



Серия «Математика»

2012. Т. 5, № 1. С. 2–12

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 517.940

Построение асимптотики решений нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка с двумя бифуркационными параметрами *

Т. Е. Бадюкина

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева

Б. В. Логинов

Ульяновский государственный технический университет

Ю. Б. Русак

Австралийский национальный университет, г. Канберра, Австралия

Аннотация. Методы многопараметрической теории бифуркаций иллюстрируются на примере нелинейной граничной задачи аэроупругости. Изгибные формы удлиненной пластины на упругом основании обтекаемой сверхзвуковым потоком газа и подверженной малой нормальной нагрузке, в безразмерных переменных описывается обыкновенным интегро-дифференциальным уравнением 4-го порядка с двумя бифуркационными (спектральными) параметрами: число Маха M и малая нормальная нагрузка $\varepsilon_0 q$. Методами теории бифуркаций и теории катастроф выполнен расчет изгибных форм для граничных условий B (левый край свободен, правый — жестко закреплен). Технические трудности, возникшие при исследовании линеаризованной задачи на собственные значения преодолеваются с помощью представления бифуркационных кривых через корни соответствующего характеристического уравнения. Фредгольмовость линеаризованной задачи доказывается построением соответствующих функций Грина.

Ключевые слова: краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений высоких порядков; многопараметрическая бифуркация; пластина в сверхзвуковом потоке газа; прогиб пластины; дискриминантная кривая; уравнение разветвления.

* Полученные результаты поддержаны ФПЦ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» ГК П1122 и АВИЦП «Развитие научного потенциала ВШ Минобразования РФ» No. 2.1.1/11180

1. Постановка задачи

При применении методов теорий ветвления и бифуркаций [2, 8] к нелинейным граничным задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) высоких порядков возникают технические трудности, связанные с исследованием спектра прямой и сопряженной задач. Для их преодоления в работе рекомендуется использовать методы отделения корней характеристических уравнений [4qqqq] с последующим представлением бифуркационных многообразий через корни этих уравнений. Этот прием позволяет исследовать многопараметрические бифуркационные краевые задачи для ОДУ высоких порядков в точной постановке, а также строить методами [7qqqq] соответствующие функции Грина, доказывая тем самым фредгольмовость соответствующих линеаризованных операторов. Ниже он иллюстрируется на примере конкретной граничной задачи аэроупругости — дивергентной потери устойчивости удлиненной пластины на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа, описываемой нелинейной граничной задачей для интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка. Исследована задача о прогибах тонкой гибкой удлиненной пластины ширины d на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа (дивергенции пластины) при граничных условиях видов:

$$\begin{aligned}
 (B) : \quad & \text{левый край свободен, правый жестко закреплен} \\
 & w''_{x_2}(0) = w'''_{x_3}(0) = 0, \quad w(1) = w'_x(1) = 0 \\
 (B') : \quad & \text{левый край жестко закреплен, правый - свободен} \\
 & w(0) = w'_x(0) = 0 \quad w''_{x_2}(1) = w'''_{x_3}(1) = 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Однако в виду ограниченности объема статьи результаты приведены только для условий (B). В безразмерных переменных задача описывается уравнением [3qqqq]

$$\chi^2 \left(\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}} \right)'' + \beta_0 w = kK(w'_x, M, \kappa) + \theta w'' \int_0^1 [(1+w'^2)^{\frac{1}{2}} - 1] dx + \varepsilon_0 q(x) \tag{1.2}$$

где $w = w(x)$ — прогиб пластины, $0 \leq x_1 \leq d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $x = \frac{x_1}{d}$, $0 < x < 1$ — прямоугольные координаты. $\chi^2 = \frac{h^2}{12(1-\mu^2)d^2}$, $T = \frac{qd}{Eh}$ и $k = \frac{p_0 d}{Eh}$, где d — ширина пластины, h — её толщина, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, $M = \frac{v}{c_\infty}$ — число Маха (v — скорость потока газа, c_∞ , p_∞ — скорость и давление в невозмущенном газе), κ — показатель политропы, β_0 — коэффициент жесткости основания, $\varepsilon_0 q(x)$ — малая нормальная нагрузка. Здесь $K(w'_x, M, \kappa) = 1 - [1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ — при одностороннем обтекании, $K(w'_x, M, \kappa) = [1 - \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}} - [1 + \frac{\kappa-1}{2} M w'_x]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}$ — при двустороннем обтекании.

Уравнение (1.2) с граничными условиями (B) или (B') является бифуркационной задачей с двумя бифуркационными параметрами (число Маха $M = M_0 + \varepsilon$ и малая нормальная нагрузка ε_0). Поэтому для вычисления изгибных форм в окрестностях критических значений M_0 числа Маха, изменяющегося в зависимости от коэффициента жесткости основания β_0 , применяются методы теории бифуркаций [4] в принятой там терминологии и обозначениях. Фредгольмовость соответствующих линеаризованных операторов доказана построением соответствующих функций Грина. Полученные результаты согласуются с численными расчетами, приведенными в монографии В. В. Болотина [1].

2. Исследование линеаризованной задачи

Линеаризованная задача (1.2) имеет вид

$$\chi^2 w_{x^4}^{(4)} + \sigma w'_x + \beta_0 w = 0 \text{ с условиями } (B) \text{ или } (B') \quad \sigma = 1(2)k\kappa M \quad (2.1)$$

и характеристическим уравнением $\lambda^4 + a\lambda + b = 0$, где $a = \frac{\kappa k M}{\chi^2}$, $b = \frac{\beta_0}{\chi^2}$, множитель $1(2)k\kappa M$ соответствует одностороннему (двустороннему) обтеканию, отделение корней которого выполнено по методу Штурма [5]. При исследовании двухточечной граничной задачи (1.2) возникают следующие возможности.

1°. $D = 256b^3 - 27a^4 > 0$, когда характеристическое уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней $-\gamma \pm \delta_1 i$ и $\gamma \pm \delta_2 i$, $\gamma > 0$, $\delta_2 > \delta_1 > 0$.

2°. $D = 256b^3 - 27a^4 < 0$ — два отрицательных корня $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ и пара комплексно-сопряженных $\gamma \pm \delta i$.

С л у ч а й 1°. Теорема Виета дает соотношения между корнями и коэффициентами характеристического уравнения

$$\begin{aligned} -2\gamma^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 &= 0 & 2\gamma(\delta_1^2 - \delta_2^2) &= -a \\ \gamma^4 + \gamma^2(\delta_1^2 + \delta_2^2) + \delta_1^2\delta_2^2 &= b \end{aligned}$$

из которых следует $\delta_1^2 = \gamma^2(1 - u)$, $\delta_2^2 = \gamma^2(1 + u)$, где $0 \leq u = \sqrt{4 - \frac{b}{\gamma^4}} \leq 1$, $3\gamma^4 + \delta_1^2\delta_2^2 = b$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2\gamma^2$. Случай $u = 0$ (отсутствие сверхзвукового обтекания) и $u = 1$ (кратный отрицательный корень) рассмотрены в расширенной версии работы. При этом $D(u = 0) > 0$, $D(u = 1) = 0$, $D'_u(u \in (0; 1)) < 0 \Rightarrow D > 0$ при $u \in (0; 1)$.

Условие $u < 1$ и определение параметра $u = \sqrt{4 - \frac{b}{\gamma^4}}$ согласуются с неравенством $D > 0$. В переменных γ и u

$$\begin{aligned} a &= 4u\gamma^3 & b &= \gamma^4(4 - u^2) \\ D &= 256\gamma^{12}(64 - 48u^2 - 15u^4 - u^6) \end{aligned}$$

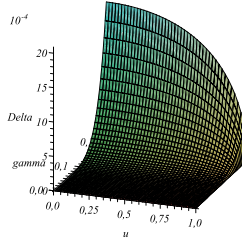


Рис. 1. Рельеф определителя Δ_B при $D > 0$

Для функции прогиба

$$w(x) = e^{-\gamma x}(c_1 \cos \delta_1 x + c_2 \sin \delta_1 x) + e^{\gamma x}(c_3 \cos \delta_2 x + c_4 \sin \delta_2 x)$$

граничные условия (B), записанные в виде системы соответственно их порядку приводят к системе уравнений :

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 - \delta^2 & -2\gamma\delta_1 & \gamma^2 - \delta_2^2 & 2\gamma\delta_2 \\ (-\gamma^2 + 3\delta_1^2)\gamma & 3\gamma^2\delta_1 - \delta_1^3 & \gamma^3 - 3\gamma\delta_2^2 & 3\gamma^2\delta_2 - \delta_2^3 \\ \cos \delta_1 & \sin \delta_1 & e^{2\gamma} \cos \delta_2 & e^{2\gamma} \sin \delta_2 \\ -\gamma \cos \delta_1 - & -\gamma \sin \delta_1 + & e^{2\gamma}(\gamma \cos \delta_2 - & e^{2\gamma}(\gamma \sin \delta_2 + \\ -\delta_1 \sin \delta_1 & +\delta_1 \cos \delta_1 & -\delta_2 \sin \delta_2) & +\delta_2 \cos \delta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычислен определитель граничных условий

$$\begin{aligned} \Delta = \Delta_B = \Delta(\gamma, u) &= \delta_1 \delta_2 (3\gamma^2 - \delta_1^2)^2 e^{-2\gamma} + \delta_1 \delta_2 (\gamma^2 + \delta_1^2)^2 e^{2\gamma} + \\ &+ 4\gamma \delta_2 (3\gamma^4 - 4\gamma^2 \delta_1^2 + \delta_1^4) \sin \delta_1 \cos \delta_2 + \\ &+ 2\delta_1 \delta_2 (13\gamma^4 - 2\gamma^2 \delta_1^2 + \delta_1^4) \cos \delta_1 \cos \delta_2 + \\ &+ 2\gamma^2 (3\gamma^4 + 2\gamma^2 \delta_1^2 - \delta_1^4) \sin \delta_1 \sin \delta_2 + 4\gamma \delta_1 (\gamma^4 - \delta_1^4) \cos \delta_1 \sin \delta_2 = \\ &= \gamma^6 \left\{ 2\sqrt{1-u^2} [(u^2+4) \operatorname{ch} 2\gamma - 2u \operatorname{sh} 2\gamma] + \right. \\ &+ 2\sqrt{1-u^2} (u^2+12) \cos \gamma \sqrt{1-u} \cos \gamma \sqrt{1+u} + \\ &+ u(2-u) \sqrt{1-u} \cos \gamma \sqrt{1-u} \sin \gamma \sqrt{1+u} + \\ &+ 4u(u+2) \sqrt{1+u} \sin \gamma \sqrt{1-u} \cos \gamma \sqrt{1+u} + \\ &\left. + 2(4-u^2) \sin \gamma \sqrt{1-u} \sin \gamma \sqrt{1+u} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Лемма 1. При $D > 0$, $0 < u < 1$ дивергенция отсутствует.

Доказательство. Действительно, часть D_1 определителя $\Delta(\gamma, u)$, не содержащая $\sin \gamma \sqrt{1+u}$ и $\cos \gamma \sqrt{1+u}$, имеет вид:

$$\begin{aligned} D_1 &= (u^2 + 4) \operatorname{ch} 2\gamma - 2u \operatorname{sh} 2\gamma = \frac{1}{2}((u^2+4)(e^{2\gamma} + e^{-2\gamma}) - 2u(e^{2\gamma} - e^{-2\gamma})) = \\ &= \frac{1}{2}(u^2 - 2u + 4)e^{2\gamma} + (u^2 + 2u + 4)e^{-2\gamma} > 0 \end{aligned}$$

Часть D_2 определителя $\Delta(\gamma, u)$, содержащая $\cos \gamma\sqrt{1+u}$ представляет-ся в виде ряда

$$\begin{aligned} D_2 &= 2(u^2 + 12) \cos \gamma\sqrt{1-u} + 4u(u+2)\sqrt{1+u} \sin \gamma\sqrt{1-u} = \\ &= 2\sqrt{1+u} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos \gamma\sqrt{1+u} \frac{\gamma^{2n}}{(2n+1)!} [u^2(2n+1+2\gamma) + \\ &\quad + 4\gamma u + 12(2n+1)] (1-u)^{\frac{2n+1}{2}}, \end{aligned}$$

а часть D_3 , имеющая множителем $\sin \gamma\sqrt{1+u}$, - в виде

$$\begin{aligned} D_3 &= 4u(2-u)\sqrt{1-u} \cos \gamma\sqrt{1-u} + 2(4-u^2) \sin \gamma\sqrt{1-u} = \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\gamma^{2n}}{(2n+1)!} (u(4u+2+\gamma) + 2\gamma)(1-u)^{\frac{2n+1}{2}} \end{aligned}$$

Разложив теперь в ряды $\sin \gamma\sqrt{1+u}$ и $\cos \gamma\sqrt{1+u}$, имеем:

$$\begin{aligned} &D_2 \cos \gamma\sqrt{1+u} + D_3 \sin \gamma\sqrt{1+u} = \\ &= \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+k} \gamma^{2(n+k)}}{(2n+1)!(2k+1)!} \{u^2(4nk+2k+4k\gamma+2n+1-4n\gamma-\gamma^2) + \\ &\quad + u(8\gamma k+4\gamma+8\gamma n+4\gamma) + 12(2k+1)(2n+1) + 4\gamma^2\} \end{aligned}$$

Так как каждый член ряда положителен, то сумма ряда также будет положительной при $0 < u < 1$. Лемма доказана. \square

С л у ч а й 2°, два отрицательных корня $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ и пара комплексно-сопряженных $\gamma \pm \delta i$ ($\delta, \gamma > 0$). Из теоремы Виета следует

$$\begin{aligned} -2\gamma + \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 & 2\gamma\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma^2 + \delta^2) &= -\frac{\sigma}{\chi^2} \\ \alpha_1\alpha_2 - 2\gamma(\alpha_1 + \alpha_2) + \gamma^2 + \delta^2 &= 0 & \alpha_1\alpha_2(\gamma^2 + \delta^2) &= \frac{\beta_0}{\chi^2}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 2\gamma & \alpha_1 &= \gamma + \sqrt{\sqrt{4\gamma^4 - b} - \gamma^2} \\ \alpha_1\alpha_2 &= 2\gamma^2 \pm \sqrt{4\gamma^4 - b} & \alpha_2 &= \gamma - \sqrt{\sqrt{4\gamma^4 - b} - \gamma^2} \end{aligned}$$

Введение переменной $u = \sqrt{4 - \frac{b}{\gamma^4}}$, $1 \leq u \leq 2$ дает соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma(1 + \sqrt{u-1}) & a &= 4\gamma^3 u \\ \alpha_2 &= \gamma(1 - \sqrt{u-1}) & b &= \gamma^4(4 - u^2) \end{aligned}$$

а также $\gamma^2 + \delta^2 = \gamma^2(2+u)$, $\alpha_1\alpha_2 = 3\gamma^2 - \delta^2$, $\gamma^2 - \delta^2 = -\gamma^2 u$, $\delta^2 = \gamma^2(1+u)$. Используя ограничение $1 < u < 2$, найдем область допустимых значений для параметра γ :

$$\begin{aligned} 1 < \sqrt{4 - \frac{b}{\gamma^4}} < 2 & \quad 1 < 4 - \frac{b}{\gamma^4} < 4 \\ 0 < \frac{b}{\gamma^4} < 3 & \quad 0 < b < 3\gamma^4 \Rightarrow \gamma > \sqrt[4]{\frac{b}{3}} \end{aligned}$$

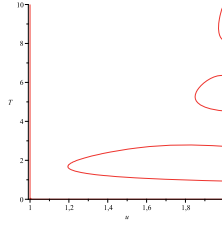
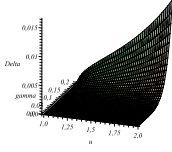


Рис. 2. а) рельеф Δ_B при $D < 0$, б) график $\gamma = \gamma(u)$ при $D < 0$ ($\Delta_B = 0$)

Приведем ограничения на коэффициенты характеристического уравнения: $a = 4u\gamma^3 > 4u(\frac{b}{3})^{\frac{3}{4}} > 4(\frac{b}{3})^{\frac{3}{4}}$, $b < \sqrt[3]{\frac{3^{3/4}a}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, $b < 3(\frac{a}{4})^{4/3}$. Неравенство $b < 3\gamma^4$ обеспечивает условие $D < 0$. Дискриминант D принимает вид $D = 256\gamma^{12}(64 - 48u^2 - 15u^4 - u^6)$. Интересно отметить справедливость следующих соотношений $D(u = 1) = 0$, $D(u = 2) < 0$, $D'_u(u \in (1; 2)) < 0$ т.е. $D < 0$ и D -убывает при $u \in (1, 2)$. Для граничных условий (B) функция прогиба имеет вид

$$w(x) = c_1 e^{-\alpha_1 x} + c_2 e^{-\alpha_2 x} + e^{\gamma x} (c_3 \cos \delta x + c_4 \sin \delta x) = \\ = c_1 e^{-\gamma(1+\sqrt{u-1})x} + c_2 e^{-\gamma(1-\sqrt{u-1})x} + e^{\gamma x} [c_3 \cos \gamma\sqrt{1+u} + c_4 \sin \gamma\sqrt{1+u}] \quad (2.3)$$

с определителем граничных условий

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \gamma^2 - \delta^2 & 2\gamma\delta \\ -\alpha_1^3 & -\alpha_2^3 & \gamma(\gamma^2 - 3\delta^2) & \delta(2\gamma^2 - \delta^2) \\ e^{-\alpha_1} & e^{-\alpha_2} & e^\gamma \cos \delta & e^\gamma \sin \delta \\ -\alpha_1 e^{-\alpha_1} & -\alpha_2 e^{-\alpha_2} & e^\gamma(\gamma \cos \delta - \delta \sin \delta) & e^\gamma(\gamma \sin \delta + \delta \sin \delta) \end{vmatrix} = \\ = \delta\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)e^{2\gamma} + \delta(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma^2 + \delta^2)^2e^{-2\gamma} - \\ - \delta\alpha_2^2 \cos \delta e^{-\alpha_1 + \gamma} [(\gamma^2 + \delta^2)(2\gamma + \alpha_2) + \alpha_1(3\gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\alpha_2)] + \\ + \alpha_2^2 \sin e^{-\alpha_1 + \gamma} [(\gamma^2 + \delta^2)(3\gamma^2 - \delta^2 + \alpha_1\alpha_2) - 2\delta^2\alpha_1(\alpha_2 + 2\gamma)] + \\ + \delta\alpha_1^2 \cos \delta e^{-\alpha_2 + \gamma} [(\gamma^2 + \delta^2)(2\gamma + \alpha_1) + \alpha_2(3\gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\alpha_1)] - \\ - \alpha_1^2 \sin e^{-\alpha_2 + \gamma} [(\gamma^2 + \delta^2)(3\gamma^2 - \delta^2 + \alpha_1\alpha_2) - 2\delta^2\alpha_2(\alpha_1 + 2\gamma)] \quad (2.4)$$

Осуществив переход к переменным u и γ , имеем

$$\Delta(\gamma, u) = 4\gamma^6 \left\{ \sqrt{u^2 - 1} [(4 + u^2) \operatorname{ch} 2\gamma - 4u \operatorname{sh} 2\gamma] + \right. \\ \left. + [(4 - u^2) \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1} + 2u(2-u)\sqrt{u-1} \operatorname{ch} \gamma\sqrt{u-1}] \sin \gamma\sqrt{u+1} + \right. \\ \left. + [2u(2+u) \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1} + (12+u^2)\sqrt{u-1} \operatorname{ch} \gamma\sqrt{u-1}] \sqrt{1+u} \cos \gamma\sqrt{1+u} \right\} \quad (2.5)$$

Поскольку $\Delta(1, \frac{3}{2}) > 0$, а $\Delta(2, \frac{3}{2}) < 0$, то существуют значения γ и δ , такие что $\Delta = 0$. Равенство $\Delta = 0$ позволяет найти бифуркационные кривые, как многообразие собственных значений линейризованной задачи (1.2) с граничными условиями (B) (см. рис.2).

3. Подпространство нулей прямой и сопряженной задач

В случае $D < 0$ собственные функции, отвечающие собственным значениям определяемым равенством $\Delta(\gamma, u) = 0$ находятся при учете граничных условий (B) для функции прогиба (2.3), что приводит к системе алгебраических уравнений для определения постоянных c_k :

$$\begin{aligned} c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + c_3(\gamma^2 - \delta^2) &= -2\gamma\delta c_4 \\ -c_1\alpha_1^3 - c_2\alpha_2^3 + c_3\gamma(\gamma^2 - 3\delta^2) &= -\delta(3\gamma^2 - \delta^2)c_4 \\ c_1e^{-\alpha_1} + c_2e^{-\alpha_2} + c_3e^\gamma \cos \delta &= -e^\gamma \sin \delta c_4 \end{aligned}$$

или в переменных γ и u :

$$\begin{aligned} c_1(1 + \sqrt{u-1})^2 + c_2(1 - \sqrt{u-1})^2 - c_3u &= -2\sqrt{1+u}c_4 \\ c_1(1 + \sqrt{u-1})^3 + c_2(1 - \sqrt{u-1})^3 - c_3(2 + 3u) &= -(2-u)\sqrt{1+u}c_4 \\ c_1e^{-\gamma(2+\sqrt{1+u})} + c_2e^{-\gamma(2-\sqrt{1+u})} + c_3 \cos \gamma\sqrt{1+u} &= -\sin \gamma\sqrt{1+u}c_4 \end{aligned}$$

Определитель полученной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{vmatrix} u + 2\sqrt{u-1} & u - 2\sqrt{u-1} & -u \\ (3u-2) + (u+2)\sqrt{u-1} & (3u-2) - (u+2)\sqrt{u-1} & 2+3u \\ e^{-\gamma(2+\sqrt{u-1})} & e^{-\gamma(2-\sqrt{u-1})} & \cos \gamma\sqrt{1+u} \end{vmatrix} = \\ &= -2((2-u)^2\sqrt{u-1} \cos \gamma\sqrt{1+u} + 6u^2e^{-2\gamma} \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1} + \\ &\quad + (u^2 + 8u + 4)\sqrt{u-1}e^{-2\gamma} \operatorname{ch} \gamma\sqrt{u-1}) \end{aligned}$$

По Крамеру

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{c_4}{\Delta_0} [-\{6u^2 - (u^2 + 8u + 4)\sqrt{u-1} \sin \gamma\sqrt{1+u} + (8\sqrt{u^2-1} + \\ &\quad + (u^2 - 8u + 4)\sqrt{1+u} \cos \gamma\sqrt{1+u} + \sqrt{1+u}(u+2)^2e^{-\gamma(2-\sqrt{u-1})}\}] \\ c_2 &= \frac{c_4}{\Delta_0} [(8\sqrt{u^2-1} - (4-8u+u^2)\sqrt{1+u}) \cos \gamma\sqrt{1+u} + \\ &\quad + (6u^2 + (u^2 + 8u + 4)\sqrt{u-1}) \sin \gamma\sqrt{1+u} - \sqrt{1+u}(u+2)^2e^{-\gamma(2+\sqrt{u-1})}] \\ c_3 &= \frac{c_4}{\Delta_0} [2(u^2 - 8u + 4)\sqrt{1+u}e^{-2\gamma} \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1} - \\ &\quad - 16\sqrt{u^2-1}e^{-2\gamma} \operatorname{ch} \gamma\sqrt{u-1} + 2\sqrt{u-1}(u-2)^2 \sin \gamma\sqrt{1+u}] \end{aligned}$$

Подпространство нулей прямой задачи в точках бифуркации, определяемых равенством $\Delta(\gamma, u) = 0$, одномерно с базисным элементом

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1e^{-\gamma(1+\sqrt{u-1})x} + c_2e^{-\gamma(1-\sqrt{u-1})x} + (c_3 \cos \gamma\sqrt{1+u}x + \\ &\quad + c_4 \sin \gamma\sqrt{1+u}x)e^{\gamma x} \Big|_{c_4=1} = \\ &= \frac{1}{\Delta_0} [2\sqrt{1+u}(u+2)^2e^{-\gamma(2+x)} \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1}(1-x) + \\ &\quad + 12u^2 \sin \gamma\sqrt{1+u}e^{-\gamma x} \operatorname{sh} \gamma\sqrt{u-1}x + \\ &\quad + 2(u^2 + 8u + 4)\sqrt{u-1}e^{-\gamma x} \sin \gamma\sqrt{1+u} \operatorname{ch} \gamma\sqrt{u-1}x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 16\sqrt{u^2 - 1} \cos \gamma \sqrt{1 + u} e^{-\gamma x} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} x - \\
& - 2(u^2 - 8u + 4) \sqrt{1 + u} e^{-\gamma x} \cos \gamma \sqrt{1 + u} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} x + \\
& \quad + 2\sqrt{u - 1} (2 - u)^2 \sin \gamma \sqrt{1 + u} (1 - u) - \\
& - 16\sqrt{u^2 - 1} e^{-2\gamma + \gamma x} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} \cos \gamma \sqrt{1 + u} x + \\
& + 2(u^2 - 8u + 4) \sqrt{1 + u} e^{-2\gamma + \gamma x} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} \cos \gamma \sqrt{1 + u} x - \\
& \quad - 12u^2 e^{-(2-x)\gamma} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} \sin \gamma \sqrt{1 + u} x - \\
& - 2(u^2 + 8u + 4) \sqrt{u - 1} e^{-(2-x)\gamma} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} \sin \gamma \sqrt{1 + u} x] \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Присоединенные элементы отсутствуют если $\Delta_0 \neq 0$ в точках соответствующих собственным значениям $\Delta(\gamma, u) = 0$. Имеются основания считать, что они отсутствуют.

Сопряженная к (1.2) задача строится методами [7] $\chi^2 w^{(4)} - \sigma w' + \beta_0 w = 0$ с граничными условиями (B^*) $w''(0) = 0, \chi^2 w^{(3)} - \sigma w(0) = 0, w(1) = 0, w'(1) = 0$. Характеристическое уравнение имеет вид $\chi^2 \lambda^4 - \sigma \lambda + \beta_0 = 0$. Отделение его корней выполнено методом Штурма [5].

При $D = 256b^3 - 27a^4 > 0$ характеристическое уравнение имеет две пары комплексно-сопряженных корней $-\gamma \pm \delta_1 i$ и $\gamma \pm \delta_2 i$ ($\gamma, \delta_1, \delta_2 > 0$) и согласно Лемме 1 дивергенция отсутствует.

Тем же методом устанавливается, что при $D < 0$ оно имеет два положительных и пару комплексно-сопряженных корней α_1, α_2 и $-\gamma \pm \delta i$ ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \delta > 0$). Собственные значения прямой и сопряженной задач совпадают и определяются тем же равенством $\Delta(\gamma, u) = 0$. Соответственно собственное подпространство одномерно с базисным элементом

$$\begin{aligned}
\psi(x) = & \frac{2\gamma^5}{\Delta_0^*} \left[(2 - u)^2 \sqrt{1 + u} e^{\gamma(x+1)} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} (x - 1) - \right. \\
& - \sin \gamma \sqrt{1 + u} e^{\gamma(x-1)} \left[2u^2 \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} x + (u^2 + 4) \sqrt{u - 1} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} x \right] + \\
& \quad + \sqrt{1 + u} \cos \gamma \sqrt{1 + u} e^{\gamma(x-1)} \left[8\sqrt{u - 1} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} x + \right. \\
& \quad + (u^2 + 4) \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} x \left. \right] - 8\sqrt{u^2 - 1} e^{-\gamma(x-1)} \cos \gamma \sqrt{1 + u} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} - \\
& \quad - (u^2 + 4) \sqrt{1 + u} e^{-\gamma(x-1)} \cos \gamma \sqrt{1 + u} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} + \\
& \quad + (u^2 + 4) \sqrt{u - 1} e^{-\gamma(x-1)} \sin \gamma \sqrt{1 + u} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} + \\
& \quad \quad + 2u^2 e^{-\gamma(x-1)} \sin \gamma \sqrt{1 + u} \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} + \\
& \quad \quad \left. + (u + 2)^2 \sqrt{u - 1} e^{-\gamma(x+1)} \sin \gamma \sqrt{1 + u} (x - 1) \right] \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Присоединенные элементы отсутствуют, если

$$\begin{aligned}
\Delta_0^* = & \gamma^5 e^\gamma \left[2(u^2 + 4) \sqrt{u - 1} \operatorname{ch} \gamma \sqrt{u - 1} + 4u^2 \operatorname{sh} \gamma \sqrt{u - 1} + \right. \\
& \quad \left. + 2(u + 2)^2 \sqrt{u - 1} e^{-2\gamma} \cos \gamma \sqrt{1 + u} \right] \neq 0
\end{aligned}$$

в собственных значениях, соответствующих $\Delta(\gamma, u) = 0$.

4. Вычисление асимптотики разветвляющихся решений в случае одно- и двустороннего обтекания

Приведем далее кратко исследование соответствующего уравнения разветвления (УР) при отсутствии малой нормальной нагрузки. При одностороннем обтекании пластины УР имеет вид $L_{11}\xi\varepsilon + L_{20}\xi^2 + \dots = 0$, где

$$L_{11} = k\kappa(1(2)) \int_0^1 \varphi' \psi dx, L_{20} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{4} M_0 \int_0^1 \varphi_x'^2 \psi dx$$

а при двустороннем обтекании : $L_{30}\xi^3 + L_{11}\xi\varepsilon + \dots = 0$, где

$$L_{30} = -\frac{k\kappa(\kappa+1)}{6} M_0 \int_0^1 \varphi'^3 \psi dx + \chi^2 \int_0^1 \psi \left(\frac{3}{2} \varphi_x'^2 \varphi_x^{(4)} + 3\varphi_x''^3 + 9\varphi_x' \varphi_x'' \varphi_x''' \right) dx + \frac{\theta}{2} \int_0^1 \varphi_x'^2 \int \varphi_x'' \psi dx$$

Соответственно асимптотика разветвляющихся решений определяется формулами: $w(x) = -\frac{L_{11}}{L_{20}}\varepsilon\varphi(x) + o(|\varepsilon|)$ — для одностороннего обтекания и $w(x) = \pm \sqrt{\frac{L_{11}\varepsilon}{L_{30}}}\varphi(x) + O(|\varepsilon|)$ — при двустороннем, где $sign\varepsilon = signL_{11}L_{30}$ определяется неотрицательностью выражения под корнем. Значения коэффициентов УР здесь не выписываются в силу их громоздкости.

Так как вторым бифуркационным параметром является ε_0 , в общем случае ненулевой нормальной нагрузки ($\varepsilon \neq 0$) подпространства нулей прямой и сопряженной задач прежние (3.4) и (3.5).

Методом Ляпунова – Шмидта [2] строится уравнение разветвления:

$$L(\xi, \varepsilon_0, \varepsilon) = L_{300}\xi^3 + L_{101}\xi\varepsilon + L_{010}\varepsilon_0 + \dots = 0$$

Его исследование показывает, что в окрестности точек бифуркации происходит катастрофа типа складки. Оно выполнено в [2] §35 для другой задачи. Асимптотика разветвляющихся решений вычисляется также в полном соответствии с [2].

Составляя результат главной части УР и её производной по ξ , получаем приближенную кривую разветвления:

$$4L_{101}\varepsilon^3 + 27L_{010}^2L_{300}\varepsilon_0^2 = 0 \quad (4.1)$$

Так как коэффициенты L_{101} , L_{010} , L_{300} положительны, то полукубическая парабола (4.1) касается оси абсцисс ε и лежит по левую сторону от оси ε_0 . Слева от кривой разветвления УР имеет три вещественных малых решения $\xi_0(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\xi_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon_0)$, два из которых (ξ_{\pm}) совпадают на этой кривой, а справа - одно $\xi_0(\varepsilon, \varepsilon_0)$.

В [2] УР с помощью замены переменных

$$\eta = L_{010}^{1/3}L_{300}^{-1/3}\varepsilon_0^{1/3}, \quad \omega = L_{101}\varepsilon L_{300}^{-1/3}(L_{010}\varepsilon_0)^{-2/3}$$

преобразуется к уравнению с одним параметром

$$1 + \omega\eta + \eta^3 \simeq 0$$

для которого точка $\omega = -3 \cdot 2^{-2/3}, \eta = 2^{-1/3}$ является точкой ветвления, т.е. уравнение кривой разветвления может быть записано в виде $\omega \simeq -3 \cdot 2^{-2/3}$. В [2] построена следующая асимптотика решений $\xi(\varepsilon, \varepsilon_0)$ УР, а тем самым и решений исходной задачи: $w \simeq \xi(\varepsilon, \varepsilon_0)\varphi$, где

$$\xi_0(\varepsilon, \varepsilon_0) \simeq (4L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_0)^{1/3}$$

$$\xi_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon_0) \simeq \sqrt[3]{L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_0 \left[2^{-1/3} \mp \sqrt{3 \cdot 2^{-2/3} + L_{101}\varepsilon(L_{010}\varepsilon_0)^{-2/3}L_{300}^{-1/3}} \right]}$$

в окрестности кривой разветвления, т.е. при $\varepsilon\varepsilon_0^{-2/3} \rightarrow -\frac{3}{2^{2/3}}L_{010}^{2/3}L_{300}^{1/3}L_{101}^{-1}$; $\xi_{\pm} \simeq 2^{-1/3}(L_{010}L_{300}^{-1}\varepsilon_0)^{1/3} = 3^{-1/2}L_{300}^{-1/2}(-L_{101}\varepsilon)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_0$, $\xi_0 = -2\xi_{\pm}$ на кривой разветвления (два решения совпадают);

$$\begin{aligned} \xi_{0,+}(\varepsilon, \varepsilon_0) &\simeq \mp L_{300}^{-1}(-L_{101}\varepsilon)^{1/2}\text{sign}\varepsilon_0 \\ \xi_{-}(\varepsilon, \varepsilon_0) &\simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon^{-1}\varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

при больших отрицательных значениях $\varepsilon\varepsilon_0^{-2/3}$;

$$\xi_0(\varepsilon, \varepsilon_0) \simeq -L_{010}L_{101}^{-1}\varepsilon^{-1}\varepsilon_0$$

при больших положительных.

Полученная картина поведения решений ε_{\pm} для $\varepsilon_0 > 0$ задачи (1.2) совпадает с картиной, описанной в [6] для другой задачи. Критическое значение числа Маха (точка бифуркации) уменьшается по сравнению со случаем $\varepsilon_0 = 0$:

$$M_{\text{кр}} \simeq M_* - 3 \cdot 2^{-2/3}\varepsilon_0^{2/3}L_{010}^{2/3}L_{300}^{1/3}L_{101}^{-1} \quad (4.3)$$

Формула (4.3) и вид функций ξ_{\pm} согласуется с графиками $\xi(\varepsilon, \varepsilon_0)$, приведенными в [1] для конкретных значений ε_0 .

Список литературы

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости / В. В. Болотин. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 339 с.
2. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 524 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
4. Иохвидов И. С. Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы / И. С. Иохвидов. – М. : Наука, 1974. – 263 с.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1965. – 431 с.

6. Логинов Б. В. Задача о дивергенции крыла как пример теории ветвления решений нелинейных уравнений с двумя малыми параметрами / Б. В. Логинов // ДУ и их приложения : сб. науч. тр. – Ташкент, 1979. – С. 109–113.
7. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.

T. E. Badokina, B. V. Loginov, Yu. B. Rusak

Construction of the asymptotics of solutions of nonlinear boundary value problems for fourth order differential equation with two bifurcation parameters

Abstract. Methods of many-parameter bifurcation theory are illustrated by the example of nonlinear boundary value problem of aeroelasticity. Bending forms of a thin elongated plate subjected to small normal load on elastic foundation and flowing around by supersonic flow of a gas in dimensionless variables are described by ODE of 4-th order with two bifurcational (spectral) parameters: Mach number M and small normal load $\varepsilon_0 q$. By bifurcation and catastrophe theory methods the bending forms computations are fulfilled for the boundary conditions B (the left edge is free, the right one is rigidly fixed). Technical difficulties arising at the investigation of the linearized eigenvalue problem are overcome with the aid of the bifurcation curves representation through the roots of the relevant characteristic equation. Fredholm property of the linearized problem is proved with the aid of relevant Green function construction.

Keywords: boundary value problem of ordinary differential equations of higher order; multi-parameter bifurcation; plate in supersonic gas flow; plate deflection, discriminant curve; branching equation

Бадокина Татьяна Евгеньевна, аспирант, кафедра прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, 430016, Саранск, ул. Ботевградская, 81, 26 тел.: (8342)24–81–05 (badokina@gmail.com)

Логинов Борис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, 432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32, главный учебный корпус, а. Г605. тел.: (8422) 77–81–17 (bv11bv@yandex.ru)

Русак Юрий Борисович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Австралийского национального университета, г. Канберра, Австралия (irousak@gmail.com)

Tatyana Badokina, Mordovian State University, Phone: (8342)24–81–05 (badokina@gmail.com)

Boris Loginov, professor, Ulyanovsk State Technical University, Phone: (8422) 77–81–17 (bv11bv@yandex.ru)

Yuri Rousak (irousak@gmail.com)