Серия «Математика»
2015. Т. 13. С. 56—71

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.55+517.96

Формула Эйлера – Маклорена для рационального параллелотопа *

О. А. Шишкина
Сибирский федеральнй университет

Аннотация. Суммирование функций дискретного аргумента относится к числу классических задач исчисления конечных разностей, например, сумму степеней последовательных натуральных чисел вычислил еще Я. Бернулли (1713), и его исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа. Эйлер (1733) и независимо от него Маклорен (1738) нашли формулу, в которой искомая сумма выражается через производные и интеграл от заданной функции. Ее строгое доказательство дал Якоби (1834).

Функцию нескольких дискретных аргументов представляется естественным суммировать по целым точкам рациональных многогранников. Известны аналоги формулы Эйлера – Маклорена в задаче суммирования многочлена по произвольному рациональному многограннику и в задаче суммирования функции экспоненциального типа по целым точкам рационального симплекса.

В данной статье получен многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов, построенных на образующих унимодулярного рационального конуса. Требование на унимодулярность конуса является существенным, так как при выбранном методе доказательства позволяет сделать замену переменных при переходе от параллелотопа к параллелепипеду. При этом реализован подход Эйлера, основанный на понятии дискретной первообразной функции. А именно, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие обобщенной дискретной первообразной, а методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка позволяют построить необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор и обосновать сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

Ключевые слова: унимодулярный конус, рациональный параллелотоп, суммирование функций, многомерные разностные уравнения, дифференциальные операторы бесконечного порядка.

* Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006)

1. Введение

Задача суммирования функций состоит в отыскании для заданой функции $\varphi(t)$ суммы ее значений в целых неотрицательных точках отрезка $[0, x]$:

$$S(x) = \sum_{t=0}^{x} \varphi(t). \tag{1.1}$$

По аналогии с задачей интегрирования функций сумму в правой части равенства 1.1 можно назвать суммой с переменным «верхним пределом суммирования», а задачу отыскания суммы $S(x)$ — *задачей неопределенного суммирования* (см., например, [5; 11]). Для $\varphi(t) = t^m$ задачу суммирования решил Якоб Бернулли, и эти исследования дали толчок к возникновению целого ряда разделов комбинаторного анализа, связанных с такими понятиями как числа и многочлены Бернулли ([1]). Сумму 1.1 можно найти, зная решение $f(x)$ разностного уравнения

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

т.к. в этом случае $S(x) = f(x+1) - f(0)$, т.е. выражается через значения f в концах отрезка $[0, x+1]$.

Функцию $f(x)$ называют *дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, а формулу $S(x) = f(x+1) - f(0)$ — *дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница*. Эйлер нашел формулу (1732-1733, опубликовано в 1738), в которой производная решения $f(x)$ разностного уравнения 1.2 выражается через производные от функции $\varphi(t)$:

$$f'(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\mu}{\mu!} \varphi^{(\mu)}(x), \tag{1.3}$$

где B_μ — числа Бернулли. После интегрирования равенства 1.3 по промежутку от 0 до $x+1$ получим формулу, которая решает задачу суммирования:

$$\sum_{t=0}^{x} \varphi(t) = \int_0^{x+1} \varphi(t)\, dt + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{B_\mu}{\mu!} \left[\varphi^{(\mu-1)}(x+1) - \varphi^{(\mu-1)}(0)\right]. \tag{1.4}$$

Независимо от Эйлера эту формулу нашел и Маклорен (1742). Их вывод формулу был не строгим, первое серьезное исследование остаточного члена предпринял Пуассон (1823), а первое строгое доказательство формулы дал Якоби (1834).([9])

В данной работе рассматривается задача отыскания суммы значений функций нескольких переменных $\varphi(t)$ по всем целым точкам $t = (t_1, ..., t_n)$, принадлежащим рациональному параллелотопу с «переменной» вершиной x. Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ *линейно независимые* векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \dots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$.

Определение 1. *Рациональным конусом, порожденным векторами $a^1, \dots, a^n$ назовем множество $K = \{y \in \mathbb{R}^n : y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n, \lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n\}$.*

Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие *единственным* образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geqslant} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\ngeqslant} v$, если $u \in K \backslash \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geqslant} v$ не выполняется. Любой элемент $y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $y = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$. В матричной форме это представление запишется в виде $y = A\lambda$, где y и λ — вектора-столбцы, A — матрица, определитель которой $\Delta \neq 0$, а столбцы состоят из координат векторов a^j

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ .. & .. & .. \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 2. *Конус, построенный на таких векторах $a^1, \dots, a^n$, что определитель матрицы A, столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1, называется унимодулярным конусом.*

Возьмем произвольное $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ и рассмотрим рациональный параллелотоп $\Pi_K(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} t \underset{K}{\leqslant} x\}$, построенный на образующих унимодулярного конуса. Рациональность означает, что вершины параллелотопа имеют целые координаты. Для заданной функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ *задача состоит в отыскании суммы* ее значений по всем целочисленнынам точкам параллелотопа $\Pi_K(x)$:

$$S(x) = \sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t). \tag{1.5}$$

По аналогии со случаем одного переменного такую задачу также называют *задачей неопределенного суммирования.* Для реализации подхода

Эйлера к решению задачи суммирования нам потребуется многомерный аналог уравнения 1.2.

Для функции $f(x)$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ определим оператор сдвига δ_j по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, ..., x_n)$ и рассмотрим полиномиальный разностный оператор вида

$$Q(\delta) = \prod_{j=1}^{n} \left(\delta^{a^j} - 1\right),$$

где $\delta = (\delta_1, ...\delta_n)$, $\delta^{a^j} = \delta_1^{a_1^j} ... \delta_n^{a_n^j}$.

В статье показано (теорема 1), что для решения задачи неопределенного суммирования 1.5 достаточно найти решение $f(x)$ разностного уравнения

$$Q(\delta) f(x) = \varphi(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n. \tag{1.6}$$

Функцию $f(x)$ естественно назвать *обобщенной дискретной первообразной* функции $\varphi(x)$. Искомая сумма $S(x)$ в этом случае выражается через значения функции $f(x)$ в вершинах параллелотопа $\Pi_K(x + a)$, где $a = a^1 + ... + a^n$. Для $n = 1$ разностный оператор имеет вид $Q(\delta) = \delta - 1$, таким образом, аналогом уравнения 1.2 является уравнение 1.6.

Пусть ∂_j — операторы дифференцирования по j-ой переменной и $\partial = (\partial_1, ..., \partial_n)$, $\partial^\mu = \partial_1^{\mu_1} ... \partial_n^{\mu_n}$, определим операторы дифференцирования по направлению векторов a^j следующим образом: $D_j = \left\langle a^j, \partial \right\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^j \partial_k$, $j = 1, ..., n$.

В третьем параграфе работы строится дифференциальный оператор бесконечного порядка $\mathbf{B}(\partial) = \sum\limits_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} \partial^\mu$, где b_μ — обобщенные числа Бернулли, определенный на функциях экспоненциального типа, и доказывается многомерный аналог (теорема 2) формулы 1.3 для решения $f(x)$ разностного уравнения 1.6:

$$D_1 ... D_n f(x) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} \partial^\mu \varphi(x).$$

При некоторых ограничениях на функцию $\varphi(x)$ ряд в правой части этой формулы является сходящимся.

Далее после интегрирования по параллелотопу $\Pi_K(x + a)$ с «переменной» вершиной $x + a$, где $a = a^1 + ... + a^n$ получим аналог формулы 1.4:

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \int\limits_{\Pi_K(x+a)} \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} \partial^\mu \varphi(t)\, dt. \tag{1.7}$$

Задача неопределенного суммирования функций нескольких переменных по целым точкам рационального многогранника рассматривалась в работах [7; 8] где получены аналоги формулы Эйлера – Маклорена, но только для случая, когда $\varphi(t)$ — многочлен переменных $t = (t_1, ..., t_n)$. В [12] найден аналог формулы Эйлера – Маклорена для суммирования целых функций экспоненциального типа нескольких аргументов по целым точкам рационального симплекса.

2. Многомерные разностные уравнения и задача суммирования

Нам потребуются некоторые обозначения и определения из теории многомерных разностных уравнений. На комплекснозначных функциях $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, ..., x_n)$ определим оператор δ_j сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, ..., x_n)$ и обозначим $P(\delta) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega \delta^\omega$ — полиномиальный разностный оператор с постоянными коэффициентами c_ω, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) \in K \cap \mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} ... \delta_n^{\omega_n}$. Здесь Ω — конечное множество точек из $K \cap \mathbb{Z}^n$. Разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ записывается следующим образом:

$$P(\delta) f(x) = \varphi(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Отметим, что уравнения такого вида в случае, когда $K = \mathbb{Z}_+^n$, т.е. конус порожден единичными векторами e^j, $j = 1, ..., n$, исследовались в работах [6; 10], а случай произвольного рационального конуса рассматривался в [3; 4].

Для реализации подхода Эйлера к задаче суммирования функции $\varphi(t)$ нескольких переменных нужно определить понятие ее дискретной первообразной. Пусть $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n \left(\delta^{a^j} - 1\right)$ и рассмотрим разностное уравнение относительно неизвестной функции $f(x)$ вида:

$$Q(\delta) f(x) = \varphi(x), x \in K \cap \mathbb{Z}^n.$$

Определение 3. *Обобщенной дискретной первообразной функции* $\varphi(x)$, $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ *называется всякое решение этого разностного уравнения.*

Для любой точки $x \in K$ обозначим $\pi_j x$ ее проекцию вдоль вектора a^j, т.е. если $x = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_n a^n$, $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$, то $\pi_j x = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_{j-1} a^{j-1} + \lambda_{j+1} a^{j+1} + ... + \lambda_n a^n$.

Пусть ν — множество всех 2^n упорядоченных наборов

$$J = (j_1, ..., j_k) \subset \{1, ..., n\},$$

включая и пустое множество. Если обозначить $\pi_J = \pi_{j_1} \circ ... \circ \pi_{j_k}$, то множество вершин параллелотопа можно записать в виде $V = \{\pi_J x, J \in \nu\}$. Отметим, что $\pi_{\varnothing} x = x$.

В следующей теореме утверждается, что для всякой функции $\varphi(x)$ обобщенная дискретная первообразная существует и для суммы 1.5 справедлив дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Теорема 1. *Пусть K унимодулярный рациональный конус, тогда:*
1) сумма 1.5 является обобщенной дискретной первообразной функции $\varphi(x+a)$, т. е. $Q(\delta)\, S(x) = \varphi(x+a)$, $x \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n$ и $a = a^1 + ... + a^n$;
2) для любой дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива следующая формула

$$\sum_{t \in \Pi_K(x) \cap \mathbb{Z}^n} \varphi(t) = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\# J} f(\pi_J(x+a)),$$

где $\# J$ означает число элементов множества J.

Если предположить, что обобщенная дискретная первообразная имеет частные производные нужных порядков, то искомую сумму $S(x)$ можно выразить и через интеграл по параллелотопу.

Предложение 1. *Пусть $D_j = \left\langle a^j, \partial \right\rangle$ — производные по направлению векторов a^j, тогда для любой обобщенной дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива формула*

$$\int\limits_{\Pi_K(x+a)} Df(t)\, dt = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\# J} f(\pi_J(x+a)),$$

где $D = D_1 ... D_n$, а $dt = dt_1 ... dt_n$.

Теорему 1 и предложение 1 докажем сначала для случая, когда конус $K = \mathbb{Z}^n_+$,, т. е. a^j — единичные векторы. В этом случае суммирование идет по n-мерному параллелепипеду

$$\Pi_K(x) = \Pi(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^n_+ : 0 \le t_j \le x_j, j = 1, ..., n \right\}$$

и сумму 1.5 можно записать одним из следующих способов:

$$S(x) = \sum_{t_1=0}^{x_1} ... \sum_{t_n=0}^{x_n} \varphi(t_1, ..., t_n) = \sum_{0 \leqslant t \leqslant x} \varphi(t), \tag{2.1}$$

а разностный оператор, участвующий в определении обобщенной дискретной первообразной, имеет вид $Q(\delta) = \prod_{j=1}^n (\delta_j - 1)$.

Предложение 2. *Для всякой функции* $\varphi(x+I)$ *сумма 2.1 является обобщенной дискретной первообразной, т.е.* $Q(\delta)S(x)=\varphi(x+I)$, *где* $I=(1,...,1)$.

Доказательство. Последовательно действуя операторами (δ_j-1), $j=1,...,n$ на сумму 2.1, получим на первом шаге
$(\delta_1-1)S(x)=S\left(x+e^1\right)-S(x)=\sum\limits_{t_2=1}^{x_2}...\sum\limits_{t_n=1}^{x_n}\varphi(x_1+1,t_2,...,t_n)$.

На втором шаге

$$(\delta_1-1)(\delta_2-1)S(x)=(\delta_2-1)\sum_{t_2=1}^{x_2}...\sum_{t_n=1}^{x_n}h(x_1+1,t_2,...,t_n)=$$
$$=\sum_{t_3=1}^{x_3}...\sum_{t_n=1}^{x_n}\varphi(x_1+1,x_2+1,t_3...,t_n).$$

Продолжая вычисление, на последнем шаге получим

$$\prod_{j=1}^{n}(\delta_j-1)S(x)=\varphi(x+I),x\in\mathbb{Z}_+^n.$$

□

Предложение 3. *Для любой обобщенной дискретной первообразной* $f(x)$ *функции* $\varphi(x)$ *справедлив следующий аналог формулы Ньютона-Лейбница:*

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant x}\varphi(t)=\sum_{J\in\nu}(-1)^{\#J}f(\pi_J(x+I)),$$

где $I=(1,...,1)$.

Доказательство. Учитывая, что $\sum\limits_{t_j=0}^{x_j}(\delta_j-1)f(t)=(\delta_j-\pi_j)f(t)\left.\right|_{t_j=x_j}$, получим $\sum\limits_{0\leqslant t\leqslant x}\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}(\delta_j-\pi_j)f(x)$.

Раскрывая скобки в произведении $\prod\limits_{j=1}^{n}(\delta_j-\pi_j)$ с учетом определения π_J получим $\prod\limits_{j=1}^{n}(\delta_j-\pi_j)=\sum\limits_{J\in\nu}(-1)^{\#J}\pi_J\delta_{\overline{J}}=\sum\limits_{J\in\nu}(-1)^{\#J}\pi_J\delta$. Здесь $\overline{J}=\{1,...,n\}\setminus J$, $\delta=\delta_1...\delta_n$.

Таким образом, сумма

$$\sum_{0\leqslant t\leqslant x}\varphi(t)=\prod_{j=1}^{n}(\delta_j-\pi_j)f(x)=\sum_{J\in\nu}(-1)^{\#J}f(\pi_J(x+I))$$

выражается через значение функции $f(x)$ в вершинах параллелепипеда $\Pi(x+I)=\{t:0\leq t_j\leq x_j+1,j=1,...,n\}$. □

Предложение 4. *Для любой обобщенной дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$ справедлива формула*

$$\int\limits_{\Pi(x+I)} \partial f(t)\, dt = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\# J} f(\pi_J(x+I)),$$

где $I = (1, ..., 1)$, $\partial = \partial_1 ... \partial_n$, $dt = dt_1 ... dt_n$, а интегрирование ведется по n-мерному параллелепипеду $\Pi(x+I) = \{t : 0 \le t_j \le x_j + 1, j = 1, ..., n\}$.

Доказательство. Отметим прежде всего справедливость равенства

$$\int\limits_0^{x_j+1} \partial_j f(t)\, dt_j = \left(\delta_j^{x_j+1} - 1\right) \pi_j f(t),$$

используя которое, результат повторного интегрирования можно записать в виде

$$\int\limits_{\Pi(x+I)} \partial f(t)\, dt = \prod_{j=1}^{n} \left(\delta_j^{x_j+1} - 1\right) \pi_1 \circ ... \circ \pi_n f(t) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\delta_j^{x_j+1} - 1\right) f(0) = \sum_{J \in \nu} (-1)^{\# J} f(\pi_J(x+I)),$$

а из предложения 3 следует равенство

$$\int\limits_{\Pi(x+I)} \partial f(t)\, dt = \sum_{0 \leqslant t \leqslant x} \varphi(t).$$

□

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Установим связь между разностными уравнениями в рациональных конусах и более изученными уравнениями в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$. Существенным является требование, состоящее в том, что мы рассматриваем *унимодулярные конусы*, т. е. конусы, построенные на таких векторах $a^1, ..., a^n$, что определитель матрицы A, столбцами которой являются координаты этих векторов, равен 1. Это означает, что определяемое матрицей A отображение $t = A\lambda$ является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{Z}_+^n$ и $K \cap \mathbb{Z}^n$. Если s_j — операторы сдвига, действующие на функции $f(A\lambda)$ переменных λ_j, то они связаны с операторами δ_j, действующим на на функции $f(t)$ переменных t_j, следующим образом $s_j f(A\lambda) = f\left(A\left(\lambda + e^j\right)\right) = f\left(A\lambda + Ae^j\right) = f\left(A\lambda + a^j\right) = f\left(t + a^j\right) = \delta^{a^j} f(t)$, т.е.

$$s_j f(A\lambda) = \delta^{a^j} f(t), j = 1, ..., n. \tag{2.2}$$

Таким образом, в силу формулы 2.2 всякий разностный оператор

$$Q(\delta)=\sum_{\omega\in\Omega}c_\omega\delta^\omega,\Omega\subset K\cap\mathbb{Z}^n$$

действует на функциях $f(t)\,,\,t\in K\cap\mathbb{Z}^n$, так же как и оператор $\widetilde{Q}(s)=\sum\limits_{\widetilde{\omega}\in\mathbb{Z}_+^n}c_{A\widetilde{\omega}}s^{\widetilde{\omega}}$, где $\omega=A\widetilde{\omega}$ на функциях $\widetilde{f}(\lambda)\,,\,\lambda\in\mathbb{Z}_+^n$, а вместо уравнения 1.6 для определения обобщенной дискретной первообразной получаем уравнение

$$\widetilde{Q}(s)\,\widetilde{f}(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)\,,\lambda\in\mathbb{Z}_+^n.$$

Доказательство (*теоремы 1*) 1)После замены переменных

$$t=A\lambda,\lambda\in\mathbb{Z}_+^n$$

сумма $S(x)$, где $x=A\tau$ преобразуется следующим образом

$$S(A\tau)=\sum_{0\le\lambda\le\tau}\varphi(A\lambda),$$

а разностный оператор примет вид

$$Q(\delta)=\prod_{j=1}^n\left(\delta^{a^j}-1\right)=\prod_{j=1}^n(s_j-1)=\widetilde{Q}(s)\,.$$

Поэтому с учетом предложения 2 получим $\widetilde{Q}(s)\,\widetilde{S}(\tau)=\widetilde{\varphi}(\lambda+I)$. После возвращения к переменным x получим $Q(\delta)\,S(x)=\varphi(x+a)$.

2) После замены переменных $t=A\lambda$ и $x=A\tau$, а также используя 2.2 получим, что $f(A\lambda)$ является решением разностного уравнения

$$\widetilde{Q}(s)\,f(A\lambda)=\varphi(A\lambda)\,.$$

В силу предложения 3 для суммы $S(A\tau)=\sum\limits_{0\le\lambda\le\tau}\varphi(A\lambda)$ справедлива формула $S(A\tau)=\sum\limits_{J\in\nu}(-1)^{\#J}f(\pi_J(A(\lambda+I)))$, которая после возвращения к переменным x примет вид $S(x)=\sum\limits_{J\in\nu}(-1)^{\#J}f(\pi_J(x+a))$. □

Доказательство (*предложения 1*) Сделаем замену переменных $t=A\lambda$, $\lambda\in\Pi(\tau+I)=\{\lambda:0\le\lambda_j\le\tau_j+1,j=1,...,n\}$, $x=A\tau$. При этой замене $D_jf(t)=\partial_jf(A\lambda)$, $j=1,...,n$, и с учетом унимодулярности конуса K получим

$$\int\limits_{\Pi_K(x+a)}Df(t)\,dt=\int\limits_{\Pi(\tau+I)}\partial_1...\partial_nf(A\lambda_1,...,A\lambda_n)\,d\lambda_1...d\lambda_n.$$

С учетом Предложения 4 последний интеграл равен

$$\sum_{J\in V}(-1)^{\#J}f\left(\pi_J\left(A\left(\lambda+I\right)\right)\right)=\sum_{J\in V}(-1)^{\#J}f\left(\pi_J\left(x+a\right)\right),$$

а из теоремы 1 следует, что

$$\int\limits_{\Pi_K(x+a)} Df\left(t\right)dt=\sum_{t\in\Pi_K(x)}\varphi\left(t\right).$$

□

3. Формула Эйлера – Маклорена для унимодулярного параллелотопа

В данном параграфе построим необходимые для многомерного аналога формул Эйлера – Маклорена 1.3 и 1.4 пространство функций и дифференциальный оператор бесконечного порядка, действующий на этом пространстве, и докажем формулу 1.7, которая и решает задачу неопределенного суммирования. Воспользуемся обозначениями и определениями из [2].

Обозначим через $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, $z=(z_1,...,z_n)$ — точки этого пространства. Пусть $Exp\left(\mathbb{C}^n\right)$ пространство целых функций $\varphi\left(z\right)$ экспоненциального типа, т. е. целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\varphi\left(z\right)\right|\leq M\,e^{r|z|},$$

где $M>0$, $r\geq 0$ - некоторые числа (для каждой функции свои), и $|z|=|z_1|+...+|z_n|$.

Далее для фиксированного $R>0$ и произвольного $r<R$ обозначим через $Exp_R\left(\mathbb{C}^n\right)$ пространство целых функций экспоненциального типа $\varphi\left(z\right)$ таких, что для некоторого $M>0$ и любого $r<R$ справедливо равенство

$$\left|\partial^\alpha\varphi\left(z\right)\right|\leq Mr^{|\alpha|}e^{r|z|}$$

для всех мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ и всех $z\in\mathbb{C}^n$. Здесь $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$.

Пусть $F\left(\xi\right)$ — голоморфная в полицилиндре

$$U_R=\{\xi\in\mathbb{C}^n:|\xi_j|<R,\,j=1,...,n\}$$

функция, и дано ее разложение в степенной ряд $F\left(\xi\right)=\sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty}c_\alpha\xi^\alpha$. Сопоставим функции $F\left(\xi\right)$ дифференциальный оператор бесконечного порядка $F(\partial)$, формально заменяя аргументы $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ символами операторов дифференцирования $\partial = (\partial_1, ..., \partial_n)$. Функцию $F(\xi)$ называют *символом оператора* $F(\partial)$.

Действие оператора $F(\partial)$ на функцию $\varphi(z)$ определяется формулой

$$F(\partial)\varphi(z) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(z).$$

Обозначим $H(U_R)$ — пространство функций голоморфных в U_R, и пусть $F(\xi) \in H(U_R)$. Как известно ([2], теорема 5.1), для любой функции $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$ функция $F(\partial)\varphi(z)$ определена и также принадлежит пространству $Exp_R(\mathbb{C}^n)$. Более того, отображение

$$F(\partial) : Exp_R(\mathbb{C}^n) \to Exp_R(\mathbb{C}^n)$$

непрерывно, а совокупность операторов бесконечного порядка $\{F(\partial)\}$ образует алгебру, ([2], теорема 5.2), которую будем обозначать $\aleph$. В частности, если наряду с $F(\xi)$ функция $F^{-1}(\xi) = \frac{1}{F(\xi)}$ аналитична в U_R, то оператор $F^{-1}(\partial)$ является обратным к $F(\partial)$.

Определим теперь нужные дифференциальные операторы бесконечного порядка. Прежде всего, покажем, что полиномиальный разностный оператор $P(\delta) = \sum\limits_{|\omega|\le m} c_\omega \delta^\omega$, где $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} ... \delta_n^{\omega_n}$, действует на пространстве $H(\mathbb{C})$ целых функций так же, как и некоторый дифференциальный оператор бесконечного порядка, который строится по характеристическому многочлену $P(\xi)$.

Рассмотрим целую функцию $P\left(e^\xi\right) = P\left(e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n}\right) = \sum\limits_{|\omega|\le m} c_\omega e^{\langle\omega,\xi\rangle}$, и сопоставим ей дифференциальный оператор бесконечного порядка $P\left(e^\partial\right)$, действующий на пространстве функций $Exp(\mathbb{C}^n)$, где

$$e^\xi = \left(e^{\xi_1}, ..., e^{\xi_n}\right), \langle\omega, \xi\rangle = \omega^1\xi_1 + ... + \omega^n\xi_n.$$

Предложение 5. *На пространстве* $Exp(\mathbb{C}^n)$ *справедливо равенство* $P(\delta)\varphi(z) = P\left(e^\partial\right)\varphi(z)$.

Доказательство. Используя формулу Тейлора, для любой функции $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$ получим

$$P(\delta)\varphi(z) = \sum_{|\omega|\le m} c_\omega \varphi(z+\omega) =$$

$$\sum_{|\omega|\le m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\partial^k\varphi(z)\,\omega^k = \sum_{|\omega|\le m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\omega\partial)^k\varphi(z),$$

где $(\omega\partial)^k = (\omega_1\partial_1)^{k_1} ... (\omega_n\partial_n)^{k_n}$.

С другой стороны,

$$P\left(e^{\partial}\right)\varphi(z) = \sum_{|\omega|\le m} c_\omega \left(e^{\partial}\right)^{\omega}\varphi(z) =$$

$$= \sum_{|\omega|\le m} c_\omega e^{\omega\partial}\varphi(z) = \sum_{|\omega|\le m} c_\omega \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\omega\partial)^k\varphi(z).$$

Таким образом, $P(\delta)\varphi(z) = P\left(e^{\partial}\right)\varphi(z)$ для любой $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$.

□

Для разностного оператора $Q(\delta) = \prod_{j=1}^{n}\left(\delta^{a^j} - 1\right)$, участвующего в определении дискретной первообразной, утверждение предложения 5 означает, что $Q\left(e^{\partial}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(e^{\left\langle a^j,\partial\right\rangle} - 1\right)$. Отметим, что символ этого оператора является целой функцией $Q\left(e^{a\xi}\right)$, где $a\xi = \left(\left\langle a^1,\xi\right\rangle,...,\left\langle a^n,\xi\right\rangle\right)$, и множество ее нулей состоит из объединения счетного числа комплексных гиперплоскостей вида

$$L_{j,k} = \left\{\xi : \left\langle a^j,\xi\right\rangle = 2k\pi i\right\},$$

где i — мнимая единица, $j = 1,...,n, k = 0,\pm1,\pm2...$

Для мероморфной функции

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\left\langle a^j,\xi\right\rangle}{\prod\limits_{j=1}^{n}\left(e^{\left\langle a^j,\xi\right\rangle} - 1\right)} \tag{3.1}$$

гиперплоскости $L_{j,0}$, $j = 1,...,n$ являются "устранимыми"особыми множествами, поэтому $\mathbf{B}(\xi)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат. Найдем максимальное R такое, что функция 3.1 голоморфна в полицилиндре $U_R = \{\xi : |\xi_j| < R, j = 1,...,n\}$, т. е. гиперплоскости $L_{j,k}$ для $k = 0,\pm1,\pm2...$ не пересекаются с полицилиндром U_R.

Обозначим $\left\|a^j\right\| = |a_1^j| + ... + |a_n^j|$ и возьмем $R = \frac{2\pi}{\max_j\|a^j\|}$. Тогда для $\xi \in U_R$, $j = 1,...,n$ справедливы неравенства $\left|\left\langle a^j,\xi\right\rangle\right| \le \left|a_1^j\right||\xi_1| + ... + \left|a_n^j\right||\xi_n| < R\left\|a^j\right\| \le 2\pi$, из которых и следует, что $L_{j,k} \cap U_R = \oslash$ для $k = 0,\pm1,\pm2...$

Таким образом функция 3.1 голоморфна в полицилиндре U_R, где $R = \frac{2\pi}{\max_j\|a^j\|}$, и следовательно, разлагается в этом полицилиндре в ряд

$$\mathbf{B}(\xi) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!}\xi^\mu. \tag{3.2}$$

Определение 4. *Коэффициенты b_μ ряда 3.2 назовем обобщенными числами Бернулли.*

Определение 5. *Соответствующий 3.2 дифференциальный оператор бесконечного порядка*

$$\boldsymbol{B}(\partial) = \sum_{|\mu|=0}^{\infty} \frac{b_\mu}{\mu!} \partial^\mu \tag{3.3}$$

назовем оператором Эйлера – Маклорена.

Поскольку для голоморфных в полицилиндре U_R функций $\mathbf{B}(\xi)$ и $Q\left(e^\xi\right)$ справедливы соотношения

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left\langle a^j, \xi \right\rangle}{Q\left(e^\xi\right)} \text{ и } Q\left(e^\xi\right) = \prod_{j=1}^{n} \left\langle a^j, \xi \right\rangle \frac{1}{\mathbf{B}(\xi)},$$

то в алгебре $\aleph$ справедливо равенство

$$Q\left(e^\partial\right) = D\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)}.$$

Напомним, что $D_j = \left\langle a^j, \partial \right\rangle$ — операторы дифференцирования по направлению вектора a^j, $j = 1, ..., n$, и обозначим $D = D_1 \circ ... \circ D_n$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$ и $\boldsymbol{B}(\partial)$ — оператор Эйлера – Маклорена, тогда всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения*

$$Df(z) = \boldsymbol{B}(\partial)\varphi(z), \tag{3.4}$$

является обобщенной дискретной первообразной для функции $\varphi(z)$.

Следствие 1. *После интегрирования равенства 3.4 по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$ получим формулу 1.7.*

Доказательство. Так как справедливо $\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{B}(\partial) \in \aleph$, то и $\mathbf{B}(\partial)\varphi(z) \in Exp_R(\mathbb{C}^n)$. Поэтому уравнение 3.4 всегда имеет решение, также принадлежащее $Exp_R(\mathbb{C}^n)$. Это следует, например, из того что после замены $\underset{\sim}{z} = \theta^A$ с учетом унимодулярности матрицы A оно примет вид $\partial_1 ... \partial_n \widetilde{f}(\theta) = \widetilde{g}(\theta)$.

Покажем, что всякое решение $f(z)$ дифференциального уравнения 3.4 является обобщенной дискретной первообразной, т. е. решением разностного уравнения 1.6. Действительно, функцию 3.1 можно преобразовать следующим образом

$$\mathbf{B}(\xi) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left\langle a^j, \xi \right\rangle}{\prod\limits_{j=1}^{n} \left(e^{\langle a^j, \xi \rangle} - 1\right)} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \left\langle a^j, \xi \right\rangle}{\prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\mu_j=0}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j}}{\mu_j!}} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j, \xi \rangle^{\mu_j - 1}}{\mu_j!}}.$$

Поэтому функция $\frac{1}{\mathbf{B}(\xi)} = \prod\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{\mu_j=1}^{\infty} \frac{\langle a^j,\xi\rangle^{\mu_j-1}}{\mu_j!}$ является целой функцией, а оператор $\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)}$ — обратным к оператору $\mathbf{B}(\partial)$.

Действуя оператором $\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)}$ на обе части диффференциального уравнения 3.4, получим $D\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)} f(z) = \mathbf{B}(\partial)\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)}\varphi(z)$. Учитывая, что

$$D\frac{1}{\mathbf{B}(\partial)} = Q\left(e^{\partial}\right)$$

и предложение 5, окончательно имеем $Q(\delta) f(z) = \varphi(z)$.

Доказательство следствия получается интегрированием дифференциального уравнения 3.4 по параллелотопу $\Pi_K(x+a)$, т.к.

$$\int\limits_{\Pi_K(x+a)} Df(t)\,dt = S(x)$$

согласно предложению 1. □

Список литературы

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1967.
2. Дубинский Ю. А. Задача Коши в комплексной области / Ю. А. Дубинский. – М. : Изд-во МЭИ, 1996.
3. Некрасова Т. И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Журн. Сиб. федер. ун-та. – 2012. – Т. 5, вып. 4. – С. 576–580.
4. Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнения / Т. И. Некрасова // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 88–96.
5. Abramov S. A. On the summation of rational functions / S. A. Abramov // USSR Comput. Math. Math. Phys. – 1971. – Vol. 11, N 4. – P. 324–330.
6. Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Melou, M. Petcovšek // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol. 225. – P. 51–75.
7. Brion M., Berline N. Local Euler-Maclaurin formula for polytopes / M. Brion, N. Berline // Moscow Mathematical Society Journal. – 2007. – Vol. 7. – P. 355–383.
8. Brion M., Vergne M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – Vol. 10, N 4. – P. 797–833.
9. Hardy G. Divergent series / G. Hardy. – London : Oxford University Press, 1949.
10. Leinartas E. K. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations / E. K. Leinartas // Siberian Mathematical Journal. – 2007. – Vol. 48, N 2. – P. 268–272.

11. Polyakov S. A. Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators / S. A. Polyakov // Programming and Computer Software. – 2011. – Vol. 37, N 6. – P. 322–325.
12. Shishkina O. A. The Euler – Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order / O. A. Shishkina // Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics. – 2015. – Vol. 8, N 1. – P. 86–93.

Шишкина Ольга Андреевна, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, тел. +79135173555
(e-mail: olga_a_sh@mail.ru)

O. A. Shishkina
The Euler – Maclaurin Formula for Rational Parallelotope

Abstract. The problem of summation of functions of a discrete argument is one of the classical problems of the calculus of finite differences, for example, the sum of the sequence of power of natural numbers was computed by Bernoulli (1713), and his studies led to the development of several branches of combinatorial analysis. Euler (1733) and independently Maclaurin (1738) found a formula in which the required sum is expressed through derivatives and the integral of the given function. Its first rigorous proof was given by Jacobi (1834).

A natural summation of functions of several discrete arguments is over integer points of rational polytopes. The analogues of the Euler – Maclaurin formula for summation of polynomials over an arbitrary rational polytope and for summation of function of exponential type over integer points of simplex are known.

In this article we obtain a multidimensional analogue of the Euler-Maclaurin formula for summation of entire functions of exponential type over integer points of rational parallelotops built on generators of a unimodular rational cone. Unimodularity of the cone is essential since in the chosen method of proof it allows us to change variables and replace the parallelotope by the parallelepiped. Also, we implement Euler's approach based on the concept of discrete primitive functions. Namely, using the methods of the theory of multidimensional difference equations, the concept of a generalized discrete primitive is introduced, and the methods of the theory of differential operators of infinite order allow to justify the convergence of series of functions that appear in the Euler – Maclaurin formula.

Keywords: unimodular rational cone, rational parallelotope, summation of functions, multidimensional difference equations, differential operators of infinite order.

References

1. Gelfond A.O. Calculus of finite differences (in Russian). Moscow, Nauka, 1977.
2. Dubinsky Yu.A. The Cauchy problem in the complex domain (in Russian). Moscow, Izdatelstvo MEI, 1996.
3. Nekrasova T.I. Cauchy problem for multidimensional difference equations in lattice cones (in Russian). *Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics*, 2012, vol. 5, issue 4, pp. 576-580.

4. Nekrasova T.I. Sufficient conditions of algebraicity of generating functions of the solutions of multidimensional difference equations (in Russian). *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya "Matematika"*, 2013, vol. 6, no 3, pp. 88-96.
5. Abramov S.A. On the summation of rational functions. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no 4, pp. 324-330.
6. Bousquet-Mélou M., Petcovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Mathematics*, 2000, vol.225, pp. 51-75.
7. Brion M., Berline N. Local Euler – Maclaurin formula for polytopes. *Moscow Mathematical Society Journal*, 2007, vol. 7, pp. 355-383.
8. Brion M., Vergne M. Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes. *Journal of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 10, no 4, pp. 797-833.
9. Hardy G. Divergent series. London, Oxford University Press, 1949.
10. Leinartas E.K. Multiple Laurent series and fundamental solutions of linear difference equations. *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol.48, no 2, pp. 268-272.
11. Polyakov S.A. Indefinite summation of rational functions with factorization of denominators. *Programming and Computer Software*, 2011, vol. 37, no 6, pp. 322-325.
12. Shishkina O.A. The Euler-Maclaurin Formula and Differential Operators of Infinite Order. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics* & *Physics*, 2015, vol. 8, no 1, pp. 86-93.

Shishkina Olga Andreevna, Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodny pr., Krasnoyarsk, 660041, tel.: (913)5173555
(e-mail: `olga_a_sh@mail.ru`)