**Серия «Математика»**
2015. Т. 13. С. 16—31

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.911.5

# Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений *

С. В. Корнев
*Воронежский государственный педагогический университет*

**Аннотация.**

В настоящей работе предлагаются новые методы решения периодической задачи для нелинейного объекта, описываемого дифференциальным включением следующего вида:

$$x'(t) \in F(t, x(t)).$$

В первой части работы предполагается, что многозначное отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ имеет выпуклые компактные значения, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и $T$-периодично по первому аргументу. При сделанных предположениях определен замкнутый мультиоператор суперпозиции $P_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t, x(t))$. Во второй части работы предполагается, что $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ является нормальным мультиотображением с компактными значениями, удовлетворяющим условию $T$-периодичности по первому аргументу. Заметим, что класс нормальных мультиотображений достаточно обширен. В него входят, например ограниченные почти полунепрерывные снизу мультиотображения с компактными значениями. В обоих случаях для исследования рассматриваемой задачи применяется обобщенная интегральная направляющая функция. Существенным развитием понятия направляющей функции является тот факт, что основное условие направляемости предполагается выполненным, во-первых, в интегральной форме; во-вторых, в области, определяемой по самой направляющей функции; в-третьих, не обязательно для всех суммируемых сечений мультиоператора суперпозиции. Применение теории степени совпадения пары отображений и теории многозначных отображений позволяет установить разрешимость рассматриваемой периодической задачи.

**Ключевые слова:** дифференциальное включение, интегральная направляющая функция, периодические решения, степень совпадения.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00468; РФФИ-Тайвань, грант 14-01-92004; Российского научного фонда, грант 14-21-00066.

## 1. Введение

Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения задачи о существовании периодических колебаний дифференциальных уравнений является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали еще в середине XX века М. А. Красносельский и А. И. Перов (см. [5; 6]).

За более чем полувековую историю своего существования метод был развит целым рядом исследователей в различных направлениях. Отметим в этой связи два интересных направления. В основе одного из них лежит понятие усредненной направляющей функции Ж. Мовена (см. [16]). Другое связано с задачей о существовании вынужденных колебаний функционально-дифференциальных уравнений и основано на понятии интегральной направляющей функции А. Фонда (см. [10]).

В 80-е годы XX века классический метод направляющих функций был распространен на случай дифференциальных включений и использован для исследования их периодических решений (см., например [1; 11]). Заметим, что роль дифференциальных включений как математического аппарата, описывающего нелинейные управляемые системы, системы автоматического регулирования, системы с разрывными и импульсными характеристиками и другие объекты современной инженерии, механики, физики хорошо известна (см., например [1; 7; 11; 12; 13; 21]).

В настоящей работе предлагается применить метод обобщенных интегральных направляющих функций к задаче о существовании периодических колебаний в нелинейных объектах, описываемых дифференциальными включениями, правая часть которых имеет выпуклые компактные значения, удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста. Существенным отличием от статьи [3] является тот факт, что основное условие направляемости предполагается выполненным здесь хотя бы для одного суммируемого сечения мультиоператора суперпозиции $P_F$. Рассматриваемый метод оказывается эффективен и в случае, когда правая часть не обладает свойством выпуклости значений и является нормальным мультиотображением с компактными значениями. Заметим, что класс нормальных мультиотображений достаточно обширен. В него входят, например ограниченные почти полунепрерывные снизу мультиотображения с компактными значениями (этот частный случай рассмотрен в работе [4]).

Некоторые другие применения метода интегральных направляющих функций см., например, в [14; 17].

## 2. Основные обозначения и определения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [1; 11; 12; 13]). Напомним некоторые из них.

Пусть $E$ — сепарабельное банахово пространство; $L^1([a,b];E)$ обозначает банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых по Бохнеру функций $f:[a,b]\to E$.

**Определение 1.** *Непустое множество $M\subset L^1([a,b];E)$ называется разложимым, если для любых $f,g\in M$ и любого измеримого по Лебегу множества $m\subset[a,b]$ выполнено*

$$f\chi_m+g\chi_{([a,b]\setminus m)}\in M,$$

*где $\chi_m$ — характеристическая функция множества $m$.*

Пусть $(X,d_X)$ и $(Y,d_Y)$ — метрические пространства. Символами $P(Y)$ и $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых и компактных подмножеств пространства $Y$. Если $Y$ — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $Y$.

**Определение 2.** *Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0\in X$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что из того, что $d_X(x_0,x)<\delta$ следует, что $F(x)\subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ $U_\varepsilon$ обозначает $\varepsilon$-окрестность множества.*

**Определение 3.** *Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется пн. св., если оно пн. св. в каждой точке $x\in X$.*

**Определение 4.** *Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется полунепрерывным снизу (пн. сн.) в точке $x_0\in X$, если для любого открытого множества $V\subset Y$ такого, что $F(x_0)\cap V\neq\emptyset$, существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что $F(x')\cap V\neq\emptyset$ для любого $x'\in U(x_0)$.*

**Определение 5.** *Мультиотображение $F:X\to P(Y)$ называется пн. сн., если оно пн. сн. в каждой точке $x\in X$.*

**Определение 6.** *Пусть $F:X\to P(Y)$ — некоторое мультиотображение. Множество $\Gamma_F$ в декартовом произведении $X\times Y$,*

$$\Gamma_F=\{(x,y)\mid\ (x,y)\in X\times Y,\quad y\in F(x)\}$$

*называется графиком мультиотображения $F$.*

**Определение 7.** *Мультиотображение $F : X \to P(Y)$ называется замкнутым, если его график $\Gamma_F$ есть замкнутое множество в пространстве $X \times Y$.*

Мультиотображение будем называть *мультифункцией*, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

**Определение 8.** *Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется сечением мультиотображения $F$, если*

$$f(x) \in F(x) \quad \text{для каждого } x \in X.$$

Пусть $I$ — замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

**Определение 9.** *Мультифункция $F : I \to K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз*

$$F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$$

*— измеримое подмножество $I$.*

**Замечание 1.** Всякая измеримая мультифункция $F : I \to K(Y)$ обладает измеримым сечением, то есть существует такая измеримая функция $f : I \to Y$, что $f(t) \in F(t)$ почти для всех (п.в.) $t \in I$.

**Определение 10.** *Говорят, что мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, если:*

*$(i)$ для каждого $x \in X$ мультифункция $F(\cdot, x) : I \to K(Y)$ измерима;*

*$(ii)$ почти для каждого $t \in I$ мультиотображение $F(t, \cdot) : X \to K(Y)$ пн. св..*

**Определение 11.** *Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ удовлетворяет условию подлинейного роста, если существует положительная суммируемая по Лебегу на $I$ функция $\alpha(\cdot)$ такая, что п.в. $t \in I$*

$$\|F(t, x)\| := \max_{y \in F(t,x)} \|y\| \leq \alpha(t)(1 + \|x\|).$$

**Определение 12.** *Мультиотображение $F : I \times X \to K(Y)$ называется почти пн. сн., если существует последовательность непересекающихся компактных множеств $\{I_n\}, I_n \subseteq I$, таких, что*

*(i) $\mu(I \setminus \bigcup\limits_n I_n) = 0$, где $\mu$ – мера Лебега;*

*(ii) сужение $F$ на каждое множество $J_n = I_n \times X$ является пн. сн. мультиотображением.*

**Определение 13.** *Ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ назовем нормальным, если найдется мультиотображение $F : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, называемое нормальным квазисечением мультиотображения $R$, удовлетворяющее следующим условиям:*

*$(i)$ мультиотображение $F$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;*

*$(ii)$ $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \emptyset$ п.в. $t \in I,\ x \in \mathbb{R}^n$;*

*$(iii)$ каждое решение $x : I \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения $x'(t) \in F(t,x(t))$ является также решением включения $x'(t) \in R(t,x(t))$.*

**Замечание 2.** Очевидно, что всякое ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста, является нормальным. Отметим также (см., например, [8; 9; 11]), что всякое ограниченное почти пн. сн. мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным. Кроме того, всякое ограниченное мультиотображение $R : I \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее условиям Каратеодори, является нормальным.

## 3. Случай выпуклой правой части

Будем рассматривать периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{3.1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.2}$$

предполагая, что мультиотображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори, условию подлинейного роста и $T$-периодично ($T > 0$) по первому аргументу:

$$F(t,x) = F(t+T,x) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение $F$ заданным на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$).

**Замечание 3.** При сделанных предположениях определен мультиоператор суперпозиции $P_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, сопоставляющий каждой функции $x(\cdot)$ множество всех суммируемых сечений мультифункции $F(t,x(t))$. Известно, что этот мультиоператор замкнут (см., например, [1]).

Под решением задачи (3.1), (3.2) будем понимать $T$-периодическую абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую почти в каждой точке включению (3.1) и условию (3.2).

Для изучения задачи (3.1), (3.2) будем использовать топологическую степень совпадения пары отображений в следующей ситуации (см., например, [15; 18; 19; 20; 2]).

Пусть $E_1$, $E_2$ — банаховы пространства, $U \subset E_1$ — открытое ограниченное множество; $l : \operatorname{dom} l \subseteq E_1 \to E_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\operatorname{im} l \subset E_2$ замкнуто.

Рассмотрим непрерывные линейные операторы проектирования $p : E_1 \to E_1$ и $q : E_2 \to E_2$ такие, что $\operatorname{im} p = \ker l$, $\operatorname{im} l = \ker q$. Символом $l_p$ обозначается сужение оператора $l$ на $\operatorname{dom} l \cap \ker p$.

Далее, пусть непрерывный оператор $k_{p,q} : E_2 \to \operatorname{dom} l \cap \ker p$ задан соотношением $k_{p,q}(y) = l_p^{-1}(y - q(y))$, $y \in E_2$; канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \to E_2/\operatorname{im} l$ имеет вид $\pi(y) = y + \operatorname{im} l$, $y \in E_2$; а $\phi : \operatorname{coker} l \to \ker l$ – непрерывный линейный изоморфизм.

**Определение 14.** *Мультиотображение* $\mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_2)$ *называется* $l$*-компактным, если*

*(i)* $\mathcal{G}(U)$ *— ограниченное множество;*

*(ii)* $k_{p,q} \circ \mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_1)$ *является компактным мультиотображением.*

Рассмотрим теперь мультиотображение $\mathfrak{G} : \overline{U} \to Kv(E_1)$ вида

$$\mathfrak{G}(x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ \mathcal{G}(x), \quad x \in \overline{U}. \tag{3.3}$$

Легко проверить, что множество неподвижных точек $\operatorname{Fix} \mathfrak{G}$ совпадает с множеством решений Coin $(l, \mathcal{G})$ включения $l(x) \in \mathcal{G}(x)$, т.е. точек совпадения $l$ и $\mathcal{G}$.

Далее, пусть $\mathcal{G} : \overline{U} \to Kv(E_2)$ — замкнутый $l$-компактный мультиоператор такой, что $l(x) \notin \mathcal{G}(x)$ для всех $x \in \partial U$.

**Определение 15.** *Степенью совпадения* $\deg(l, \mathcal{G}, \overline{U})$ *пары* $(l, \mathcal{G})$ *назовем топологическую степень* $\deg(\Phi, \overline{U})$ *компактного мультиполя* $\Phi = i - \mathfrak{G}$, *соответствующего мультиотображению* $\mathfrak{G} : \overline{U} \to Kv(E_1)$, *заданному (3.3).*

Определенная таким образом топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами топологической степени (см., например, [15; 18; 19; 20; 2]). Напомним некоторые из них.

$\mathbf{1^0}$) Аддитивная зависимость от области.

Если $\{U_j\}_{j \in J}$ — семейство открытых непересекающихся подмножеств $U$ такое, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x) \quad \text{для всех } x \in \operatorname{dom} l \cap \overline{U} \setminus \bigcup_{j \in J} U_j,$$

то

$$\deg(l, \mathcal{G}, \overline{U}) = \sum_{j \in J} \deg(l, \mathcal{G}, \overline{U}_j).$$

$\mathbf{2^0}$) Гомотопическая инвариантность. Если $l$-компактное мультиотображение $\mathcal{G} : (\operatorname{dom} l \cap \overline{U}) \times [0,1] \to Kv(E_2)$ таково, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x, \lambda) \quad \text{для всех } (x, \lambda) \in (\operatorname{dom} l \cap \partial U) \times [0,1],$$

то степень совпадения $\deg\left(l, \mathcal{G}(\cdot,\lambda), \overline{U}\right)$ не зависит от $\lambda \in [0,1]$.

**$3^0$**) Принцип сужения отображения. Если $U_1 \subset U$ — открытое множество такое, что

$$l(x) \notin \mathcal{G}(x) \quad \text{для всех } x \in \operatorname{dom} l \cap \left(\overline{U} \backslash U_1\right),$$

то

$$\deg\left(l, \mathcal{G}, \overline{U}\right) = \deg\left(l, \mathcal{G}, \overline{U_1}\right).$$

**$4^0$**) Свойство точки совпадения. Если

$$\deg\left(l, \mathcal{G}, \overline{U}\right) \neq 0,$$

то существует точка совпадения $x \in \operatorname{dom} l \cap U$ :

$$l(x) \in \mathcal{G}(x).$$

В частности, когда $l$ — тождественный оператор, то степень совпадения является классической топологической степенью.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество. Обозначим символом $C_T$ — пространство непрерывных $T$-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$ и пусть $L^1_T$ — пространство суммируемых $T$-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\|_{L^1_T} = \int_0^T \|f(s)\| ds$.

Обозначим теперь

$$\Gamma(G) := \{x \in C_T : x(t) \in G \quad \text{для всех } t \in [0,T]\}.$$

Для функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ пусть

$$V^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in M\}, \quad \mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) > r\}.$$

Для $M \subset \mathbb{R}^n$ символом $\chi_M$ обозначается характеристическая функция множества $M$ и $M_\delta = \bigcup_{x\in M} B^n(x,\delta)$, где $B^n(x,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар с центром в точке $x$ и радиуса $\delta > 0$.

Развивая понятия, введенные в [5; 16; 3], дадим следующие определения.

**Определение 16.** *Непрерывно дифференцируемая функция $V : G \to \mathbb{R}$ называется невырожденным потенциалом, если*

$$\nabla V(x) \neq 0 \quad \textit{для всех } x \in G.$$

**Определение 17.** *Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется обобщенной интегральной направляющей функцией на $G$ для включения (3.1), если для всех функций $x \in \Gamma(G)$*

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s)\rangle\, ds \geq 0 \quad \textit{хотя бы для одного } f \in P_F(x). \tag{3.4}$$

**Замечание 4.** Отметим, что в отличие от [3], здесь условие (3.4) является менее жестким, что, очевидно, позволяет применять метод обобщенной интегральной направляющей функции к значительно более широкому классу динамических систем.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см. [15]).

**Лемма 1.** *Пусть произвольное число $r > 0$ и $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — невырожденный потенциал для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|x\| = r$. Пусть также отображение $g : C_T \to L^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ определено как*

$$(gx)(t) = -\nabla V(x(t)), \quad t \in [0,T],$$

*и $h = l - g$, где $l$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса, определенный как $(lx)(t) = x'(t)$. Тогда*

$$|\deg(l, h, \overline{B^n(0,r)})| = |\deg(\nabla V, \overline{B^n(0,r)})|,$$

*где $\deg(\nabla V, \overline{B^n(0,r)})$ обозначает топологическую степень отображения $\nabla V$ на множестве $\overline{B^n(0,r)}$.*

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что выполняются следующие условия:*

*(i) $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}_r$ являются непустыми, открытыми, ограниченными множествами, где*

$$r = \min\left\{-T \max_{u \in V^{-1}(0)} \|\nabla V(u)\|^2, - \max_{u \in V^{-1}(0)} \int_0^T |\langle \nabla V(u), f(t)\rangle|\, dt\right\},$$

$$f \in P_F^B(u);$$

*(ii) $V$ является обобщенной интегральной направляющей функцией для включения (3.1) на множестве $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{V}_0$;*

*(iii) топологическая степень $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}}_0)$ отображения $\nabla V$ на множестве $\overline{\mathcal{V}}_0$ отлична от нуля.*

*Тогда задача (3.1), (3.2) имеет $T$-периодическое решение $x \in \Gamma(\mathcal{V}_r \cup V^{-1}(r))$.*

*Доказательство.* Определим мультиотображение $B : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$ следующим образом:

$$B(x) =$$
$$= \left\{\varphi :\ |\varphi(t)| \le \alpha(t)\, \text{п.в.}\, t \in [0,T] \text{ и } \gamma(x) \int_0^T \big\langle \nabla V\big(x(s)\big), \varphi(s)\big\rangle\, ds \ge 0\right\},$$

где $\alpha(\cdot)$ — функция из условия подлинейного роста, а

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0}), \\ 1, & \text{если } x \in \Gamma(\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathcal{V}_0}). \end{cases}$$

Легко видеть, что $B$ является замкнутым мультиотображением.

Далее определим мультиотображение

$$P_F^B : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$$

как

$$P_F^B(x) = P_F(x) \cap B(x).$$

Мультиотображение $P_F^B$ как пересечение замкнутых мультиотображений замкнуто, и соотношение (3.4) будет выполняться уже для всех $f \in P_F^B(x)$.

Для невырожденного потенциала $V$ определим отображение $Y_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Y_V(x) = \begin{cases} \nabla V(x), & \text{если } \|\nabla V(x)\| \le 1, \\ \frac{\nabla V(x)}{\|\nabla V(x)\|}, & \text{если } \|\nabla V(x)\| > 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что отображение $Y_V$ непрерывно.

Зададим мультиотображение

$$H : [0,T] \times C([0,T];\mathbb{R}^n) \times [0,1] \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$$

следующим образом:

$$H(t,x,\lambda) = (1-\lambda)Y_V(x(t)) + \lambda P_F^B(x)(t).$$

Пусть $x$ – некоторое решение задачи

$$x'(t) \in H(t,x,\lambda), \quad \lambda \in [0,1), \tag{3.5}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.6}$$

Если допустить, что $V(x(t)) \le 0$ при всех $t \in [0,T]$, то, учитывая периодичность решения и предположение (ii), получим

$$0 = V(x(T)) - V(x(0)) = \int_0^T \langle \nabla V(x(s)), x'(s) \rangle \, ds =$$

$$= (1-\lambda) \int_0^T \|\nabla V(x(s))\|^2 \, ds + \lambda \int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds > 0,$$

где $f \in P_F^B(x)$.

Из полученного противоречия следует, что найдется $t_0 \in [0,T]$ такое, что

$$V(x(t_0)) > 0, \tag{3.7}$$

то есть такое, что $x(t_0) \in \mathcal{V}_0$. Если

$$V(x(t)) \geq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T],$$

то из предположения (i) имеем априорную оценку для этого решения включения (3.5). В противном случае, найдется $\tau \in [0,T]$ такое, что $V(x(\tau)) < 0$ и, следовательно,

$$\min_{t \in [0,T]} V(x(t)) = V(x(\tau)) < 0. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует существование $\sigma \in [0,T]$ такого, что или

$$\sigma < \tau, \quad V(x(\sigma)) = 0, \quad 0 > V(x(t)) \quad \text{для } t \in (\sigma,\tau], \tag{3.9}$$

или

$$\tau < \sigma, \quad V(x(\sigma)) = 0, \quad 0 > V(x(t)) \quad \text{для } t \in [\tau,\sigma).$$

Для определенности рассмотрим случай, когда выполняется (3.9) (другой случай аналогичен). Предположим сначала, что $\tau \neq 0$ (и $\tau \neq T$) и для каждого положительного целого $n$ такого, что $\tau + \frac{1}{n} < T$ определим непрерывную функцию $x_n : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ как

$$x_n(t) = \begin{cases} x(\sigma), & \text{если } t \in [0,\sigma], \\ x(t), & \text{если } t \in (\sigma,\tau], \\ x(\tau + n(\sigma-\tau)(t-\tau)), & \text{если } t \in (\tau, \tau + \frac{1}{n}], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in (\tau + \frac{1}{n}, T]. \end{cases}$$

В случае, когда $\tau = 0$ и функция $V(x(\cdot))$ достигает своего минимума в точках 0 и $T$, мы определим $x_n(\cdot)$ для достаточно больших $n$ таких, что $0 + \frac{1}{n} < \sigma$, следующим образом:

$$x_n(t) = \begin{cases} x(\tau + n(\sigma-\tau)t), & \text{если } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in (\frac{1}{n}, \sigma], \\ x(t), & \text{если } t \in (\sigma, T]. \end{cases}$$

В каждом случае $x_n(\cdot)$ является последовательностью непрерывных и $T$-периодических функций таких, что $V(x(\tau)) \leq V(x_n(t)) \leq 0$, сходящейся на $[0,T]$ к функции $\xi(\cdot)$, определенной как

$$\xi(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in [\sigma,\tau], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in [0,T] \setminus [\sigma,\tau], \end{cases}$$

и такой, что $V(x(\tau)) \leq V(\xi(t)) \leq 0$. Из предположения (ii) для всех достаточно больших $n$ имеем

$$\int_0^T \langle \nabla V(x_n(s)), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \text{для всех } \; f \in P_F^B(x_n).$$

Но тогда

$$\int_0^T \langle \nabla V(\xi(s)), f(s)\rangle\, ds \geq 0 \quad \text{для всех} \;\; f \in P_F^B(\xi),$$

и получаем, что

$$0 < \left( \int_\sigma^\tau + \int_{[0,T]\setminus[\sigma,\tau]} \right) [(1-\lambda)\|\nabla V(\xi(s))\|^2 + \lambda \langle \nabla V(\xi(s)), f(s)\rangle]\, ds =$$

$$= \int_\sigma^\tau \langle \nabla V(x(s)), x'(s)\rangle ds + \int_{[0,T]\setminus[\sigma,\tau]} [(1-\lambda)\|\nabla V(\xi(s))\|^2 + \lambda \langle \nabla V(\xi(s)), f(s)\rangle]\, ds,$$

где $f \in P_F^B(\xi)$, или

$$0 < V(x(\tau)) + \int_{[0,T]\setminus[\sigma,\tau]} [(1-\lambda)\|\nabla V(x(\sigma))\|^2 + \lambda \langle \nabla V(x(\sigma)), f(s)\rangle]\, ds,$$

где $f \in P_F^B(x)$.

Откуда имеем

$$V(x(\tau)) > \int_{[0,T]\setminus[\sigma,\tau]} \left[ -(1-\lambda)\|\nabla V(x(\sigma))\|^2 - \lambda \langle \nabla V(x(\sigma)), f(s)\rangle \right]\, ds \geq$$

$$\geq \min\left\{ -T \max_{u \in V^{-1}(0)} \|\nabla V(u)\|^2, - \max_{u \in V^{-1}(0)} \int_0^T |\langle \nabla V(u), f(t)\rangle|\, dt \right\} = r.$$

где $f \in P_F^B(u)$.

Следовательно, неравенство $V(x(t)) > r$ верно для возможных решений включения (3.5) и для всех $t \in [0,T]$.

Запишем (3.5) в абстрактном виде как

$$l(x) \in \mathcal{G}(x, \lambda). \tag{3.10}$$

Таким образом, или задача (3.1), (3.2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_r)$ и в этом случае теорема доказана, или для любого $\lambda \in [0,1]$ задача (3.5), (3.6) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_r)$. Тогда, рассматривая включение (3.10) и применяя свойство гомотопической инвариантности топологической степени совпадения, получаем

$$\deg(l, H(\cdot, 1), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_r)) = \deg(l, H(\cdot, 0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_r)).$$

Из условий (i), (iii), леммы 1 и принципа сужения отображения следует, что

$$|\deg(l, H(\cdot, 0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}}_r))| = |\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}}_r)| = |\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}}_0)| \neq 0.$$

Тогда утверждение теоремы следует из свойства существования точки совпадения. □

**Замечание 5.** Очевидно, утверждение теоремы остается справедливым и в случае, когда соотношение (3.4) выполнено для всех $f \in P_F(x)$.

## 4. Случай нормальной правой части

Будем рассматривать теперь периодическую задачу для дифференциального включения следующего вида:

$$x'(t) \in R(t, x(t)), \tag{4.1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.2}$$

в предположении, что мультиотображение $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является нормальным и удовлетворяет условию $T$-периодичности по первому аргументу.

**Определение 18.** *Невырожденный потенциал $V : G \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией на $G$ для включения (4.1), если для всех функций $x \in \Gamma(G)$*

$$\int_0^T \langle \nabla V(x(s)), f(s) \rangle \, ds \geq 0 \quad \textit{для всех} \;\; f \in P_R(x). \tag{4.3}$$

**Замечание 6.** Отметим, что в отличие от [4], здесь условие (4.3) предполагается выполненным в нестрогой форме и для включений, правая часть которых является нормальным мультиотображением, что, очевидно, позволяет применять метод интегральной направляющей функции к более широкому классу динамических систем.

Справедлив следующий аналог теоремы 1.

**Теорема 2.** *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что выполняются следующие условия:*

*(i) $\mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}_r$ являются непустыми, открытыми, ограниченными множествами, где*

$$r = \min \left\{ -T \max_{u \in V^{-1}(0)} \|\nabla V(u)\|^2, - \max_{u \in V^{-1}(0)} \int_0^T |\langle \nabla V(u), f(t) \rangle| \, dt \right\},$$

$$f \in P_R(u);$$

*(ii) $V$ является интегральной направляющей функцией для включения (4.1) на множестве $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{V}_0$;*

*(iii) топологическая степень $\deg(\nabla V, \overline{\mathcal{V}}_0)$ отображения $\nabla V$ на множестве $\overline{\mathcal{V}}_0$ отлична от нуля.*

*Тогда задача* (4.1)*,* (4.2) *имеет* $T$*-периодическое решение* $x \in \Gamma(\mathcal{V}_r \cup V^{-1}(r))$*.*

*Доказательство.* Пусть мультиотображение $F$ является квазисечением мультиотображения $R$, то есть:

($j$) мультиотображение $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to Kv(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет верхним условиям Каратеодори и условию подлинейного роста;

($jj$) $F(t,x) \cap R(t,x) \neq \emptyset$ п.в. $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$;

($jjj$) каждое решение $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ задачи

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \tag{4.4}$$

$$x(0) = x(T), \tag{4.5}$$

является решением исходной задачи (4.1), (4.2).

В силу ($jjj$) достаточно показать, что задача (4.4), (4.5) имеет решение.

Из условия ($jj$) следует, что $P_F(x) \cap P_R(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно проверить, что функция $V$ является обобщенной интегральной направляющей функцией для включения (4.4) в смысле определения 17. Из теоремы 1 тогда следует, что задача (4.4), (4.5) имеет $T$-периодическое решение. Следовательно, имеет решение и исходная задача (4.1), (4.2). □

Автор глубоко признателен профессору В. В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

## Список литературы

1. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М. : Либроком, 2011. – 226 с.
2. Корнев С. В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Тр. мат. факультета. – 2004. – Вып. 8. – С. 56–74.
3. Корнев С. В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений / С. В. Корнев, В. В. Обуховский // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 5. – С. 23–32.
4. Корнев С. В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях / С. В. Корнев // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 9. – С. 31–43.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.
6. Красносельский М. А. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский, А. И. Перов // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 123, № 2. – С. 235–238.

7. Финогенко И. А. О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью / И. А. Финогенко // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 88–102.
8. Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: A unified approach / A. Bressan // Nonlinear Controllability and Optimal Control / H. Sussmann (ed.). – N. Y. : Dekker, 1990. – P. 21–31.
9. Bressan A. Differential inclusions without convexity: A survey of directionally continuous selections / A. Bressan // Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analyst. Tampa, Florida, 1992, Lakshmikantham, V., ed., Walter de Gruyter. – 1996. – P. 2081–2088.
10. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations / A. Fonda // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – Vol. 99, N 1. – P. 79–85.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings / L. Górniewicz. – Berlin : Springer, 2006. – 556 p.
12. Kamenskii M. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces / M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca. – Berlin : N. Y. : Walter de Gruyter, 2001. – 231 p.
13. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control / M. Kisielewicz. – Kluwer, Dordrecht : PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.
14. Kornev S. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions / S. Kornev, V. Obukhovskii, J. C. Yao // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. – 2014. – Vol. 34, issue 2. – P. 219–227.
15. Mawhin J. L. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems / J. L. Mawhin // CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I. – 1977. – N 40.
16. Mawhin J. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations / J. Mawhin, James R. Ward Jr. // Discrete and continuous dynamical systems. – 2002. – Vol. 8, N 1. – P. 39–54.
17. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. Vol. 2076. / V. Obukhovskii, P. Zecca, N. V. Loi, S. Kornev. – Berlin : Springer, 2013. – 177 p.
18. Pruszko T. A coincidence degree for $L$-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields / T. Pruszko // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math. – 1979. – Vol. 27, N 11–12. – P. 895–902.
19. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems / T. Pruszko // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1981. – Vol. 5, N 9. – P. 959–970.
20. Tarafdar E. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory / E. Tarafdar, S. K. Teo // J. Austral. Math. Soc. – 1979. – Vol. A28, N 2. – P. 139–173.
21. Tolstonogov A. Differential inclusions in a Banach space / A. Tolstonogov. – Kluwer Academic Publishers, 2000. – 302 p.

**Корнев Сергей Викторович**, кандидат физико-математических наук, доцент, физико-математический факультет, Воронежский государственный педагогический университет, 394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86 тел.: (473)2553663 (e-mail: `kornev_vrn@rambler.ru`)

**S. V. Kornev**

**The Method of Generalized Integral Guiding Function in the Periodic Problem of Differential Inclusions**

**Abstract**. In the present paper we consider new methods for solving the periodic problem for a nonlinear system governed by a differential inclusion of the following form:

$$x'(t) \in F(t, x(t)).$$

In the first part of the article we assume that the multivalued map $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ has convex compact values, satisfies the upper Caratheodory conditions, sublinear growth condition and $T$-periodic in the first argument. Under the above assumptions the closed multivalued superposition operator $P_F : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to P(L^1([0,T];\mathbb{R}^n))$, assigning to each function $x(\cdot)$ the set of all integrable selections of the multifunction $F(t, x(t))$ is well defined. In the second part of the article we assume that the multivalued map $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ is regular with compact values satisfying the $T$-periodicity condition in the first argument. Notice that the class of regular multimaps is broad enough. It includes, in particular, bounded almost lower semicontinuous multimaps with compact values. In both cases for the study of the periodic problem the generalized integral guiding function method is applied. An essential development of the concept of the guiding function is the fact that the basic condition is assumed to hold, firstly, in an integral form; secondly, in the domain defined by the guiding function; and at last, not necessarily for all integrable selections of the superposition multioperator. Application of the coincidence degree theory and the multivalued maps theory allows to establish the solvability of the periodic problem.

**Keywords:** differential inclusion, integral guiding function, periodic solutions, coincidence topological degree.

## References

1. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrageniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moscow, Librokom, 2011. 226 p.
2. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On some versions of the theory of topological degree for nonconvex-valued multimap (in Russian) [O nekotorykh variantakh teorii topologicheskoy stepeni dlya nevypukloznachnykh multiotobrazhenij]. *Trudy matematicheskogo fakulteta*, Voronezh State University, Voronezh, 2004, vol. 8, pp. 56-74.
3. Kornev S.V., Obukhovskii V.V. On localization of the guiding function method in the periodic problem of differential inclusions (in Russian) [O lokalizatsii metoda napravlyayushchikh funktsij v zadache o periodicheskikh resheniyakh differentsial'nykh vklyuchenij]. *Izv. vuzov. Matematika*, 2009, no. 5, pp. 23-32.
4. Kornev S.V. Nonsmooth integral guiding functions in the problem of forced oscillations (in Russian) [Negladkie integral'nye napravlyaushchie funktsii v zadache o vynugdennykh kolebaniyakh]. *Avtomatika i telemehanika*, 2015, no. 9, pp. 31-43.
5. Krasnosel'skii M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravnenii* [The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1966. 332 p.

6. Krasnosel'skii M.A., Perov A.I. On existence principle for bounded, periodic and almost periodic solutions to the systems of ordinary differential equations (in Russian) [Ob odnom printsipe sushchestvovaniya ogranichennykh, periodicheskikh i pochti periodicheskikh reshenij u sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenij]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 123, no 2, pp. 235-238.
7. Finogenko I.A. On differential equations with discontinuous right-hand side (in Russian) [O differentsial'nykh uravnenijkh s razryvnoy pravoy chast'yu]. *Izv. Irkut. gos. un-ta. Ser. Math.*, 2010, vol. 3, no 2, pp. 88-102.
8. Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: A unified approach. In: H. Sussmann (Ed.), *Nonlinear Controllability and Optimal Control.* New York, Dekker, 1990, pp. 21-31.
9. Bressan A. Differential inclusions without convexity: A survey of directionally continuous selections. *Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analyst.*. Tampa, Florida, 1992, Lakshmikantham, V., Ed., Walter de Gruyter, 1996, pp. 2081-2088.
10. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1987, vol. 99, no 1, pp. 79-85.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin, Springer, 2006. 556 p.
12. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York, Walter de Gruyter, 2001. 231 p.
13. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control, Kluwer, Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.
14. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2014, vol. 34, issue 2, pp. 219-227.
15. Mawhin J.L. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. *CBMS Regional Conf. Ser. in Math., Amer. Math. Soc. Providence, R.I.*, 1977, no 40.
16. Mawhin J., Ward James R. Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations. *Discrete and continuous dynamical systems*, 2002, vol. 8, no 1, pp. 39-54.
17. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin, Springer, 2013. 177 p.
18. Pruszko T. A coincidence degree for $L$-compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math.*, 1979, vol. 27, no 11–12, pp. 895–902.
19. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl.*, 1981, vol. 5, no 9, pp. 959-970.
20. Tarafdar E., Teo S.K. On the existence of solutions of the equation $\mathcal{L}x \in Nx$ and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc.*, 1979, vol. A28, no 2, pp. 139-173.
21. Tolstonogov A. Differential inclusions in a Banach space. Kluwer Academic Publishers, 2000. 302 p.

**Kornev Sergei Viktorovich**, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Voronezh State Pedagogical University, 86, Lenina st., Voronezh, 394043, tel.: (473)2553663
(e-mail: kornev_vrn@rambler.ru)