Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 1. С. 57—69

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.9

О построении первых интегралов для одного класса нелинейных систем *

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Синицын
Национальный университет Колумбии

Аннотация. Получены условия существования первых интегралов определенного вида для класса нелинейных систем, включающего модель вакуумного диода и ее обобщения. Обоснована интегрируемость рассматриваемых моделей диода.

Ключевые слова: неразрешенные системы; первые интегралы; интегрируемость; вакуумный диод.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset R^n$ — некоторая область, в которой задана непрерывно дифференцируемая скалярная функция $\Pi(q)$, $q \in \Omega$, называемая далее потенциалом. Независимую вещественную переменную $t \in R$ будем называть «временем», а производные от $q(t)$ первого и второго порядка по ней будем обозначать соответственно одной или двумя точками над буквой. Рассмотрим в области $\Gamma = \{(q, \dot{q}) \in \Omega \times R^n\}$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$A\ddot{q} + B\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = 0, \tag{1.1}$$

где A и B — постоянные квадратные матрицы размера $n \times n$ с вещественными элементами.

В случае невырожденной матрицы A для каждой начальной точки $(q_0, \dot{q}_0) \in \Gamma$ классическая теорема Пеано гарантирует существование

* Работа выполнена при поддержке СО РАН (междисциплинарный проект № 80).

решения $q(t, q_0, \dot{q}_0)$, $\dot{q}(t, q_0, \dot{q}_0)$ системы (1.1) (вообще говоря, не единственного) на некотором интервале «времени» $t \in (\alpha, \omega)$, определяемом начальными условиями $(q_0, \dot{q}_0)$ и выбором конкретного решения в случае не единственности. В случае вырожденной матрицы A система (1.1) представляет собой алгебро-дифференциальную систему [6] и решения существуют не при любых начальных условиях. Условия существования классических решений такого рода систем изучались в [6], а обобщенных — в [8].

Функцию $F(q, \dot{q})$, не сводящуюся к тождественной постоянной, называют первым интегралом системы (1.1) в области Γ, если она сохраняет постоянные значения на любых действительных решениях системы, остающихся в этой области. Для непрерывно дифференцируемых функций проверку свойства первого интеграла можно выполнить без фактического знания решений, путем вычисления производной в силу системы.

Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы получить условия, гарантирующие существование первых интегралов системы (1.1) определенного вида, производные которых в силу (1.1) есть тождественный нуль. Мы будем здесь рассматривать интегралы двух видов — интеграл «энергии» и интеграл линейный по «скоростям» $\dot{q}$. В аналитической механике рассматривается [5, 3] система (1.1) с единичной матрицей $B = E$ и симметричной положительно определенной матрицей A. В этом случае термины «время», «скорость», «энергия» являются базовыми и вполне могут использоваться без кавычек. Но система (1.1) может выступать и как математическая модель объектов иной, не механической природы, например, вакуумного диода. При этом независимая переменная к физическому времени никакого отношения не имеет. Поэтому термин «интеграл энергии» и ему подобные остаются только условными, имеющими механические аналоги.

В случае вырожденной матрицы A существование решений системы (1.1) не гарантировано, так что для такой ситуации построенные интегралы следует рассматривать лишь как формальные, обеспечивающие равенство нулю производной в силу системы в рассматриваемой области. Вопрос о существовании действительных решений системы здесь не затрагивается.

Таким образом, основная цель данной работы — получение условий существования и конструктивное построение формальных первых интегралов системы (1.1). Для случая невырожденной матрицы A найденные интегралы гарантированно являются первыми интегралами в точном смысле приведенного выше определения. Эффективность предложенного подхода иллюстрируется на ряде примеров, включающих модель вакуумного диода и некоторые ее обобщения.

2. Интеграл «энергии»

Утверждение 1. *Если матрица B невырожденная, а матрица $S = B^{-1}A$ симметричная, то функция*

$$V(q, \dot{q}) = 0.5\dot{q}^T S\dot{q} + \Pi(q) \tag{2.1}$$

является первым интегралом системы (1.1) *в области* Γ.

Доказательство. Вычислим производную (2.1) в силу системы (1.1)

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = 0.5\ddot{q}^T S\dot{q} + 0.5\dot{q}^T S\ddot{q} + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q}\dot{q} =$$

$$= 0.5\ddot{q}^T B^{-1}A\dot{q} + 0.5\dot{q}^T B^{-1}A\ddot{q} + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q}\dot{q} =$$

$$= 0.5\ddot{q}^T \left(B^{-1}A\right)^T \dot{q} + 0.5\dot{q}^T B^{-1}\left(-B\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q}\dot{q} =$$

$$= 0.5\ddot{q}^T A^T \left(B^{-1}\right)^T \dot{q} + 0.5\dot{q}^T B^{-1}\left(-B\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right) + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q}\dot{q} =$$

$$= -0.5\frac{\partial \Pi^T}{\partial q} B^T \left(B^{-1}\right)^T \dot{q} - 0.5\dot{q}^T\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q}\dot{q} \equiv 0.$$

□

Заметим, что в ходе доказательства невырожденность матрицы A не требуется, так же, как и ее симметричность. В случае механической системы (2.1) принимает вид $V(q, \dot{q}) = 0.5\dot{q}^T A\dot{q} + \Pi(q)$ и выражает полную энергию, при этом A является симметричной и положительно определенной. Поэтому интеграл (2.1) естественно называть интегралом «энергии».

3. Линейный по скоростям интеграл

Утверждение 2. *Пусть существуют вектор $h \in R^n$ и $n \times n$ матрицы C и $M(q)$ такие, что выполняются условия:*

1) $Cq + h = M(q)\dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$ *при всех $q \in \Omega$;*

2) *матрица $M^T(q)B$ кососимметрическая при всех $q \in \Omega$;*

3) *матрица $C^T A$ кососимметрическая.*

Тогда функция

$$J(q, \dot{q}) = (Cq + h)^T A\dot{q} \tag{3.1}$$

является первым интегралом системы (1.1) *в области* Γ.

Доказательство. Вычислим производную (3.1) в силу системы (1.1)

$$\left.\frac{dJ}{dt}\right|_{(1.1)} = \dot{q}^T C^T A\dot{q} + (Cq + h)^T \left(-B\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right) = -\frac{\partial \Pi^T}{\partial q} M^T(q) B \frac{\partial \Pi}{\partial q} \equiv 0.$$

□

Заметим, что для доказательства невырожденность матриц A и B не требуется, так же, как и их симметричность. В случае механической системы $\dot{q}$ представляет собой вектор обобщенных скоростей. Поэтому интеграл (3.1) естественно называть интегралом, линейным по «скоростям». Важно также отметить, что в ряде случаев (3.1) может содержать не один интеграл, а целое семейство.

4. Интегралы системы, моделирующей вакуумный диод

Уравнения модели вакуумного диода могут быть записаны в виде [7]

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \frac{j\,(1+q_1)}{\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2}} &= 0, \\ \ddot{q}_2 - \frac{jq_2}{\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2}} &= 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь q_1 — потенциал электрического поля, q_2 — потенциал магнитного поля, j — плотность тока через диод (единственный конструктивный параметр модели), независимая переменная t изменяется в пределах от 0 до 1 и выражает относительное расстояние от катода. Модель (4.1) записывается в виде (1.1), для чего полагаем

$$q = \mathrm{col}\,(q_1, q_2) \in R^2, \quad \Pi(q) = j\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \Omega = \left\{ q \in R^2 :\ (1+q_1)^2 - 1 - q_2^2 > 0 \right\}.$$

Применяя утверждение 1, получаем выражение интеграла «энергии»

$$V = 0.5(\dot{q}_2^2 - \dot{q}_1^2) + j\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2}. \tag{4.2}$$

Положим

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M(q) = \frac{\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2}}{j} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя утверждение 2, получаем выражение линейного по «скорости» интеграла

$$J = (1+q_1)\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1. \tag{4.3}$$

Заметим, что интегралы (4.2) и (4.3) для модели диода (4.1) известны и были получены [4] прямым исследованием системы (4.1), а не как следствия интегралов общей системы (1.1).

5. Системы с потенциалом специального вида

Будем в этом разделе предполагать матрицу $S = B^{-1}A$ симметричной и рассматривать систему (1.1) в случае потенциала специального вида

$$\Pi(q) = f(\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{2}q^T S q + q^T k, \tag{5.1}$$

где $k \in R^n$ — некоторый постоянный вектор, а $f(\sigma)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая в рассматриваемой области скалярная функция скалярного аргумента. Нетрудно видеть, что для модели диода (4.1) можно взять $f(\sigma) = \sqrt{-2\sigma}$, $k = \mathrm{col}\,(-1, 0)$, т.е. эта модель входит в рассматриваемый класс (5.1).

Утверждение 3. *Если матрицы A и B невырожденные, матрица $S = B^{-1}A$ симметричная, и потенциал имеет вид* (5.1), *то для любой постоянной кососимметричной матрицы C функция*

$$K(q, \dot{q}) = \dot{q}^T(Cq + h), \quad h = CA^{-1}Bk \tag{5.2}$$

является первым интегралом системы (1.1) *в области* Γ.

Доказательство. Вычислим производную (5.2) в силу системы (1.1)

$$\begin{aligned} \left.\frac{dK}{dt}\right|_{(1.1)} &= \dot{q}^T C\dot{q} + \ddot{q}^T\,(Cq + h) = -\left(A^{-1}B\frac{\partial \Pi}{\partial q}\right)^T (Cq + h) = \\ &= -f'(\sigma)\,(Sq + k)^T\left(A^{-1}B\right)^T(Cq + h). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Вся область Ω распадается на два непересекающихся подмножества: Ω_0, где $f'(0.5q^TSq + q^Tk) = 0$, и Ω_1, в котором $f'(0.5q^TSq + q^Tk) \neq 0$.

Из (5.3) сразу следует, что на множестве Ω_0 будет выполнено равенство $\left.\dfrac{dK}{dt}\right|_{(1.1)} \equiv 0$. Чтобы установить это же равенство для подмножества Ω_1 определим на нем матрицу $M(q)$ следующим образом $M(q) = \dfrac{1}{f'(\sigma)}CA^{-1}B$. Имеем цепочку равенств

$$M(q)\frac{\partial\Pi}{\partial q} = \frac{1}{f'(\sigma)}CA^{-1}Bf'(\sigma)\,(Sq+k) =$$

$$= CA^{-1}BB^{-1}Aq + CA^{-1}Bk = Cq + h.$$

Из этой цепочки выражаем $Cq + h = CA^{-1}B\,(Sq+k)$ и подставляем в (5.3), тогда с учетом кососимметричности матрицы C получаем и для подмножества Ω_1, что

$$\left.\frac{dK}{dt}\right|_{(1.1)} = -f'(\sigma)\,(Sq+k)^T\left(A^{-1}B\right)^T CA^{-1}B\,(Sq+k) \equiv 0.$$

Тем самым утверждение полностью доказано. □

Так как кососимметрическую матрицу C можно считать произвольной, то в действительности (5.2) дает не один, а целое семейство интегралов.

Заметим, что при выполнении условий утверждения 3 заведомо выполнены и условия утверждения 1, поэтому наряду с семейством интегралов (5.2) система имеет и интеграл «энергии» (2.1).

Пусть теперь в системе (1.1) вектор $q \in R^n$ является составным вектором $q = \operatorname{col}(Q_i)$, $i = \overline{1,m}$, $Q_i \in R^{n_i}$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$, матрицы A и B являются невырожденными блочно-диагональными $A = \operatorname{blockdiag}(A_i)$, $B = \operatorname{blockdiag}(B_i)$, $i = \overline{1,m}$, со стоящими на главной диагонали квадратными блоками A_i, B_i размера $n_i \times n_i$, а потенциал $\Pi(q)$ имеет специальный вид

$$\Pi(q) = f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m), \quad \sigma_i = \frac{1}{2}Q_i^T S_i Q_i + Q_i^T k_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.4}$$

Здесь $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая в рассматриваемой области скалярная функция m-мерного векторного аргумента, $k_i \in R^{n_i}$ — некоторый постоянный вектор, $S_i = B_i^{-1}A_i$ — квадратная матрица.

В рассматриваемом случае система (1.1) принимает вид

$$A_i\ddot{Q}_i + B_i\frac{\partial\Pi(q)}{\partial Q_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.5}$$

В частном случае, когда функция $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ из (5.4) является суммой скалярных функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента σ_i, система (5.5) представляет собой набор из m изолированных подсистем. Но в общем случае подсистемы не изолированы, а взаимосвязаны через потенциал. Поэтому, следуя терминологии В. М. Матросова [2], систему (5.5) можно назвать сложной системой, состоящей из подсистем, взаимодействующих через потенциал.

Утверждение 4. *Если все матрицы A_i и B_i невырожденные, матрицы $S_i = B_i^{-1}A_i$ симметричные и потенциал имеет вид* (5.3), *то для любой постоянной кососимметрической матрицы C_i функция*

$$K_i(q, \dot{q}) = \dot{Q}_i^T\,(C_iQ_i + h_i), \quad h_i = C_iA_i^{-1}B_ik_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.6}$$

является первым интегралом системы (5.5) *в области* Γ.

Доказательство является по существу повторением доказательства утверждения 3 и поэтому здесь не приводится.

Так как кососимметрическую матрицу C_i можно считать произвольной, то в действительности (5.6) дает целое семейство интегралов. Можно считать, что в условиях утверждения 4 происходит декомпозиция сложной системы, линейные по «скоростям» интегралы фактически строятся как для изолированных подсистем. Заметим также, что при выполнении условий утверждения 4 заведомо выполнены и условия утверждения 1, поэтому наряду с семейством интегралов (5.6) система (5.5) имеет и интеграл «энергии» (2.1).

Система (5.5) может оказаться полезной для моделирования взаимодействия нескольких диодов типа (4.1).

6. Обобщенная модель диода с 6 степенями свободы

В этом разделе будем рассматривать систему (1.1) с вектором $q \in R^6$, единичной матрицей $A = E$, невырожденной диагональной матрицей $B = \mathrm{diag}\,(b_i,\ i = \overline{1, 6})$ и потенциалом вида

$$\Pi(q) = f(\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} b_i^{-1}q_i^2 + \sum_{i=1}^{6} k_iq_i, \tag{6.1}$$

где b_i, k_i — некоторые постоянные, а $f(\sigma)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая скалярная функция скалярного аргумента. Нетрудно видеть, что рассматриваемая система (1.1), (6.1) является частным случаем (1.1), (5.1). В то же время, (1.1), (6.1) можно считать некоторым обобщением модели диода (4.1), так как она отличается утроенным количеством координат, не фиксированными значениями параметров b_i, k_i, $i = \overline{1, 6}$, и произвольной скалярной функцией в потенциале.

Для построения интегралов системы (1.1), (6.1) воспользуемся утверждением 3, все условия которого здесь выполнены. Выбирая в матрице C из (5.2) отличным от нуля только один элемент выше главной диагонали и применяя утверждение 3, получим 15 первых интегралов

$$\begin{gathered} K_{ij}(q,\dot q) = (q_i + b_i k_i)\,\dot q_j - (q_j + b_j k_j)\,\dot q_i = \mathrm{const}, \\ i = \overline{1,6}, \quad j = \overline{i+1,6}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Конечно, все эти интегралы не могут быть независимыми, таковыми среди них будут лишь 9, так как ранг матрицы Якоби для (6.2) равен 9. Например, один из миноров 9-го порядка может быть представлен в виде

$$\Delta = \dot q_6\left((q_5 + b_5k_5)\,\dot q_6 - (q_6 + b_6k_6)\,\dot q_5\right)\left((q_1 + b_1k_1)\,\dot q_2 - (q_2 + b_2k_2)\,\dot q_1\right)^3$$

и не равен нулю в некоторых открытых подобластях Г.

Отметим, что (1.1), (6.1) в определенном смысле аналогична классической задаче небесной механики о двух гравитирующих материальных точках [5] (задача двух тел): та и другая задачи описываются шестью дифференциальными уравнениями второго порядка (или двенадцатью первого), в обеих имеется по 10 независимых первых интегралов подобного типа (интеграл «энергии» + 9 линейных по «скоростям»). Классическая задача двух тел, как известно [5], интегрируема, поэтому обобщенная модель вакуумного диода (1.1), (6.1) также должна быть интегрируема.

7. Случай вырожденной матрицы B

Выше в разделах 4 и 5 первые интегралы строились для систем с невырожденной матрицей B. В данном разделе рассмотрим два примера, в которых матрица B вырождена.

Пример 1. Пусть $q \in R^3$, $\Pi(q) = \exp\left(\frac{1}{2}q^T L q\right)$, $L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$A = E$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ и система (1.1) принимает вид

$$\ddot q + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0. \tag{7.1}$$

В соответствии с утверждением 2, для построения первого интеграла вида (3.1) требуется подобрать постоянную матрицу M так, чтобы были кососимметрическими матрицы ML и $M^T B$. Положим

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда матрицы

$$M^T B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad C = ML = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

будут кососимметрические и система (7.1) имеет первый интеграл $\dot{q}_1 (q_2 - q_3) + \dot{q}_2 (q_3 - q_1) + \dot{q}_3 (q_1 - q_2) = \mathrm{const}$.

Нетрудно показать, что интеграла «энергии» вида (2.1) у системы (7.1) не существует ни при какой симметричной матрице S.

Пример 2. Рассмотрим систему (1.1) в случае $q \in R^n$, $\Pi(q) = \exp\left(\frac{1}{2} q^T q\right)$, а матрицы A и B будем считать кососимметрическими. Полагая $h = 0$, $C = E$, $M(q) = \exp\left(-\frac{1}{2} q^T q\right) E$ убеждаемся, что все условия утверждения 2 выполнены, поэтому функция $J(q, \dot{q}) = q^T A \dot{q}$ — первый интеграл рассматриваемой системы.

Если число координат $n \geq 3$ нечетно, то обе кососимметрические матрицы A и B заведомо вырождены. Таким образом, примеры 1 и 2 показывают, что вырожденность одного или обоих матричных коэффициентов не является препятствием для построения линейного по «скоростям» первого интеграла с помощью утверждения 2.

Пусть теперь число координат $n \geq 2$ четно, матрица A невырождена, а матрица B — вырождена. Вычисляя производную (2.1) в силу системы (1.1) с учетом кососимметричности A и B и конкретного вида потенциала, получаем

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1.1)} = 0.5 \ddot{q}^T S \dot{q} + 0.5 \dot{q}^T S \ddot{q} + \frac{\partial \Pi^T}{\partial q} \dot{q} = \exp\left(\frac{1}{2} q^T q\right) q^T \left(E - BA^{-1} S\right) \dot{q}. \tag{7.2}$$

Чтобы полученная билинейная форма была тождественным нулем, должно выполняться матричное равенство $BA^{-1}S = E$. Однако ни при какой симметричной матрице S это равенство выполняться не может, так как в силу вырожденности матрицы B ранг произведения трех матриц в его левой части заведомо меньше ранга единичной матрицы. Значит, при $\det A \neq 0$, $\det B = 0$ рассматриваемая система не имеет интеграла «энергии» вида (2.1) ни при какой симметричной матрице S.

Пусть теперь число координат $n \geq 2$ четно, обе матрицы A и B невырождены, а матрица $B^{-1}A$ — не симметрична. С учетом кососимметричности A и B это означает, что $B^{-1}A \neq AB^{-1}$. Допустим, что система имеет первый интеграл (2.1), тогда из (7.2) однозначно определяется матрица $S = AB^{-1}$, которая должна быть симметричной. Но тогда симметричной должна быть и обратная $S^{-1} = BA^{-1}$, откуда $BA^{-1} = \left(BA^{-1}\right)^T = A^{-1}B$. Умножая это равенство слева на $B^{-1}A$ и справа на AB^{-1}, получаем $B^{-1}A = AB^{-1}$, что противоречит сделанному выше предположению. Значит при $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$ и несимметричной $B^{-1}A$ рассматриваемая система не имеет интеграла «энергии» вида (2.1) ни при какой симметричной матрице S.

Таким образом, данный пример показывает, что условия утверждения 1 являются по сути необходимыми для существования интеграла «энергии» при произвольном потенциале. При нарушении этих условий интеграла указанного вида может не существовать. Конечно, для некоторых специальных потенциалов (зависящих, например, не от всех координат) и специальных матричных коэффициентов, интеграл вида (2.1) может существовать и при нарушении условий утверждения 1.

8. Представление в гамильтоновой форме и интегрируемость

В этом разделе будем предполагать, что матрицы A и B невырождены, а матрица $S = B^{-1}A$ — симметрична. Покажем, что в этом случае систему (1.1) можно представить в гамильтоновой форме. Для этого положим $p = S\dot{q}$ и $H(q,p) = 0.5p^T S^{-1}p + \Pi(q)$. Тогда систему (1.1) можно в новых координатах записать в каноническом виде

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{8.1}$$

Так как модель диода (4.1) удовлетворяет условиям невырожденности A и B, а $S = B^{-1}A$ для нее диагональна, то (4.1) можно записать в виде (8.1) с гамильтонианом $H(q,p) = 0.5\left(-p_1^2 + p_2^2\right) + j\sqrt{(1+q_1)^2 - 1 - q_2^2}$. В канонических переменных интегралы (4.2) и (4.3) представляются следующим образом $H(q,p) = \mathrm{const}$, $J = (1+q_1)p_2 + q_2p_1 = \mathrm{const}$, они независимы, не зависят явно от времени и находятся в инволюции. Поэтому в соответствии с теоремой Лиувилля [5, § 121, с. 367; § 148, с. 417], модель диода (4.1) является интегрируемой.

Для обобщенной модели (1.1), (6.1) представление в каноническом виде также возможно, а интегралы (2.1) и (6.2) теперь запишутся так

$$\begin{gathered} H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} b_i p_i^2 + \Pi(q) = \mathrm{const}, \\ K_{ij}(q,p) = (q_i + b_i k_i)\, b_j p_j - (q_j + b_j k_j)\, b_i p_i = \mathrm{const}, \\ i = \overline{1,6}, j = \overline{i+1,6}. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Из этих интегралов независимыми и образующими систему в инволюции будут только четыре следующих: $H(q,p) = \mathrm{const}$, $b_1 p_1(q_2+b_2k_2)+b_2p_2(q_1+b_1k_1) = \mathrm{const}$, $b_3p_3(q_4+b_4k_4)+b_4p_4(q_3+b_3k_3) = \mathrm{const}$, $b_5p_5(q_6+b_6k_6)+b_6p_6(q_5+b_5k_5) = \mathrm{const}$. Этого недостаточно для обоснования интегрируемости с помощью теоремы Лиувилля [5, § 148, с. 417].

Однако, как уже было сказано выше, представленная в каноническом виде обобщенная модель диода имеет 10 независимых первых интегралов (интеграл «энергии» + 9 линейных по «импульсам»). Используя один линейный по «импульсам» интеграл, можно преобразовать систему с сохранением ее гамильтоновой формы так, что преобразованная система будет иметь циклическую координату [5, § 150, с. 425] и понизить порядок системы на две единицы. Интеграл энергии позволяет понизить порядок системы еще на две единицы [5, § 141, с. 406]. Оставшиеся пока неиспользованными 8 независимых интегралов семейства (8.2), представленные в новых координатах, обеспечат интегрируемость редуцированной гамильтоновой системы с 4 степенями свободы.

Таким образом, обобщенная модель диода (1.1), (6.1) интегрируема, так же как и модель (4.1).

9. Об изолированности и устойчивости положений равновесия

Для механических систем в (1.1) матрица A симметрична и положительно определена, а $B = E$. В этом случае положениями равновесия $q = \mathrm{const}$, $\dot q = 0$ системы (1.1) являются стационарные точки потенциала $\bar q$, удовлетворяющие уравнению $\dfrac{\partial \Pi(\bar q)}{\partial q} = 0$, и только они. В общем случае это, очевидно, уже не так: при вырожденной матрице B система (1.1) имеет целое множество положений равновесия, для которых равенство $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q} = 0$ нарушено. Далее, для механических систем классическая теорема Лагранжа – Дирихле [3] гарантирует устойчивость в смысле Ляпунова [1] каждому положению равновесия q_*, которое является точкой строгого минимума потенциала $\Pi(q)$. Покажем на примере, что в общем случае для систем вида (1.1) утверждение типа теоремы Лагранжа – Дирихле уже несправедливо при использовании симметричной положительно определенной матрицы B, не совпадающей с единичной.

Пример 3. Система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ddot q + \begin{pmatrix} 84 & 28 & -7 \\ 28 & 11 & -2 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = 0, \quad q \in R^3,$$

$$\Pi(q) = 1 - \cos(0.5q^T Lq), \quad L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 4 & 20 \end{pmatrix},$$

имеет изолированное положение равновесия $q_* = 0$, являющееся строгим минимумом функции $\Pi(q)$.

Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности этого положения равновесия системы записывается в виде $0.1\lambda^6 - 0.8\lambda^4 + 567.7\lambda^2 + 343 = 0$. Наличие у характеристического полинома коэффициентов разных знаков означает наличие корней с положительной вещественной частью. Поэтому линеаризованная система неустойчива, что по теореме Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению [1], влечет неустойчивость положения равновесия $q_* = 0$ исходной нелинейной системы.

Данный пример показывает, что при неединичной матрице B качественные свойства решений (например, устойчивость) могут существенно отличаться от характерных для традиционного случая $B = E$. Таким образом, требуется специальное исследование качественных свойств системы (1.1).

Список литературы

1. Ляпунов А. М. Избранные труды. Работы по теории устойчивости / А. М. Ляпунов. – М. : Наука, 2007. – 574 с.
2. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов. – М. : Физматлит, 2001. – 384 с.
3. Руш Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. – М. : Мир, 1980. – 300 с.
4. Семенов Э. И. Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения / Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер.: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 78–91.
5. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика / Э. Т. Уиттекер. — Ижевск : Удмурт. ун-т, 1999. – 588 с.
6. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука, 1996. – 279 с.
7. Ben Abdallach N. Mathematical Models of Magnetic Insulation / N. Ben Abdallach, P. Degond, F. Mehats. Rapport interne № 97.20 1997, MIP, Universite Paul Sabatier, Toulouse (France), 1997.
8. Sidorov N. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Application / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. – Kluwer Academic Publisher, 2002. – 568 p.

A. A. Kosov, A. V. Sinitsyn

Construction of the first integrals for a special class of nonlinear systems

Abstract. Existence conditions of the first integrals of a certain type for a class of nonlinear systems including vacuum diode model and its generalizations are obtained. The integrability of these diode models is justified.

Keywords: unresolved systems, first integrals, integrability, vacuum diode.

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления Сибирского отделения РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 42 71 00 (kosov_idstu@mail.ru).

Синицын Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Колумбии, Богота, Колумбия (avsinitsyn@yahoo.com).

Alexander Kosov, Leading researcher; Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISD&CT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russia; Phone: (3952) 42 71 00 (kosov_idstu@mail.ru).

Alexander Sinitsyn, Professor, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia (avsinitsyn@yahoo.com).