Proceeding of the 11-th Baikal International School Seminar: Optimization Methods and their Applications*, 1998, pp. 64-67.
15. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2. *Appl. Numer. Math.*, 2011, vol. 61, no 1, p. 131-148.
16. Kauthen J.P. The numerical solution of integral-algebraic equations of index-1 by pollinomial spline collocation methods. *Math. Comp.*, 2000, no 236, pp. 1503-1514.
17. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia, 1985.
18. Pishbin S. On the numerical solution of integral equations of the fourh kind with higher index: differentiability and tractability index-3 . *Journal of Mathematical Modeling*, 2015, vol. 2, no 2, pp. 156-169.
19. Pishbin S., Hadizadeh M., Ghoreishi F. The semi-explicit Volterra integral algebraic equations with weakly singular kernel: The numerical treatments. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, vol. 245, no 1, pp. 121–132.
20. Weiss R.A., Anderssen R.S. Product Integration Method for a Class of Singular First Kind Volterra Equations. *Numer. Math.*, 1972, vol. 18, no 2, pp. 442-456.

Bulatov Mikhail Valer'yanovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033 tel.: (3952) 42-71-00
(e-mail: mvbul@icc.ru)

Budnikova Olga Sergeevna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), assistant, Pedagogical Institute, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 tel.: (3952)243345 (e-mail: osbud@mail.ru)