Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 1. С. 26—41

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.983.23

Некоторые свойства жордановых наборов векторов линейных операторов в банаховых пространствах

М. А. Елишевич
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Аннотация. Исследованы условия существования и свойства жордановых наборов векторов линейных операторов в банаховых пространствах.

Ключевые слова: банахово пространство; линейный оператор; вектор; функционал; жорданова цепочка.

Постановка задачи

Пусть E_1, E_2 — рефлексивные банаховы пространства, $A, B\colon E_1 \to E_2$ — линейные над полем Φ замкнутые нормально разрешимые операторы, $D\,(A) = D\,(B) = E_1$, $\dim\ker A \neq 0$ и (или) $\dim\ker B \neq 0$.

В данной работе рассматриваются свойства жордановых наборов векторов операторов B относительно A и A относительно B, а также функционалов сопряженных операторов B^* относительно A^* и A^* относительно B^*. Они имеют важное значение для решения дифференциальных уравнений

$$B\,(t)\,\frac{dx}{dt} = A\,(t)\,x.$$

Основные определения

Определение 1. *Элемент $\varphi^{(1)} \in \ker B$ имеет конечную жорданову цепочку векторов оператора B относительно оператора A длины p, $p > 0$, если существуют векторы $\varphi^{(i)} \in E_1$, $i = \overline{1,p}$, удовлетворяющие соотношениям:*

$$B\varphi^{(1)} = 0,$$

$$B\varphi^{(i)} = A\varphi^{(i-1)}, \quad i = \overline{2,p},$$
$$A\varphi^{(p)} \notin R(B).$$

Определение 2. *Элемент $\tilde{\varphi}^{(1)} \in \ker B$ имеет циклическую жорданову цепочку векторов оператора B относительно оператора A длины $\tilde{p}$, $\tilde{p} > 0$, если существуют векторы $\tilde{\varphi}^{(i)} \in E_1$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$, удовлетворяющие соотношениям:*

$$B\tilde{\varphi}^{(1)} = 0,$$
$$B\tilde{\varphi}^{(i)} = A\tilde{\varphi}^{(i-1)}, \quad i = \overline{2,\tilde{p}},$$
$$A\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})} = 0.$$

При этом элемент $\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})} \in \ker A$ имеет циклическую жорданову цепочку векторов оператора A относительно оператора B длины $\tilde{p}$, состоящую из векторов $\tilde{\varphi}^{(\tilde{p}+1-i)}$, $i = \overline{1,\tilde{p}}$.

Определение 3. *Элемент $\hat{\varphi}^{(1)}$ имеет вспомогательную цепочку векторов оператора B относительно оператора A длины $\hat{p}$, $\hat{p} > 0$, если существуют векторы $\hat{\varphi}^{(i)} \in E_1$, $i = \overline{1,\hat{p}}$, удовлетворяющие соотношениям:*

$$B\hat{\varphi}^{(i)} = A\hat{\varphi}^{(i-1)}, \quad i = \overline{2,\hat{p}},$$
$$B\hat{\varphi}^{(1)} \notin R(A),$$
$$A\hat{\varphi}^{(\hat{p})} \notin R(B).$$

При этом элемент $\hat{\varphi}^{(\hat{p})}$ имеет вспомогательную цепочку векторов оператора A относительно оператора B длины $\hat{p}$, состоящую из векторов $\hat{\varphi}^{(\hat{p}+1-i)}$, $i = \overline{1,\hat{p}}$.

Обзор литературы

Жордановы цепочки векторов оператора B относительно A изучались во многих работах (см., например, [2, 4–15]). В [2, 4–8, 10–15] рассматривались только конечные цепочки, при этом в [2, с. 422–431; 4, 11, 15] оператор B — фредгольмов, в [5–8, 10, 12–14] — нётеров. В [9] $\dim\ker B = 1$ и существует одна циклическая цепочка. Там же доказано, что, если элемент $\ker B$ имеет конечную или циклическую жорданову цепочку, состоящую из линейно зависимых векторов, то он имеет также циклическую цепочку, состоящую из линейно независимых векторов.

В данной работе рассматривается случай, когда A и B — нётеровы операторы и могут существовать как конечные, так и циклические цепочки векторов, а также жордановы цепочки векторов оператора A относительно B.

Если E_1 и E_2 — конечномерные евклидовы пространства, A и B — матрицы, то результаты данной работы непосредственно следуют из канонической формы пучка матриц $(A - \lambda B)$ [3, с. 326–330].

Полученный результат

Обобщенный обратный оператор B^- построим с использованием методов [1, с. 41–55; 2, с. 336–344]. Пусть $n = \dim\ker B \geq 0$, φ_i, $i = \overline{1,n}$ — базис в $\ker B$, $m = \dim\ker B^* \geq 0$, ψ_i, $i = \overline{1,m}$ — базис в $\ker B^*$. Согласно следствию из теоремы Хана–Банаха существуют функционалы $\gamma_i \in E_2^*$, $i = \overline{1,n}$ — базис в $\operatorname{coker} B^*$ и векторы $z_i \in E_2$, $i = \overline{1,m}$ — базис в $\operatorname{coker} B$ такие, что

$$\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i,j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Построим операторы–проекторы $P\colon E_1 \to \ker B$ и $Q\colon E_2 \to \operatorname{coker} B$:

$$Px = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \gamma_i \rangle \, \varphi_i, \quad \forall x \in E_1, \tag{3}$$

$$Qy = \sum_{i=1}^{m} \langle y, \psi_i \rangle \, z_i, \quad \forall y \in E_2. \tag{4}$$

Они порождают разложения E_1 и E_2 соответственно:

$$E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}, \quad E_2 = E_2^m \oplus E_2^{\infty-m},$$

где

$$E_1^n = \ker B, \quad E_2^m = \operatorname{coker} B,$$

$$E_1^{\infty-n}\colon \langle x, \gamma_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \forall x \in E_1^{\infty-n},$$

$$E_2^{\infty-m} = R\,(B) : \langle y, \psi_i \rangle = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad \forall y \in E_2^{\infty-m}.$$

Если $n = 0$, то $E_1^{\infty-n} = E_1$. Если $m = 0$, то $E_2^{\infty-m} = E_2$.

Введем оператор $\hat{B}$ — сужение B на $E_1^{\infty-n}$. Он отображает $E_1^{\infty-n}$ на $E_2^{\infty-m}$ взаимно однозначно и согласно теореме Банаха имеет ограниченный обратный оператор $\hat{B}^{-1}$. Оператор B^- определим следующим образом:

$$B^- y = \begin{cases} \hat{B}^{-1} y, & \forall y \in E_2^{\infty-m}, \\ 0, & \forall y \in E_2^m. \end{cases} \tag{5}$$

Операторы $(B^*)^-$, A^-, $(A^*)^-$ построим аналогично. Имеют место равенства:

$$(A^*)^- = \left(A^-\right)^*, \quad (B^*)^- = \left(B^-\right)^*. \tag{6}$$

Элементы указанных в определениях 1–3 цепочек векторов могут быть построены следующим образом:

$$\varphi^{(i)} = \left(B^{-}A\right)^{i-1}\varphi^{(1)},\ \varphi^{(i)} \in E_1^{\infty-n},\ \left\langle \varphi^{(i)}, \gamma_j \right\rangle = 0,\ i = \overline{2,p}, j = \overline{1,n},$$

$$\tilde{\varphi}^{(i)} = \left(B^{-}A\right)^{i-1}\tilde{\varphi}^{(1)},\ \tilde{\varphi}^{(i)} \in E_1^{\infty-n},\ \left\langle \tilde{\varphi}^{(i)}, \gamma_j \right\rangle = 0,\ i = \overline{2,\tilde{p}},\ j = \overline{1,n},$$

$$\hat{\varphi}^{(i)} = \left(B^{-}A\right)^{i-1}\hat{\varphi}^{(1)},\ \hat{\varphi}^{(i)} \in E_1^{\infty-n},\ \left\langle \hat{\varphi}^{(i)}, \gamma_j \right\rangle = 0,\ i = \overline{2,\hat{p}},\ j = \overline{1,n}.$$

Построим жордановы цепочки векторов (функционалов) операторов B относительно A, A относительно B, B^* относительно A^* и A^* относительно B^*.

Определим базис в $\ker A \bigcap \ker B$. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$ линейно независимых векторов $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$A\breve{\varphi}_i = B\breve{\varphi}_i = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что они имеют циклические цепочки векторов операторов A относительно B и B относительно A длины 1.

Аналогично определим базис в $\ker A^* \bigcap \ker B^*$. Пусть мы построили $\breve{r}$, $\breve{r} \geq 0$ линейно независимых функционалов $\breve{\psi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$A^*\breve{\psi}_i = B^*\breve{\psi}_i = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}}. \tag{8}$$

Из (8) следует, что они имеют циклические цепочки функционалов операторов A^* относительно B^* и B^* относительно A^* длины 1.

Определим циклические цепочки оператора B относительно A длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Выберем вектор $\tilde{\varphi}_1^{(1)} \in \ker B$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_1 + 1)$. Далее выберем вектор $\tilde{\varphi}_2^{(1)} \in \ker B$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_1^{(1)}$, имеющий цепочку наименьшей из возможных длин $(\tilde{s}_2 + 1)$ и т.д. Пусть мы построили $\tilde{r}$, $\tilde{r} \geq 0$ цепочек длин $(\tilde{s}_i + 1)$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $0 < \tilde{s}_1 \leq \ldots \leq \tilde{s}_{\tilde{r}}$, состоящих из векторов $\tilde{\varphi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1,\tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\tilde{\varphi}_i^{(j)} = \left(B^{-}A\right)^{j-1}\tilde{\varphi}_i^{(1)}, \quad j = \overline{2,\tilde{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{9}$$

$$B\tilde{\varphi}_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{10}$$

$$B\tilde{\varphi}_i^{(j)} = A\tilde{\varphi}_i^{(j-1)}, \quad j = \overline{2,\tilde{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1,\tilde{r}}, \tag{11}$$

$$A\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)} = 0, \quad i = \overline{1,\tilde{r}}. \tag{12}$$

Аналогично определим циклические цепочки оператора B^* относительно A^* длины больше 1 в порядке возрастания их длин. Пусть мы построили $\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$ цепочек длин $(\hat{s}_i + 1)$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $0 < \hat{s}_1 \leq \ldots \leq \hat{s}_{\hat{r}}$, состоящих из функционалов $\tilde{\psi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\tilde{\psi}_i^{(j)} = \left[(B^*)^- A^*\right]^{j-1} \tilde{\psi}_i^{(1)}, \quad j = \overline{2, \hat{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{13}$$

$$B^* \tilde{\psi}_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{14}$$

$$B^* \tilde{\psi}_i^{(j)} = A^* \tilde{\psi}_i^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, \hat{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \tag{15}$$

$$A^* \tilde{\psi}_i^{(\hat{s}_i + 1)} = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}}. \tag{16}$$

Определим конечные цепочки оператора B относительно A в порядке убывания их длин. Выберем вектор $\varphi_1^{(1)} \in \ker B$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_1. Далее выберем вектор $\varphi_2^{(1)} \in \ker B$, линейно независимый с $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_1^{(1)}$, имеющий цепочку наибольшей из возможных длин s_2 и т.д. Пусть мы построили r, $r \geq 0$ цепочек длин s_i, $i = \overline{1, r}$, $s_1 \geq \ldots \geq s_r > 0$, состоящих из векторов $\varphi_i^{(j)}$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\varphi_i^{(j)} = \left(B^- A\right)^{j-1} \varphi_i^{(1)}, \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \tag{17}$$

$$B \varphi_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, r}, \tag{18}$$

$$B \varphi_i^{(j)} = A \varphi_i^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \tag{19}$$

$$A \varphi_i^{(s_i)} \notin R\left(B\right), \quad i = \overline{1, r}. \tag{20}$$

Аналогично определим конечные цепочки оператора A относительно B в порядке убывания их длин. Пусть мы построили $\bar{r}$, $\bar{r} \geq 0$ цепочек длин $\bar{s}_i$, $i = \overline{1, \bar{r}}$, $\bar{s}_1 \geq \ldots \geq \bar{s}_{\bar{r}} > 0$, состоящих из векторов $\bar{\varphi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\bar{\varphi}_i^{(j)} = \left(A^- B\right)^{j-1} \bar{\varphi}_i^{(1)}, \quad j = \overline{2, \bar{s}_i}, \quad i = \overline{1, \bar{r}},$$

$$A \bar{\varphi}_i^{(1)} = 0, \quad i = \overline{1, \bar{r}}, \tag{21}$$

$$A \bar{\varphi}_i^{(j)} = B \bar{\varphi}_i^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, \bar{s}_i}, \quad i = \overline{1, \bar{r}}, \tag{22}$$

$$B \bar{\varphi}_i^{(\bar{s}_i)} \notin R\left(A\right), \quad i = \overline{1, \bar{r}}.$$

Таким образом, базис $\ker B$ состоит из векторов $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, r}$.

Лемма 1. *Произвольный элемент $\varphi \in \ker B$, представимый в виде:*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_{i1}\breve{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \tilde{c}_{i1}\tilde{\varphi}_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{r} c_{i1}\varphi_i^{(1)},$$

где $\breve{c}_{i1} \in \Phi$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{c}_{i1} \in \Phi$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $c_{i1} \in \Phi$, $i = \overline{1,r}$, может иметь следующие жордановы цепочки векторов оператора B относительно A.

Если все $\tilde{c}_{i1} = 0$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $c_{i1} = 0$, $i = \overline{1,r}$ и есть $\breve{c}_{i1} \neq 0$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, то имеет место только циклическая цепочка длины 1, состоящая из вектора

$$\breve{\varphi} = \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_{i1}\breve{\varphi}_i.$$

Если все $c_{i1} = 0$, $i = \overline{1,r}$ и есть $\tilde{c}_{i1} \neq 0$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, то имеют место и конечные (если $r > 0$), и циклические цепочки, наименьшая из длин циклических цепочек равна $\tilde{s}+1 = \max\limits_{i:\tilde{c}_{i1}\neq 0} \tilde{s}_i + 1$, и состоит эта цепочка из векторов

$$\tilde{\varphi}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_{ik}\breve{\varphi}_i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i:\tilde{s}_i \leq \tilde{s}+j-k} \tilde{c}_{i,k-j+1}\tilde{\varphi}_i^{(j)}, \quad k = \overline{1,\tilde{s}+1},$$

где $\breve{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{2,\tilde{s}+1}$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{2,\tilde{s}-\tilde{s}_i+1}$, $i : \tilde{s}_i \leq \tilde{s}-1$ — произвольные.

Если есть $c_{i1} \neq 0$, $i = \overline{1,r}$, то имеют место только конечные цепочки, наибольшая из длин которых равна $s = \min\limits_{i:c_{i1}\neq 0} s_i$, и состоит эта цепочка из векторов

$$\varphi^{(k)} = \sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_{ik}\breve{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=1}^{\min(k,\tilde{s}_i+1)} \tilde{c}_{i,k-j+1}\tilde{\varphi}_i^{(j)} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i:s_i \geq s+j-k} c_{i,k-j+1}\varphi_i^{(j)}, \ k = \overline{1,s},$$

где $\breve{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{2,s}$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{2,s}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$, $c_{ij} \in \Phi$, $i : s_i \geq s-j+1$, $j = \overline{2,s}$ — произвольные.

Доказательство. Из (7), (10)–(12), (18)–(20) следует, что для указанных векторов равенства определений 1, 2 выполняются.

Поскольку векторы $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,\tilde{r}}$ линейно независимы и при построении циклических цепочек мы каждый раз выбирали цепочку наименьшей из возможных длин, то вектор $\tilde{\varphi}^{(1)}$ не может иметь циклическую цепочку длины меньше $(\tilde{s}+1)$. Аналогично вектор $\varphi^{(1)}$ не может иметь конечную цепочку длины больше s или циклическую цепочку.

Конечные цепочки, которые имеет вектор $\tilde{\varphi}^{(1)}$, получаются из циклических, если к какому-то из присоединенных векторов прибавить ненулевую линейную комбинацию векторов $\varphi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, r}$ и соответствующим образом изменить все следующие за ним векторы исходной циклической цепочки. $\square$

Лемма 2. *Векторы $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\bar{\varphi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$ линейно независимы.*

Доказательство. Пусть имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i \breve{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=1}^{\tilde{s}_i+1} \tilde{c}_{ij} \tilde{\varphi}_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{s}_i} \bar{c}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(j)} = 0, \tag{23}$$

где $\breve{c}_i \in \Phi$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $c_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\bar{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$ не все равны нулю. Обозначим p максимальное значение j, для которого хотя бы одна из величин $\tilde{c}_{ij}$, $i : \tilde{s}_i + 1 \geq j$, c_{ij}, $i : s_i \geq j$ не равна нулю (если таких нет, то положим $p = 1$), q — максимальное значение j, для которого хотя бы одна из величин $\bar{c}_{ij}$, $i : \bar{s}_i \geq j$ не равна нулю (если таких нет, то положим $q = 1$). Имеем:

$$\tilde{c}_{ij} = 0, \quad j = \overline{p + 1, \tilde{s}_i + 1}, \quad i : \tilde{s}_i + 1 > p, \tag{24}$$

$$c_{ij} = 0, \quad j = \overline{p + 1, s_i}, \quad i : s_i > p, \tag{25}$$

$$\bar{c}_{ij} = 0, \quad j = \overline{q + 1, \bar{s}_i}, \quad i : \bar{s}_i > q. \tag{26}$$

Построим векторы $\varphi^{(k)}$, $k = \overline{1, p + q - 1}$ следующим образом:

$$\varphi^{(k)} = \sum_{i:\bar{s}_i > q-k} \sum_{j=1}^{k} \bar{c}_{i,q-k+j} \bar{\varphi}_i^{(j)}, \quad k = \overline{1, q - 1}, \tag{27}$$

$$\varphi^{(q)} = \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{s}_i} \bar{c}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(j)} = -\sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i \breve{\varphi}_i - \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=1}^{\tilde{s}_i+1} \tilde{c}_{ij} \tilde{\varphi}_i^{(j)} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)}, \tag{28}$$

$$\varphi^{(k)} = -\sum_{i:\tilde{s}_i+1 > k-q} \sum_{j=1}^{q+p-k} \tilde{c}_{i,k-q+j} \tilde{\varphi}_i^{(j)} - \sum_{i:s_i > k-q} \sum_{j=1}^{q+p-k} c_{i,k-q+j} \varphi_i^{(j)}, \tag{29}$$

$$k = \overline{q + 1, p + q - 1}.$$

Из (7), (10)–(12), (18), (19), (21)–(29) следует:

$$\varphi^{(1)} = \sum_{i:\bar{s}_i \geq q} \bar{c}_{iq} \bar{\varphi}_i^{(1)} \in \ker A,$$

$$\varphi^{(p+q-1)} = -\delta_{p1}\sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i\breve{\varphi}_i - \sum_{i:\tilde{s}_i+1\geq p} \tilde{c}_{ip}\tilde{\varphi}_i^{(1)} - \sum_{i:s_i\geq p} c_{ip}\varphi_i^{(1)} \in \ker B,$$

для векторов $\varphi^{(k)}$, $k = \overline{1, p+q-1}$ выполняются равенства определения 2, вектор $\varphi^{(1)}$ имеет циклическую жорданову цепочку оператора A относительно B длины $(p+q-1)$. Но согласно лемме 1 такие цепочки имеют только линейные комбинации векторов $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(\tilde{s}_i+1)}$, $i : \tilde{s}_i + 1 \leq p+q-1$, линейно независимых с $\varphi^{(1)}$. Отсюда $q = 1$, $\bar{c}_{ij} = 0$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$. При этом из (28) следует, что $\varphi^{(q)} = 0$, вектор $\varphi^{(p+q-1)}$ имеет циклическую жорданову цепочку оператора B относительно A длины $(p-1)$. Но согласно лемме 1 такие цепочки имеют только линейные комбинации векторов $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i : \tilde{s}_i + 1 \leq p-1$, линейно независимых с $\varphi^{(p+q-1)}$. Отсюда $p = 1$, $c_{ij} = 0$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\tilde{c}_{ij} = 0$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$. Векторы $\breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$ линейно независимы, отсюда $\breve{c}_i = 0$, $i = \overline{1,\breve{r}}$. □

Положим в (1)–(4) $n = r + \tilde{r} + \breve{r}$, $\varphi_i = \varphi_i^{(1)}$, $i = \overline{1, r}$, $\varphi_{r+i} = \tilde{\varphi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $\varphi_{r+\tilde{r}+i} = \breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $z_i = A\varphi_i^{(s_i)}$, $i = \overline{1, r}$, отсюда согласно (5), (17)

$$\left(B^{-}A\right)^j \varphi_i^{(1)} = 0, \quad j \geq s_i, \quad i = \overline{1, r}. \tag{30}$$

Лемма 3. *Имеют место равенства:*

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^j \varphi_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-} A^*\right]^l \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0, \quad j, l \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, \hat{r}}. \tag{31}$$

Доказательство. Из (15) следует:

$$\left\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\tilde{\psi}_k^{(j)}\right\rangle = 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, \hat{s}_k}, \quad k = \overline{1, \hat{r}}. \tag{32}$$

Если $j + l < \hat{s}_k$, то согласно (6), (13), (17), (32)

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^j \varphi_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-} A^*\right]^l \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \\ = \left\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\left[(B^*)^{-} A^*\right]^{j+l} \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\tilde{\psi}_k^{(j+l+1)}\right\rangle = 0.$$

Если $j + l \geq \hat{s}_k$, то согласно (6), (13), (16), (17)

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^j \varphi_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-} A^*\right]^l \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle \left(B^{-}A\right)^{j+l-\hat{s}_k} \varphi_i^{(1)}\right., \\ \left. A^*\left[(B^*)^{-} A^*\right]^{\hat{s}_k} \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle \left(B^{-}A\right)^{j+l-\hat{s}_k} \varphi_i^{(1)}, A^*\tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_k+1)}\right\rangle = 0.$$

□

Замечание 1. Имеют место равенства:

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\varphi_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\breve{\psi}_k\right\rangle = 0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,r},\quad k=\overline{1,\breve{r}}, \tag{33}$$

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\tilde{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\tilde{r}},\quad k=\overline{1,\hat{r}}, \tag{34}$$

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\breve{\varphi}_i, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\breve{r}},\quad k=\overline{1,\hat{r}}. \tag{35}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 4. *Имеют место равенства:*

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0,\quad j=\overline{1,\bar{s}_i},\quad i=\overline{1,\bar{r}},\quad l\geq 0,\quad k=\overline{1,\hat{r}}. \tag{36}$$

Доказательство. Если $l=0$, то из (14) имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle \bar{\varphi}_i^{(j)}, B^*\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0,\quad j=\overline{1,\bar{s}_i},\quad i=\overline{1,\bar{r}},\quad k=\overline{1,\hat{r}}.$$

Если $j=1$, $0<l\leq\hat{s}_k$, то из (13), (15), (21), (22) имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle B\bar{\varphi}_i^{(1)}, \tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle = \left\langle \bar{\varphi}_i^{(1)}, B^*\tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle =$$
$$= \left\langle \bar{\varphi}_i^{(1)}, A^*\tilde{\psi}_k^{(l)}\right\rangle = \left\langle A\bar{\varphi}_i^{(1)}, \tilde{\psi}_k^{(l)}\right\rangle = 0,\quad i=\overline{1,\bar{r}},\quad l=\overline{1,\hat{s}_k},\quad k=\overline{1,\hat{r}}.$$

Если $1<j\leq\bar{s}_i$, $0<l\leq\hat{s}_k$, то аналогично имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle = \left\langle \bar{\varphi}_i^{(j)}, B^*\tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle =$$
$$= \left\langle \bar{\varphi}_i^{(j)}, A^*\tilde{\psi}_k^{(l)}\right\rangle = \left\langle A\bar{\varphi}_i^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(l)}\right\rangle = \left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j-1)}, \tilde{\psi}_k^{(l)}\right\rangle,$$
$$j=\overline{2,\bar{s}_i},\quad i=\overline{1,\bar{r}},\quad l=\overline{1,\hat{s}_k},\quad k=\overline{1,\hat{r}}.$$

Отсюда, если $j\leq l$, то имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle = \left\langle A\bar{\varphi}_i^{(1)}, \tilde{\psi}_k^{(l-j+1)}\right\rangle = 0, j=\overline{1,l}, i=\overline{1,\bar{r}}, l=\overline{1,\hat{s}_k}, k=\overline{1,\hat{r}},$$

если $j>l$, то имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(l+1)}\right\rangle = \left\langle \bar{\varphi}_i^{(j-l)}, B^*\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = 0, j=\overline{l+1,\bar{s}_i}, i=\overline{1,\bar{r}}, l=\overline{1,\hat{s}_k}, k=\overline{1,\hat{r}}.$$

Если $l>\hat{s}_k$, то из (13), (16) имеем:

$$\left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle = \left\langle B\bar{\varphi}_i^{(j)}, \left[(B^*)^{-}A^*\right]^{l-\hat{s}_k-1}(B^*)^{-}A^*\tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_k+1)}\right\rangle = 0,$$
$$j=\overline{1,\bar{s}_i},\quad i=\overline{1,\bar{r}},\quad l>\hat{s}_k,\quad k=\overline{1,\hat{r}}.$$

□

Теорема 1. *Если существуют r, $r \geq 0$ конечных жордановых цепочек векторов оператора B относительно оператора A длин s_i, $s_i > 0$, $i = \overline{1,r}$, то существуют также r конечных жордановых цепочек функционалов оператора B^* относительно оператора A^* тех же длин.*

Доказательство. Из (20) следует, что для каждого вектора $A\varphi_i^{(s_i)}$, $i = \overline{1,r}$ существует элемент $\ker B^*$, принимающий на нем ненулевое значение. Отсюда с учетом (31), (33) следует, что базис $\ker B^*$ содержит функционалы, имеющие конечные жордановы цепочки оператора B^* относительно A^*, поскольку согласно лемме 1 циклические цепочки имеют только линейные комбинации функционалов $\breve{\psi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$.

Пусть мы определили функционал $\psi_1^{(1)} \in \ker B^*$ такой, что

$$\left\langle A\varphi_1^{(s_1)}, \psi_1^{(1)} \right\rangle \neq 0.$$

Если $r > 1$ и $\left\langle A\varphi_2^{(s_2)}, \psi_1^{(1)} \right\rangle = 0$, то существует функционал $\psi_2^{(1)} \in \ker B^*$, линейно независимый с $\breve{\psi}_i$, $i = \overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\psi_1^{(1)}$, такой, что $\left\langle A\varphi_2^{(s_2)}, \psi_2^{(1)} \right\rangle \neq 0$. Если $\left\langle A\varphi_2^{(s_2)}, \psi_1^{(1)} \right\rangle \neq 0$, то существуют $c_i \in \Phi$, $c_i \neq 0$, $i = \overline{1,2}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \left\langle A\varphi_i^{(s_i)}, \psi_1^{(1)} \right\rangle = 0. \tag{37}$$

Построим векторы $\varphi^{(j)}$, $j = \overline{1,s_1}$ следующим образом:

$$\varphi^{(j)} = c_1\varphi_1^{(j)}, \quad j = \overline{1, s_1 - s_2},$$

$$\varphi^{(j)} = c_1\varphi_1^{(j)} + c_2\varphi_2^{(j-s_1+s_2)}, \quad j = \overline{s_1 - s_2 + 1, s_1}.$$

Согласно лемме 1 они образуют конечную жорданову цепочку оператора B относительно A длины s_1. Согласно (31), (33), (37) выполняются равенства:

$$\left\langle A\varphi^{(s_1)}, \breve{\psi}_i \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1,\breve{r}},$$

$$\left\langle A\varphi^{(s_1)}, \tilde{\psi}_i^{(1)} \right\rangle = 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\left\langle A\varphi^{(s_1)}, \psi_1^{(1)} \right\rangle = 0.$$

Следовательно, функционал $\psi_2^{(1)}$ в этом случае тоже существует.

Если $r > 2$, то существование функционалов $\psi_i^{(1)}$, $i = \overline{3,r}$ доказывается аналогично. Следующий функционал $\psi_{r+1}^{(1)}$ уже не существует, поскольку в противном случае должен был бы существовать вектор $\varphi_{r+1}^{(1)}$.

Согласно [2, с. 425] функционалы $\psi_i^{(1)}$, $i=\overline{1,r}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства:

$$\left\langle A\varphi_i^{(s_i)}, \psi_j^{(1)} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,r}, \tag{38}$$

функционалы $\psi_i^{(j)}$, $j=\overline{2,s_i}$, $i=\overline{1,r}$ определим следующим образом:

$$\psi_i^{(j)} = \left[(B^*)^- A^*\right]^{j-1} \psi_i^{(1)}, \quad j=\overline{2,s_i}, \quad i=\overline{1,r}. \tag{39}$$

Имеют место равенства:

$$\left\langle A\left(B^-A\right)^j \breve{\varphi}_i, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \psi_k^{(1)} \right\rangle = 0, \quad j,l \geq 0, \quad i=\overline{1,\breve{r}}, \quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle A\left(B^-A\right)^j \tilde{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \psi_k^{(1)} \right\rangle = 0, \quad j,l \geq 0, \quad i=\overline{1,\tilde{r}}, \quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle A\left(B^-A\right)^j \varphi_i^{(1)}, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \psi_k^{(1)} \right\rangle = \delta_{ik}\delta_{j+l,s_i-1}, \quad j,l \geq 0, \quad i,k=\overline{1,r}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 с учетом (30), (38). Отсюда с учетом (9), (17), (39) имеем:

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, A^*\psi_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j=\overline{1,s_k}, \quad i=\overline{1,\breve{r}}, \quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle \tilde{\varphi}_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j=\overline{1,s_k}, \quad i=\overline{1,\tilde{r}}, \quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j=\overline{1,s_k-1}, \quad i,k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(s_k)} \right\rangle = \delta_{ik}, \quad i,k=\overline{1,r},$$

$$B^*\psi_i^{(1)} = 0, \quad i=\overline{1,r},$$

$$B^*\psi_i^{(j)} = A^*\psi_i^{(j-1)}, \quad j=\overline{2,s_i}, \quad i=\overline{1,r},$$

$$A^*\psi_i^{(s_i)} \notin R\left(B^*\right), \quad i=\overline{1,r}.$$

□

Замечание 2. Существуют $\bar{r}$ конечных жордановых цепочек оператора A^* относительно оператора B^* длин $\bar{s}_i$, $i=\overline{1,\bar{r}}$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Пусть они состоят из построенных таким же образом функционалов $\bar{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$.

Замечание 3. Функционалы $\breve{\psi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i+1}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\bar{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$ линейно независимы. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Положим в (1)–(4) $m = r + \hat{r} + \check{r}$, $\psi_i = \psi_i^{(1)}$, $i = \overline{1,r}$, $\psi_{r+i} = \tilde{\psi}_i^{(1)}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, $\psi_{r+\hat{r}+i} = \breve{\psi}_i$, $i = \overline{1,\check{r}}$, $\gamma_i = A^*\psi_i^{(s_i)}$, $i = \overline{1,r}$.

Теорема 2. *Если существуют $\hat{r}$, $\hat{r} \geq 0$ циклических жордановых цепочек функционалов оператора B^* относительно оператора A^* длин $(\hat{s}_i + 1)$, $\hat{s}_i > 0$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, то существуют также $\hat{r}$ вспомогательных цепочек векторов оператора B относительно оператора A длин $\hat{s}_i$, $i = \overline{1,\hat{r}}$.*

Доказательство. Согласно следствию из теоремы Хана–Банаха и замечанию 3 существуют векторы $\sigma_i \in E_2$, $i = \overline{1,\hat{r}}$ такие, что

$$\left\langle \sigma_i, \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1,\check{r}}, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{40}$$

$$\left\langle \sigma_i, \psi_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,s_k}, \quad k = \overline{1,r}, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{41}$$

$$\left\langle \sigma_i, \bar{\psi}_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,\bar{s}_k}, \quad k = \overline{1,\bar{r}}, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \tag{42}$$

$$\left\langle \sigma_i, \tilde{\psi}_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1,\hat{s}_k}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}}, \tag{43}$$

$$\left\langle \sigma_i, \tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_k+1)} \right\rangle = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,\hat{r}}. \tag{44}$$

Из (40)–(44) следует:

$$\sigma_i \notin R(A), \quad \sigma_i \in R(B), \quad i = \overline{1,\hat{r}}.$$

Положим

$$\hat{\varphi}_i^{(1)} = B^- \sigma_i, \quad i = \overline{1,\hat{r}}. \tag{45}$$

Векторы $\hat{\varphi}_i^{(j)}$, $j = \overline{2,\hat{s}_i}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$ определим следующим образом:

$$\hat{\varphi}_i^{(j)} = \left(B^- A\right)^{j-1} \hat{\varphi}_i^{(1)}, \quad j = \overline{2,\hat{s}_i}, \quad i = \overline{1,\hat{r}}. \tag{46}$$

Положим в (1)–(4) $z_{r+i} = A\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}$, $i = \overline{1,\hat{r}}$, отсюда согласно (5), (46)

$$\left(B^- A\right)^j \hat{\varphi}_i^{(1)} = 0, \quad j \geq \hat{s}_i, \quad i = \overline{1,\hat{r}}. \tag{47}$$

Далее, исходя из (6), (13), (39)–(41), (43)–(47), аналогично доказательству теоремы 1 получим:

$$\left\langle B \left(B^- A\right)^j \hat{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j,l \geq 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \quad k = \overline{1,\check{r}},$$

$$\left\langle A \left(B^- A\right)^j \hat{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j,l \geq 0, \quad i = \overline{1,\hat{r}}, \quad k = \overline{1,\check{r}},$$

$$\left\langle B \left(B^- A\right)^j \hat{\varphi}_i^{(1)}, \left[(B^*)^- A^*\right]^l \tilde{\psi}_k^{(1)} \right\rangle = \delta_{ik}\delta_{j+l,\hat{s}_i} \left(1 - \delta_{l0}\right), j,l \geq 0, i,k = \overline{1,\hat{r}},$$

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\hat{\varphi}_i^{(1)},\left[\left(B^*\right)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle=\delta_{ik}\delta_{j+l,\hat{s}_i-1},\quad j,l\geq 0,\quad i,k=\overline{1,\hat{r}},\tag{48}$$

$$\left\langle B\left(B^{-}A\right)^{j}\hat{\varphi}_i^{(1)},\left[\left(B^*\right)^{-}A^*\right]^{l}\psi_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\hat{\varphi}_i^{(1)},\left[\left(B^*\right)^{-}A^*\right]^{l}\psi_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle A\hat{\varphi}_i^{(j)},\breve{\psi}_k\right\rangle=0,\quad j=\overline{1,\hat{s}_i},\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,\breve{r}},$$

$$\left\langle A\hat{\varphi}_i^{(j)},\psi_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j=\overline{1,\hat{s}_i},\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,r},$$

$$\left\langle A\hat{\varphi}_i^{(j)},\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j=\overline{1,\hat{s}_i-1},\quad i,k=\overline{1,\hat{r}},$$

$$\left\langle A\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)},\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\hat{r}},$$

$$\left\langle B\hat{\varphi}_i^{(1)},\tilde{\psi}_k^{(\hat{s}_k+1)}\right\rangle=\delta_{ik},\quad i,k=\overline{1,\hat{r}}.$$

Отсюда следует:

$$B\hat{\varphi}_i^{(j)}=A\hat{\varphi}_i^{(j-1)},\quad j=\overline{2,\hat{s}_i},\quad i=\overline{1,\hat{r}},$$

$$B\hat{\varphi}_i^{(1)}\notin R\left(A\right),\quad i=\overline{1,\hat{r}},$$

$$A\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}\notin R\left(B\right),\quad i=\overline{1,\hat{r}}.$$

□

Замечание 4. Существуют $\tilde{r}$ вспомогательных цепочек оператора B^* относительно оператора A^* длин $\tilde{s}_i$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$. Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Пусть они состоят из построенных таким же образом функционалов $\hat{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$ и, кроме того, выполняются равенства:

$$\left\langle B\left(B^{-}A\right)^{j}\hat{\varphi}_i^{(1)},\left[\left(B^*\right)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,\tilde{r}},$$

$$\left\langle A\left(B^{-}A\right)^{j}\hat{\varphi}_i^{(1)},\left[\left(B^*\right)^{-}A^*\right]^{l}\tilde{\psi}_k^{(1)}\right\rangle=0,\quad j,l\geq 0,\quad i=\overline{1,\hat{r}},\quad k=\overline{1,\tilde{r}}.$$

Положим в (1)–(4) $\gamma_{r+i}=A^*\hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$.

Теорема 3. *Векторы* $\breve{\varphi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i+1}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\bar{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$ *линейно независимы.*

Доказательство. Пусть имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{\breve{r}} \breve{c}_i \breve{\varphi}_i + \sum_{i=1}^{\tilde{r}} \sum_{j=1}^{\tilde{s}_i+1} \tilde{c}_{ij} \tilde{\varphi}_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} \varphi_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{\bar{r}} \sum_{j=1}^{\bar{s}_i} \bar{c}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(j)} + \sum_{i=1}^{\hat{r}} \sum_{j=1}^{\hat{s}_i} \hat{c}_{ij} \hat{\varphi}_i^{(j)} = 0,$$

где $\breve{c}_i \in \Phi$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$, $c_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\bar{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$, $\hat{c}_{ij} \in \Phi$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$ не все равны нулю. Применяя к нему операторы $A\,(B^- A)^{\hat{s}_i - j}$ и функционалы $\tilde{\psi}_i^{(1)}$ для каждого $\hat{c}_{ij} \neq 0$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, с учетом (9), (17), (31), (34)–(36), (46), (48) получим: $\hat{c}_{ij} = 0$, $j = \overline{1, \hat{s}_i}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$. Дальнейшее доказательство теоремы содержится в лемме 2. □

Замечание 5. Функционалы $\breve{\psi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \hat{s}_i + 1}$, $i = \overline{1, \hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}$, $j = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{1, r}$, $\bar{\psi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \bar{s}_i}$, $i = \overline{1, \bar{r}}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}$, $j = \overline{1, \tilde{s}_i}$, $i = \overline{1, \tilde{r}}$ линейно независимы. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Согласно следствию из теоремы Хана–Банаха, теореме 3 и замечанию 5 существуют векторы $\breve{\varphi}_i \in E_2$, $\breve{\varphi}_i \notin R\,(A) \bigcup R\,(B)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$ и функционалы $\breve{\psi}_i \in E_2^*$, $\breve{\psi}_i \notin R\,(A^*) \bigcup R\,(B^*)$, $i = \overline{1, \breve{r}}$ такие, что

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, \breve{\psi}_k \right\rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, \tilde{\psi}_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \hat{s}_k + 1}, \quad k = \overline{1, \hat{r}}, \quad i = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, \psi_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, s_k}, \quad k = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, \bar{\psi}_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \bar{s}_k}, \quad k = \overline{1, \bar{r}}, \quad i = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \breve{\varphi}_i, \hat{\psi}_k^{(j)} \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_k}, \quad k = \overline{1, \tilde{r}}, \quad i = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\langle \breve{\varphi}_i, \breve{\psi}_k \rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \tilde{\varphi}_i^{(j)}, \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_i + 1}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}}, \quad k = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \varphi_i^{(j)}, \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, s_i}, \quad i = \overline{1, r}, \quad k = \overline{1, \breve{r}},$$

$$\left\langle \bar{\varphi}_i^{(j)}, \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \bar{s}_i}, \quad i = \overline{1, \bar{r}}, \quad k = \overline{1, \breve{r}}.$$

$$\left\langle \hat{\varphi}_i^{(j)}, \breve{\psi}_k \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, \hat{s}_i}, \quad i = \overline{1, \hat{r}}, \quad k = \overline{1, \breve{r}}.$$

Положим в (1)–(4) $z_{r+\hat{r}+i} = \breve{\varphi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$, $\gamma_{r+\tilde{r}+i} = \breve{\psi}_i$, $i = \overline{1, \breve{r}}$.

Замечание 6. Элементы каждого из следующих множеств линейно независимы:

1. $\breve{\varphi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i+1}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$, $\varphi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\bar{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$, $\hat{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$.

2. $\breve{\varphi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $A\tilde{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$, $A\varphi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $B\bar{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$, $B\hat{\varphi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$, $A\hat{\varphi}_i^{(\hat{s}_i)}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$.

3. $\breve{\psi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $\tilde{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i+1}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$, $\psi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $\bar{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$, $\hat{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$.

4. $\breve{\psi}_i$, $i=\overline{1,\breve{r}}$, $A^*\tilde{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\hat{s}_i}$, $i=\overline{1,\hat{r}}$, $A^*\psi_i^{(j)}$, $j=\overline{1,s_i}$, $i=\overline{1,r}$, $B^*\bar{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\bar{s}_i}$, $i=\overline{1,\bar{r}}$, $B^*\hat{\psi}_i^{(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{s}_i}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$, $A^*\hat{\psi}_i^{(\tilde{s}_i)}$, $i=\overline{1,\tilde{r}}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 7. Пары множеств 1 и 4, 2 и 3 соответственно представляют собой биортогональные системы. Доказательство аналогично доказательству лемм 3, 4.

Список литературы

1. Бойчук А. А. Обобщенно-обратные операторы и нётеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. – Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 319 с.
2. Вайнберг М. П. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. П. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 2004. – 576 с.
4. Зубова С. П. О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной / С. П. Зубова, К. И. Чернышов // Дифференц. уравнения и их применение. – 1976. – Вып. 14. – С. 21–39.
5. Логинов Б. В. Модификация метода Ляпунова – Шмидта и устойчивость решений дифференциальных уравнений с вырожденным оператором конечного индекса при производной / Б. В. Логинов, Л. Р. Ким-Тян, Ю. Б. Русак // Докл. РАН. – 1993. – Т. 330, № 6. – С. 687–692.
6. Логинов Б. В. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления / Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Ташкент : ФАН, 1978. – С. 133–148.
7. Логинов Б. В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б. В. Логинов. – Ташкент : ФАН, 1985. – 184 с.
8. Русак Ю. Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами аналитической оператор-функции и сопряженной к ней / Ю. Б. Русак // Изв. АН УзССР. Сер. мат. наук. – 1978. – № 2. – С. 15–19.
9. Русак Ю. Б. Обобщенные жордановы цепочки специального вида линейной оператор-функции спектрального параметра / Ю. Б. Русак, Б. В. Логинов, Л. Р. Ким-Тян // Прикладная математика и механика. – Ульяновск : УлГТУ, 2009. – С. 205–217.

10. Сидоров Н. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением / Н. А. Сидоров, О. А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 9. – С. 1516–1526.
11. Сидоров Н. А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.
12. Сидоров Н. А. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части / Н. А. Сидоров, О. А. Романова, Е. В. Благодатская. – Иркутск : ИрВЦ СО РАН, 1992. – 29 с. – (Препринт / ИрВЦ СО РАН; № 3).
13. Сидоров Н. А. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части / Н. А. Сидоров, О. А. Романова, Е. Б. Благодатская // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 4. – С. 729–731.
14. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1393–1406.
15. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.

M. Elishevich

Some properties of Jordan sets of vectors of linear operators in Banach spaces

Abstract.The conditions for the existence and properties of Jordan sets of vectors of linear operators in Banach spaces.

Keywords: Banach space; linear operator; vector; functional; Jordan chain.

Елишевич Михаил Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, 03680, Украина, г. Киев-037, Воздухофлотский проспект, 31, тел.: +380442415464 (m_a_e@bk.ru)

Elishevich Michael, Kiev National University of Construction and Architecture, 31, Povitroflotsky Avenue, Kiev-037, 03680, Ukraine, Phone: +380442415464 (m_a_e@bk.ru)