



УДК 517.958

Решения уравнения Власова для пучка заряженных частиц в магнитном поле *

О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Представлены стационарные решения уравнения Власова для аксиально-симметричного пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле. Предлагается подход, основанный на ковариантной формулировке уравнения Власова, позволяющей использовать различные координаты в фазовом пространстве и рассматривать вырожденные распределения частиц. Построение решений основано на анализе распределений частиц в пространстве интегралов движения.

Ключевые слова: уравнение Власова; самосогласованные распределения; фазовая плотность; распределение Капчинского – Владимирского; интеграл Ермакова.

1. Введение

Одной из математических моделей, используемых при описании интенсивных пучков заряженных частиц, является уравнение Власова, характеризующее эволюцию плотности распределения частиц. Уравнение Власова соответствует концепции самосогласованного поля, согласно которой сила, действующая на частицу со стороны других частиц, определяется как сила со стороны некоторой непрерывно распределенной среды, описывающей ансамбль частиц. Решения уравнения Власова называют также самосогласованными распределениями. Обычно предполагается, что плотность частиц достаточно мала, чтобы пренебречь их взаимодействием на близких расстояниях, которое можно учесть путем введения в уравнение Власова интеграла столкновений.

Нахождение решений уравнения Власова связано с существенными математическими трудностями, обусловленными нелинейным характером уравнения.

* Работа выполнена при поддержке СПбГУ, грант 9.38.673.2013.

Стационарным самосогласованным распределениям для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле посвящено большое количество работ (см. [1-8,12-26]). Наиболее известным в теории пучков заряженных частиц решением является распределение Капчинского – Владимирского [11, 26], когда частицы равномерно распределены по сечению пучка, а в четырехмерном фазовом пространстве поперечных координат и скоростей лежат на трехмерной поверхности постоянной энергии $H = const$.

Простейший же случай, который также широко известен, — бриллюэновский поток [12], в котором все частицы вращаются вокруг оси пучка с одинаковой угловой скоростью. В этом случае размерность носителя распределения равна 2.

Что касается невырожденных распределений, то прежде всего следует назвать распределение типа «водяной мешок» [11, 25].

Были найдены также обобщения распределений Капчинского–Владимирского и распределения типа «водяной мешок», для которых роль энергии H играет комбинация $H + kM$, где M — момент импульса, а k — некоторая постоянная [15]. Широкие классы еще более общих распределений найдены в работах авторов статьи [4-8,16-19].

Наконец, рассматривались распределения частиц в периодическом вдоль оси пучка продольном магнитном поле [13, 15, 22, 23, 24]. Авторами этих публикаций были получены распределения, аналогичные распределению Капчинского – Владимирского и некоторым распределениям типа жесткого ротатора. Аналогичные распределения для случая, когда поле меняется вдоль оси пучка произвольным образом, а не только периодически, найдены в работах [6-8,16,18,19].

В настоящей работе развивается подход, предложенный в работах [20, 21] и основанный на ковариантной формулировке уравнения Власова. Этот подход позволяет рассматривать вырожденные распределения, например, поток Бриллюэна как формальные решения уравнения Власова. Кроме того, этот подход упрощает анализ стационарных самосогласованных распределений на основе их представления в пространстве интегралов движения. При этом интегралы движения рассматриваются как координаты в фазовом пространстве. Рассмотрены множества допустимых значений интегралов движения. Получены соотношения, связывающие фазовую плотность и плотность частиц в конфигурационном пространстве с плотностью частиц в пространстве интегралов движения.

Подробно рассмотрены также самосогласованные распределения с равномерным распределением заряженных частиц по сечению пучка. Для них область допустимых значений интегралов движения принимает более простой вид. Дана простая интерпретация известных распределений Капчинского – Владимирского и типа жесткого ротатора: указаны отрезки, являющиеся носителями этих распределений в про-

пространстве интегралов движения. Проанализированы также распределения, являющиеся линейными комбинациями распределений типа жесткого ротатора. Для них плотность в пространстве интегралов движения зависит от произвольной интегрируемой функции с заданным значением интеграла. Частный случай, когда эта функция есть постоянная, рассмотрен в качестве иллюстрации.

Рассмотрен также пучок в продольном магнитном поле, которое медленно изменяется вдоль оси пучка. Для такого пучка в качестве одного из интегралов движения вместо энергии поперечного движения взят известный интеграл системы Ермакова, которую образуют уравнение радиального движения частицы и уравнение огибающей пучка. Результаты, полученные для продольно однородного пучка, распространены и на этот случай.

2. Уравнение Власова

Пусть задана некоторая система отсчета. Тогда динамику частиц можно рассматривать как динамику точек, представляющих частицы, в конфигурационном пространстве, ассоциированном с этой системой отсчета.

Фазовым пространством будем называть касательное расслоение конфигурационного пространства. Обозначим фазовое пространство через \mathcal{M} , а его размерность через m , $m = \dim \mathcal{M}$, $m \leq 6$. Будем считать, что фазовое пространство \mathcal{M} представляет собой дифференцируемое многообразие. Это означает, в частности, что в окрестности любой точки q из \mathcal{M} можно ввести систему координат q_1, \dots, q_m . Обычно в качестве координат в фазовом пространстве берутся декартовы координаты частицы в конфигурационном пространстве и соответствующие компоненты скорости или импульса.

Рассмотрим систему частиц, число которых настолько велико, что невозможно проследить за динамикой каждой частицы в отдельности. В качестве модели такой системы будем использовать непрерывную заряженную среду, в которой отсутствуют отдельные частицы.

Модель сплошной заряженной среды можно рассматривать и как статистическое описание, т. е. как вероятностную модель. В рамках такой модели плотность среды, нормированную на полное число частиц, можно интерпретировать как плотность вероятности распределения частиц.

Перейдем к определению плотности распределения частиц. Рассмотрим сначала непрерывную заряженную среду, занимающую некоторую область G_0 в фазовом пространстве. Рассмотрим также семейство подобластей $\{G\}$, $G \subset G_0$, с достаточно гладкими границами, для которых определены их характеристические функции

$$\chi_G(q) = \begin{cases} 1, & q \in G, \\ 0, & q \notin G. \end{cases}$$

Плотностью распределения частиц в фазовом пространстве [20] будем называть такую дифференциальную форму n степени m

$$n = n_{1\dots m}(t, q) dx^1 \wedge \dots \wedge dq^m, \quad (2.1)$$

что для любой подобласти G рассматриваемого семейства

$$\int_{G_0} \chi_G(q) n(q) = N_G, \quad (2.2)$$

где N_G — число частиц в области G , которое в рамках рассматриваемой модели непрерывной среды может быть и не целым. Будем считать, что компонента рассматриваемой формы степени m непрерывно дифференцируема по координатам.

Рассмотрим пространство функций, для которых для любой рассматриваемой формы $\omega(q)$ степени m из заданного класса существует $\int_G f(q)\omega(q)$. Будем называть такие функции интегрируемыми и обозначим их пространство через \mathcal{F} . Определим линейный функционал, действующий на интегрируемые функции по правилу

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{G_0} f(q)\omega(q), \quad f \in \mathcal{F}. \quad (2.3)$$

Тогда определение (2.2) можно записать в виде

$$\langle n, \chi_G \rangle = N_G. \quad (2.4)$$

Рассмотрим теперь модель точечных частиц. В рамках этой модели заряженная частица представляется точкой в фазовом пространстве, в отличие от ранее рассмотренной модели непрерывной заряженной среды. Введем линейный функционал $\langle \delta_{q_0}, \cdot \rangle$, действующий на интегрируемую функцию $f \in \mathcal{F}$ по правилу

$$\langle \delta_{q_0}, f \rangle = f(q_0). \quad (2.5)$$

Нетрудно видеть, что функционал (2.5) задается с помощью скалярной функции

$$\delta_{q_0}(q) = \begin{cases} 1, & q = q_0, \\ 0, & q \neq q_0. \end{cases}$$

Рассматривая функцию δ_{q_0} как плотность частиц, т. е. учитывая условие (2.4), видим, что такой функционал задает плотность системы, состоящей из одной частицы, находящейся в точке q_0 . Поскольку мера

$\mu_G = \langle \delta_{q_0}, \chi_G \rangle$ называется мерой Дирака, будем называть функционал (2.5) плотностью меры Дирака.

Функционалы (2.5) образуют линейное пространство, причем их линейная комбинация действует по правилу:

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{q(i)}, f \right\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i f(q(i)). \quad (2.6)$$

Аналогично предыдущему, видно, что функционал (2.6) задается с помощью скалярной функции

$$\varphi(q) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{q(i)}(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = q(i), \quad i = \overline{1, N}, \\ 0, & q \neq q(i), \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.7)$$

В модели точечных частиц плотностью их распределения в фазовом пространстве будем называть такую функцию вида (2.7), что для любой подобласти G из рассмотренного ранее семейства для функционала (2.6) имеет место (2.4). Легко понять, что при этом $\alpha_i = 1$, а $q(i)$ — положения частиц в фазовом пространстве, $i = \overline{1, N}$, где N — число частиц в рассматриваемой системе:

$$n(q) = \sum_{i=1}^N \delta_{q(i)}(q). \quad (2.8)$$

Поскольку скалярную функцию можно рассматривать как форму нулевой степени, можно сказать, что в модели точечных частиц плотность задается формой нулевой степени.

Рассмотрим также случай, который можно считать промежуточным между моделью с непрерывным распределением частиц в области и моделью точечных частиц. Будем рассматривать систему частиц, в которой частицы непрерывно распределены на некоторой ориентированной поверхности S в области D_0 . Ориентация поверхности размерности m' задается в m -мерном многообразии набором $m - m'$ векторов. Плотность распределения частиц на поверхности будем характеризовать дифференциальной формой степени m' , относительно компонент которой могут быть сделаны те же предположения, что и ранее, а именно, что эти компоненты непрерывно дифференцируемы по координатам. Форма, задающая плотность, должна быть согласована с ориентацией поверхности: изменение ориентации может повлечь умножение формы на -1 .

Форма $\sigma(q)$ степени m' , заданная на m' -мерной ориентированной поверхности S задает функционал, действующий на интегрируемые функции:

$$\langle \sigma(q), f \rangle = \int_S f(q) \sigma(q).$$

Фазовой плотностью в этом случае будем называть такую форму степени m'

$$n(q) = \sigma(q), \quad (2.9)$$

что выполнено условие (2.4).

Обобщая все рассмотренные случаи, отметим, что при задании плотности распределения частиц должны быть заданы ориентированные поверхности различных размерностей от 0 до m , на которых задаются дифференциальные формы соответствующих степеней, так что выполнено условие (2.4). При этом соответствующий функционал равен сумме функционалов, определенных для каждого из рассматриваемых случаев. Кроме того, в рамках такого подхода ориентация области и точки не вводится, поскольку при интегрировании дифференциальной формы по области ориентация области не учитывается [9], а точки будем рассматривать как имеющие положительную ориентацию.

Таким образом, описание дискретной модели системы заряженных частиц является частным случаем общего описания в рамках модели непрерывной заряженной среды, соответствующим случаю, когда частицы локализованы на нульмерных «поверхностях», представляющих собой точки, где находятся частицы.

Будем считать, что динамику отдельной частицы можно описать с помощью некоторого векторного поля, заданного на фазовом пространстве. Это означает, что в каждой точке фазового пространства задан вектор, определяющий скорость частицы в фазовом пространстве:

$$\frac{dq}{dt} = f(t, q). \quad (2.10)$$

Здесь t обозначает временную координату. При этом будем учитывать, что, согласно концепции Власова о самосогласованном поле, динамика частиц определяется внешним электромагнитным полем и собственным полем системы частиц, так что $f(t, q) = f_{ext}(t, q) + f_{self}(q, n)$.

Следуя работе [20], запишем уравнение Власова в виде

$$n(t + \delta t, F_{f, \delta t} q) = F_{f, \delta t} n(t, q). \quad (2.11)$$

Это уравнение справедливо в самом общем случае, когда плотность распределения частиц задается формой произвольной степени m' , $0 \leq m' \leq m$. Здесь $F_{f, \delta t}$ обозначает перенос Ли вдоль векторного поля f [9]. При этом параметром переноса является изменение временной координаты δt . Уравнение (2.11) можно считать интегро-дифференциальным, поскольку оно, с одной стороны, описывает эволюцию дифференциальной формы плотности, а с другой стороны, собственное поле обычно выражается в виде интегрального члена.

Если фазовая плотность определяется формой максимальной степени, или поверхность в фазовом пространстве, на которой лежат части-

цы, не меняется, то уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathcal{L}_f n(t, q), \quad (2.12)$$

где \mathcal{L}_f обозначает производную Ли.

Обычно предполагается, что компоненты f не зависят от соответствующих координат. Тогда, используя выражение для компоненты производной Ли из уравнения (2.12) получаем следующее уравнение для компоненты фазовой плотности \bar{n}

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m'} \frac{\partial \bar{n}}{\partial q^i} f^i = 0. \quad (2.13)$$

При этом компонента берется или в координатах в фазовом пространстве, если форма имеет максимальную степень, или в координатах, которые введены на поверхности, на которой она определена. Здесь m' – степень формы.

3. Интегралы движения частиц для цилиндрического пучка

Будем рассматривать стационарный аксиально симметричный однородный вдоль своей оси пучок заряженных частиц в продольном магнитном поле также однородном вдоль оси пучка. Стационарность означает, что фазовая плотность не зависит от времени. Продольные скорости частиц будем считать сравнимыми со скоростью света, а поперечные много меньшими продольных. Разбросом продольных скоростей частиц будем пренебрегать, считая пучок моноэнергетическим.

Фазовая плотность не зависит от продольной координаты z в силу однородности пучка, а зависимость от продольной скорости тривиальна: присутствуют только частицы, имеющие заданное значение продольной скорости. Поэтому будем рассматривать фазовую плотность для такого пучка в четырехмерном фазовом пространстве поперечного движения. Обозначим точки этого пространства через \mathbf{x}, \mathbf{v} , где \mathbf{x} точка в двумерном конфигурационном пространстве, а \mathbf{v} – поперечная скорость частицы.

В случае, если фазовая плотность задается формой четвертой степени, плотность частиц в конфигурационном пространстве получается интегрированием в касательном пространстве в каждой точке по области, которую занимают частицы, и которая может зависеть от \mathbf{x} : $\varrho(\mathbf{x}) = \int n(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$. В более общем случае будем считать, что всегда существует способ перейти от фазовой плотности к плотности в конфигурационном пространстве. Будем нормировать плотность, считая, что

задана сила тока пучка J :

$$\int \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{J}{e\beta c}. \quad (3.1)$$

Потенциал собственного электрического поля пучка U зависит только от радиальной координаты r и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = -e\varrho(\mathbf{x})/\varepsilon_0, \quad (3.2)$$

где e — заряд частицы, а векторный потенциал собственного магнитного поля равен $\mathbf{A} = (0, 0, -\beta U(r))$, $\beta = v_z/c$. Будем считать, что потенциал $U(r)$ удовлетворяет краевым условиям

$$U(0) = 0, \quad dU/dr|_{r=0} = 0. \quad (3.3)$$

Векторный потенциал внешнего магнитного поля можно задать в цилиндрических координатах в виде $\mathbf{A} = (0, B_z r^2/2, 0)$, где B_z — его продольная компонента.

Уравнения динамики частиц запишем в виде [9]

$$\frac{dp_i}{ds} - \Gamma_{ij}^k p_k u^j = e \frac{\partial A_j}{\partial x^i} u^j - e \Gamma_{ij}^k A_k u^j, \quad i = \overline{0, 3}. \quad (3.4)$$

Здесь s — релятивистский интервал, отсчитываемый вдоль траектории частицы, m — масса частицы, $u = dx/ds$ — четырехмерный вектор скорости, p — канонически сопряженный импульс, $p_i = -mcg_{ik}u^i + eA_i$, g_{ik} — метрические коэффициенты, Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля 2 рода. По одинаковым индексам производится суммирование в соответствии с правилом Эйнштейна.

Интегрируя уравнения (3.4) для азимутальной и радиальной компонент импульса, получим два интеграла движения:

$$M = r^2(\dot{\varphi} + \omega_0) = const, \quad (3.5)$$

где $\omega_0 = eB_z/(2m\gamma)$, а точка обозначает дифференцирование по t , и

$$H = \dot{r}^2 + \omega_0^2 r^2 + \frac{M^2}{r^2} + 2\varepsilon U = const, \quad (3.6)$$

где $\varepsilon = e/(m\gamma^3)$. Величины M и H представляют собой, с точностью до постоянных множителей, азимутальную компоненту импульса и энергию поперечного движения частицы.

Рассмотрим функцию

$$V_0(r) = \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r) \quad (3.7)$$

и предположим, что $V_0(r)$ строго выпукла. Легко показать, что при этом уравнение

$$H = V_0(r) \quad (3.8)$$

имеет ровно один корень при $H \geq 0$, а уравнение

$$H = V_M(r) \quad (3.9)$$

имеет ровно два корня при H , больших наименьшего значения функции $V_M(r)$, и $M^2 > 0$. Здесь $V_M(r) = V_0(r) + M^2/r^2$. Обозначим эти корни через $r_{min}(M, H)$ ($M^2 > 0$), $r_{max}(M, H)$ и положим $r_{min}(0, H) = 0$.

Согласно (3.6) движение возможно только в интервале $[r_{min}(M, H), r_{max}(M, H)]$. Графики функций $V_0(r)$ и $V_M(r)$ показаны на Рис. 1.

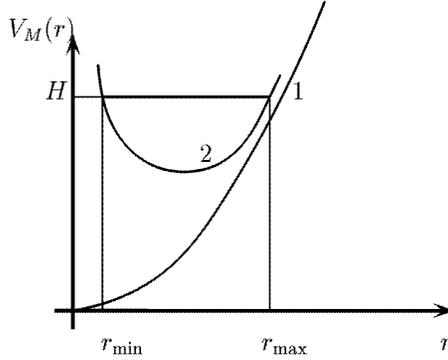


Рис. 1. Кривые 1 и 2 представляют графики функций $V_0(r) = \omega_0^2 r^2$ и $V_M(r) = M^2/r^2 + \omega_0^2 r^2$, $M \neq 0$ соответственно.

Поперечное движение частицы можно описать следующим образом: радиальная координата r частицы возрастает от $r_{min}(M, H)$ до $r_{max}(M, H)$. При этом частица поворачивается вокруг оси на угол $\delta\varphi$, который можно найти, используя (3.5). Затем радиальная координата r убывает снова до $r_{min}(M, H)$, поворачиваясь на такой же угол $\delta\varphi$, и так далее. Если же $r_{min}(M, H) = r_{max}(M, H)$, то $\dot{r} = 0$, и траектория движения частицы представляет собой окружность.

Поскольку в (3.5), (3.6) не входит координата φ , то повернув траекторию, соответствующую определенным значениям M и H на любой угол вокруг оси z , опять получим траекторию, отвечающую тем же значениям M и H .

4. Распределение частиц по интегралам движения

Будем рассматривать распределения, для которых выполнены следующие три условия. Прежде всего, потребуем, чтобы функция $V_0(r)$ была строго выпукла. При этом для каждой пары M, H однозначно определено семейство ограниченных траекторий, переводимых друг в друга поворотом на некоторый угол вокруг оси z . Во-вторых, потребуем, чтобы частицы, соответствующие каждой допустимой паре M, H

были бы равномерно распределены по всем траекториям такого семейства. Это условие обеспечивает аксиальную симметрию всего распределения в целом. Наконец, потребуем также, чтобы для каждой траектории частицы были равномерно распределены по фазам траектории. Это означает, что отрезки траекторий, соответствующие одинаковым интервалам времени движения по ним, должны содержать одинаковое количество частиц. Последнее условие гарантирует стационарность всего распределения.

Интегралы движения M и H , азимутальный угол φ и фазу траектории θ можно рассматривать как четыре координаты в четырехмерном фазовом пространстве. Если теперь рассматривать компоненты формы плотности в этих координатах, то второе и третье условие означают однородность распределения по координатам φ и θ . Таким образом, вместо четырехмерного пространства можно рассматривать двумерное фазовое пространство, координатами в котором являются M и H .

Будем называть это пространство пространством интегралов движения. Плотность распределения частиц в пространстве интегралов движения обозначим через $f(M, H)$ [4]. При выполнении указанных трех условий каждая плотность $f(M, H)$, задаваемая при допустимых значениях M, H , соответствует некоторому стационарному аксиально-симметричному и однородному вдоль оси z распределению.

Очевидно, что любая плотность $f(M, H)$ является решением уравнения Власова, записанного в виде (2.11) или (2.12).

Пусть фазовая плотность задается формой 4 степени $n(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Нетрудно понять, что в этом случае плотность в пространстве интегралов движения задается формой 2 степени. Будем обозначать компоненту этой формы в координатах M, H также через $f(M, H)$.

Поскольку для каждой пары M, H частицы равномерно распределены по углам φ и по фазам траекторий θ , компонента фазовой плотности в координатах φ, θ, M, H равна

$$n_{\varphi\theta MN} = \frac{f(M, H)}{4\pi P(M, H)},$$

где $P(M, H)$ – изменение фазы вдоль половины траектории:

$$P(M, H) = \int_{r_{min}(M, H)}^{r_{max}(M, H)} \frac{dr}{|\dot{r}|} = \int_{r_{min}(M, H)}^{r_{max}(M, H)} (H - \omega_0^2 r^2 - M^2/r^2 - 2\varepsilon U(r))^{-1/2} dr.$$

Что касается частиц, для которых $\dot{r} \equiv 0$, то есть движущихся по круговым траекториям, будем считать, что вклад в фазовую плотность от этих частиц отсутствует. Эти частицы занимают нулевой объем в четырехмерном фазовом пространстве поперечного движения.

Чтобы вычислить плотность частиц в конфигурационном пространстве $\varrho(r)$, найдем сначала n_{xyMH} :

$$n_{xyMH} = n_{\varphi\theta MH} \cdot \det \left| \left(\frac{\partial(\varphi, \theta)}{\partial(x, y)} \right) \right| = \frac{n_{\varphi\theta MH}}{r|\dot{r}|}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= 2 \int_{\Omega(r)} n_{xyMH} dM dH = \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\Omega(r)} \frac{f(M, H) dM dH}{P(M, H)(H - M^2/r^2 - \omega_0^2 r^2 - 2\varepsilon U(r))^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $\Omega(r)$ – множество допустимых значений M и H , которое будет рассматриваться далее. Множитель 2 в (4.1) учитывает, что одному и тому же допустимому значению H соответствуют два значения радиальной скорости.

Таким образом, задача о построении стационарных самосогласованных распределений, однородных вдоль оси пучка и аксиально-симметричных, сводится к решению краевой задачи (3.2), (3.3) с учетом выражения (4.1) и зависимости $\Omega(r)$ от неизвестной функции $U(r)$.

Далее будем рассматривать распределения частиц, ограниченные по радиальной координате $r : r \leq R$, где R – радиус поперечного сечения пучка. Нетрудно получить, что в этом случае множество допустимых значений M, H , которое обозначим Ω_R , определяется неравенствами

$$V_M(r_0(M)) < H \leq M^2/R^2 + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R), \quad (4.2)$$

где $r_0(M)$ – значение r , при котором функция $V_M(r)$ имеет минимум.

Рассмотрим также множество $\Omega(r)$ допустимых значений интегралов движения H и M для частиц, чьи траектории проходят через точку с координатой r . Это множество определяется неравенствами

$$\frac{M^2}{r^2} + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r) \leq H \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R). \quad (4.3)$$

Множества Ω_R и $\Omega(r)$ представлены на Рис. 2.

5. Равномерные по сечению пучка распределения по интегралам движения

Найдем такие распределения частиц, для которых плотность частиц в конфигурационном пространстве $\varrho(r)$ постоянна по всему поперечному сечению [5]:

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (5.1)$$

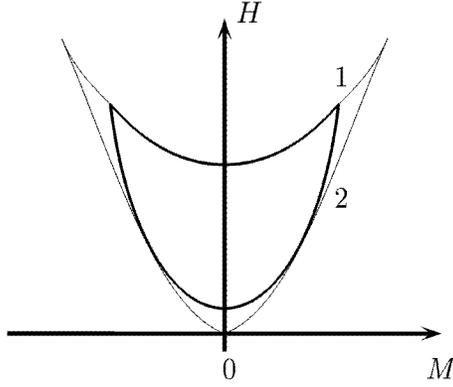


Рис. 2. Тонкие линии представляют собой границы множества Ω_R . При этом кривые 1 и 2 представляют его верхнюю и нижнюю границы: $H = M^2/R^2 + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R)$ и $H = \min_r V_M(r)$ соответственно. Границы множества $\Omega(r)$ изображены жирными линиями.

В этом случае из уравнения Пуассона имеем

$$U(r) = -e\varrho_0 r^2/4\varepsilon_0. \quad (5.2)$$

Простейшее известное распределение, равномерное по сечению пучка – поток Бриллюэна [12], в котором все частицы вращаются с одинаковой угловой скоростью $\dot{\varphi} = -\omega_0$ вокруг оси пучка, так что азимутальная компонента импульса M для каждой частицы равна нулю. Поскольку для частиц бриллюэновского потока $\dot{r} = 0$, из уравнения (3.4) находим

$$\varrho_B = \frac{2\varepsilon_0\omega_0^2}{e\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 B_z^2 \gamma}{2m}, \quad J = e\beta c\pi R^2 \varrho_B = \frac{\pi e\varepsilon_0 B_z^2 R^2}{2m} \gamma\beta c. \quad (5.3)$$

Подставляя это значение в выражение для потенциала (5.2), находим, что интеграл H для каждой из частиц также равен нулю. Таким образом, в пространстве интегралов движения поток Бриллюэна представляется точкой в начале координат. С физической точки зрения поток Бриллюэна можно рассматривать как поток наибольшей плотности для заданных магнитного поля и радиуса пучка, который может распространяться вдоль магнитного поля.

Представленный в настоящей работе подход позволяет рассматривать фазовую плотность потока Бриллюэна как формальное решение уравнения Власова (2.11), в котором векторное поле f определяется траекториями движения частиц в фазовом пространстве [21]. При этом фазовая плотность описывается формой 2 степени, определенной на поверхности $M = 0$, $H = 0$. Поскольку указанная поверхность не изменяется, для фазовой плотности также можно записать уравнение (2.12).

Выберем в качестве координат на рассматриваемой поверхности азимутальный угол φ и фазу частицы на траектории движения θ . Выражая единственную компоненту производной Ли фазовой плотности, имеем

$$\frac{\partial n_{\varphi\theta}}{\partial t} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial n_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial n_{\varphi\theta}}{\partial \theta} = 0$$

в соответствии со сделанным ранее предположением, что частицы равномерно распределены по φ и θ .

Далее будем считать, что $\varrho_0 < \varrho_B$, и введем постоянную ω :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - e\varrho_0\varepsilon/(2\varepsilon_0). \quad (5.4)$$

При этом условие строгой выпуклости функции $V_0(r)$ выполняется, поскольку $V_0(r) = \omega^2 r^2$, $\omega^2 > 0$.

Нетрудно получить, что

$$P(M, H) = \int_{r_{min}(M,H)}^{r_{max}(M,H)} \frac{r dr}{\sqrt{Hr^2 - M^2 - \omega^2 r^4}} = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Неравенства, определяющие множество допустимых значений M и H , примут вид:

$$2\omega|M| < H \leq M^2/R^2 + \omega^2 R^2. \quad (5.5)$$

Множество Ω_R показано на Рис. 3.

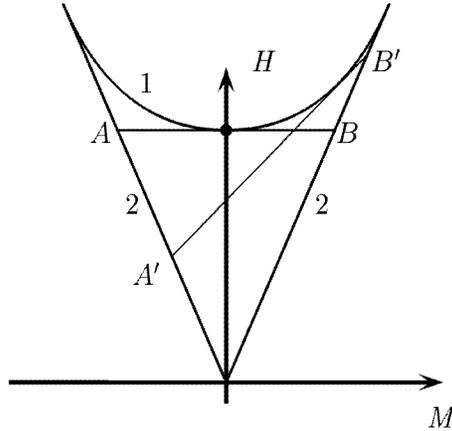


Рис. 3. Множество Ω_R для однородного пучка. Кривая 1 представляет верхнюю границу значений H : Ω_R : $H = M^2/R^2 + \omega^2 R^2$. Отрезки 2 представляют нижнюю границу значений H : Ω_R : $H = 2\omega|M|$.

Рассмотрим распределение, при котором все частицы лежат на отрезке S_k в пространстве интегралов движения, касающемся верхней

границы множества Ω_R :

$$S_k : H = kM + H_0, \quad H_0 = R^2(\omega^2 - k^2/4), \quad |k| < 2\omega, \quad (M, H) \in \Omega_R. \quad (5.6)$$

Пусть при этом плотность в пространстве интегралов движения задается формой 1 степени, которую также будем обозначать через $f(M, H)$:

$$f_k(M, H) = f_0 dM, \quad (M, H) \in S_k, \quad f_0 > 0. \quad (5.7)$$

В фазовом пространстве такая плотность описывается формой 3-й степени, также определенной на поверхности (5.6), компоненту которой в координатах x, y, M обозначим через f_{xyM} .

Аналогично предыдущему, поскольку для каждой пары M, H частицы равномерно распределены по углам и по фазам траекторий,

$$n_{\varphi\theta M} = \frac{f_0}{4\pi P(M, H)}, \quad n_{xyM} = n_{\varphi\theta M} \cdot \det \left| \begin{pmatrix} \partial(\varphi, \theta) \\ \partial(x, y) \end{pmatrix} \right| = \frac{n_{\varphi\theta M}}{r|\dot{r}|}.$$

Для распределения (5.7) плотность частиц $\varrho(r)$ не зависит от r при $r \leq R$. Действительно,

$$\varrho(r) = 2 \int_{M_1}^{M_2} f_{xyM} dM = \frac{\omega f_0}{\pi^2 r} \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{(H_0 + kM - M^2/r^2 - \omega^2 r^2)^{1/2}} = \frac{\omega f_0}{\pi}.$$

Здесь M_1 и M_2 – корни знаменателя в подынтегральном выражении:

$$M_{1,2} = kr^2/2 \pm (k^2 r^4/4 + H_0 r^2 - \omega^2 r^4)^{1/2}.$$

Распределение (5.7) при $k = 0$ представляет собой хорошо известное распределение Капчинского-Владимирского для пучка в продольном магнитном поле (отрезок AB на Рис. 3). Это распределение характеризуется тем, что все частицы находятся на энергетической поверхности $H = \omega^2 R^2$. Второй интеграл, M , принимает значения в интервале $(M_1, M_2) = (-\omega R^2/2, \omega R^2/2)$.

Распределения (5.7) с $k \neq 0$ также хорошо известны. В монографии [3] и работе [14] они рассматриваются как наиболее простой пример так называемых распределений типа жесткого ротатора. В общем случае, распределение жесткого ротатора – это такое распределение, что его плотность в фазовом пространстве зависит только от комбинации $H + kM$, но не от M и H по отдельности.

Заметим, что значения f_0 могут быть произвольно велики. Действительно, подставляя выражение для ϱ_0 в (5.4) и разрешая относительно ω получим

$$\omega = -\frac{e\varepsilon f_0}{4\pi\varepsilon_0} + \left[\frac{e^2\varepsilon^2 f_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} + \omega_0^2 \right]^{1/2}. \quad (5.8)$$

Если $f_0 \rightarrow \infty$, главный член последнего выражения равен $2\pi\varepsilon_0\omega_0^2(e\varepsilon f_0)^{-1}$. Поэтому, $\varrho_0 \rightarrow 2\varepsilon_0\omega_0^2/e\varepsilon = \varrho_B$. Множество Ω_R сжимается в точку $(0, 0)$, поскольку размер множества Ω_R определяется ω , и $\omega \rightarrow 0$. Таким образом, предельное распределение при $f_0 \rightarrow \infty$ – бриллюэновский поток.

Нетрудно понять, что мы получим равномерные по сечению пучка распределения, беря произвольные линейные комбинации распределений (5.7):

$$f_k(M, H) = f_k dM, \quad (M, H) \in S_k, \quad f_k > 0. \quad (5.9)$$

Например, рассмотрим линейную комбинацию конечного числа распределений (5.9):

$$f(M, H) = \sum_{k \in K} f_k(M, H), \quad (5.10)$$

где K некоторое числовое множество, $K \subset (-2\omega, 2\omega)$. Вычисляя ϱ аналогично предыдущему, имеем

$$\varrho(r) = \frac{\omega}{\pi} \sum_{k \in K} f_k.$$

В общем случае

$$f(M, H) = \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k(M, H) dk, \quad f_k > 0. \quad (5.11)$$

Для плотности в конфигурационном пространстве имеем

$$\varrho(r) = 2 \int_{-2\omega}^{2\omega} \int_{M_1(k)}^{M_2(k)} f_{xyM} dM dk = \frac{\omega}{\pi} \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k dk.$$

Простейший случай, который не может быть сведен к предыдущим – распределение (5.11) с $f_k = \pi\varrho_0/(4\omega^2)$. В этом случае

$$f(M, H) = \frac{\pi\varrho_0}{2\omega^2(M^2 - HR^2 + \omega^2R^4)^{1/2}}. \quad (5.12)$$

6. Равномерные по сечению распределения для продольно неоднородного пучка

Рассмотрим аксиально-симметричный стационарный пучок заряженных частиц в стационарном, но теперь уже неоднородном вдоль оси

пучка, продольном магнитном поле. Будем допускать, что продольная скорость частиц может изменяться вдоль оси пучка в результате действия на частицы внешнего электрического поля.

При этом пучок уже не будет однородным в продольном направлении. В частности, радиус его поперечного сечения будет также изменяться вдоль оси пучка: $R = R(z)$. Будем предполагать, что существенные изменения радиуса поперечного сечения пучка и продольной скорости частиц происходят только на расстояниях значительно больших R , и что магнитное поле медленно меняется вдоль оси z : $d\omega_0/dz \ll \omega_0/R$. Кроме того, будем считать, что потенциал собственного поля пучка $U(r, z)$ меняется существенно быстрее при изменении r , чем при изменении z .

Как и прежде, будем задавать векторный потенциал собственного поля пучка в виде $\mathbf{A} = (0, 0, -\beta U(r, z))$, а потенциал внешнего магнитного поля в цилиндрических координатах в виде $\mathbf{A} = (0, -B_z(z)r^2/2, 0)$.

Интегрируя уравнение (3.4) для азимутальной компоненты импульса, получим интеграл движения

$$M = r^2(\varphi' + \omega_0), \quad (6.1)$$

где $\omega_0 = eB_z(z)/2mc$, M – постоянная, равная $-p_\varphi/mc$, а штрих обозначает дифференцирование по s .

Рассматривая уравнение (3.4) для радиальной компоненты импульса, получим уравнение радиального движения в виде

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\omega_0^2 r + \frac{M^2}{r^3} - \frac{e}{m\gamma c^2} \frac{\partial U}{\partial r} - \gamma r \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6.2)$$

где $w = eE_z/2mc^2$.

Будем искать такие распределения частиц, для которых плотность частиц в конфигурационном пространстве $\varrho(r, z)$ постоянна по сечению пучка:

$$\varrho(r, z) = \begin{cases} \varrho_0(z), & r \leq R(z), \\ 0, & r > R(z). \end{cases}$$

При этом $\varrho_0(z) = J/(\pi R(z)^2 e\beta(z)c)$, где J – сила тока пучка, предполагаемая независимой от z .

С учетом условий (3.3) решение уравнения Пуассона для таких распределений имеет вид

$$U(r, z) = -\frac{e\varrho_0(z)r^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{J}{4\pi\varepsilon_0 R(z)^2 \beta(z)c} r^2. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в уравнение (6.2), запишем уравнение радиального движения частицы в виде

$$\frac{d^2r}{ds^2} = -\omega^2 r + \frac{M^2}{r^3}. \quad (6.4)$$

Здесь

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\lambda}{R(z)^2} + \gamma \frac{dw}{dz}, \quad \lambda = \frac{J_i}{J_0} \cdot \frac{1}{\beta\gamma}, \quad J_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 mc^3}{e}.$$

Предположим, что огибающая пучка $R(z)$ определяется только частотами с $M = 0$ (для рассматриваемых распределений это предположение выполняется). Тогда уравнение радиального движения линейно, и можно получить уравнение для огибающей пучка по координате r :

$$R'' = -\omega_0^2 R + \frac{\lambda}{R} + \frac{a_0^2 c_0^2}{R^3} - \gamma \frac{dw}{dz} R. \quad (6.5)$$

Систему уравнений (6.4) и (6.5) можно свести к известной системе Ермакова [10], если переменную ω , которая зависит от $z(s)$ и $R(s)$, рассматривать как функцию только s .

Используя известное выражение для интеграла системы Ермакова [10], можно получить, что величина

$$I = (Rr' - rR')^2 + \frac{M^2 R^2}{r^2} + \frac{a_0^2 c_0^2 r^2}{R^2} = \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + \frac{M^2}{q^2} + a_0^2 c_0^2 q^2 \quad (6.6)$$

является интегралом движения. Здесь $q = r/R$, $d\tau = ds/R^2$. Другой интеграл движения M можно записать в виде

$$M = q^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} + R^2 \omega_0 \right). \quad (6.7)$$

Нетрудно получить, что множество допустимых значений интегралов движения, которое обозначим через $\tilde{\Omega}_1$, определяется неравенствами

$$2a_0 c_0 |M| < I \leq M^2 + a_0^2 c_0^2. \quad (6.8)$$

Это множество имеет такой же вид, как и множество Ω_R на Рис. 2. При этом ось H на Рис. 2 следует рассматривать как ось I .

Будем рассматривать распределение частиц некоторого тонкого слоя, движущегося вдоль оси z со скоростью $\beta(z)c$. Этот слой ограничен двумя параллельными близкими плоскостями, движущимися вдоль оси z с той же самой скоростью.

Внутри каждого такого слоя плотность частиц меняется по мере продвижения этого слоя вдоль пучка. Стационарность пучка может быть обеспечена независимостью от времени распределения частиц в некотором его сечении, например, в сечении $z = z_0$, которое будем называть начальным сечением. Другими словами, все слои, проходящие через начальное сечение в различные моменты времени, должны иметь в момент прохождения сечения $z = z_0$ одно и то же распределение частиц.

При этом все плотности определены с точностью до некоторого нормировочного множителя, зависящего от толщины рассматриваемого

слоя. Выберем этот множитель так, чтобы плотность в двумерном конфигурационном пространстве для частиц рассматриваемого слоя совпала с плотностью частиц в трехмерном конфигурационном пространстве в начальном сечении пучка.

Мы будем считать, так же как и для продольно однородного пучка, что частицы равномерно распределены по траекториям, отвечающим одной и той же паре значений M и I и переводимых друг в друга поворотом, что приводит к аксиальной симметрии всего распределения, а также что частицы равномерно распределены по фазам траекторий. В этом случае, как и для продольно однородного пучка, мы можем также ввести плотность распределения частиц в пространстве интегралов M и I : $f(M, I)$.

Простейшее из распределений — распределение, аналогичное потоку Бриллюэна. Зададим $f(M, I)$ в виде $f(M, I) = f_B \delta_{(0,0)}$, где $\delta_{(0,0)}$ — плотность меры Дирака (δ -функция Дирака). Это означает, что все частицы обладают одними и теми же значениями интегралов M и I : $M = 0$, $I = 0$. В силу (6.6) имеем $q' = 0$, $c_0 = 0$, а уравнение для огибающей пучка будет иметь вид

$$R'' = -\omega_0^2 R + \frac{\lambda}{R} - \gamma \frac{dw}{dz} R. \quad (6.9)$$

В отличие от бриллюэновского потока все частицы могут двигаться в радиальном направлении, но так, чтобы их нормированная радиальная координата q все время оставалась бы постоянной для каждой частицы. При этом плотность частиц в конфигурационном пространстве равна $\varrho_0(z) = J/(\pi R(z)^2 e\beta(z)c)$. Тогда, нормируя, как указано выше, получим $f_B = J/(e\beta(z_0)c)$.

Если $\omega_0 = \text{const}$, $w = 0$, $R = \text{const}$, то приравнивая правую часть уравнения (6.9) нулю, можно найти радиус такого пучка, откуда получим, что плотность такого пучка равна плотности потока Бриллюэна ϱ_B . Таким образом, поток Бриллюэна есть частный случай, распределения, характеризуемого значениями интегралов $M = 0$, $I = 0$ для всех частиц. Поэтому рассматриваемое здесь распределение можно назвать обобщенным потоком Бриллюэна.

Аналогичным образом, все результаты, полученные ранее для продольно однородного пучка с равномерным распределением частиц по сечению переносятся и на рассматриваемый случай. В частности, получим обобщенные распределения Калчинского-Владимирского и жесткого ротатора, когда носителем распределения является отрезок, а также распределения, представляющие собой их линейные комбинации.

7. Заключение

В рамках подхода, основанного на ковариантной формулировке уравнения Власова, рассмотрены его точные решения для пучка заряженных частиц в магнитном поле. Такой подход применяется впервые. Этот подход позволяет анализировать решения уравнения Власова, исследуя распределения частиц в пространстве интегралов движения. В работе представлены в основном решения для равномерно заряженного пучка, среди которых есть решения, полученные ранее в работах авторов статьи, и другие известные распределения, такие, например, как распределение Капчинского – Владимирского. Этот подход может быть также использован и для неравномерных по сечению пучка распределений.

Список литературы

1. Буданов Ю. А. Распределение фазовой плотности в шестимерном фазовом пространстве для интенсивных пучков ионов / Ю. А. Буданов // Журн. техн. физики. – 1984. – Т. 54, вып. 6. – С. 1068–1075.
2. Власов А. Д. Самосогласованные цилиндрические пучки постоянной плотности / А. Д. Власов // Журн. техн. физики. – 1981. – Т. 49, вып.9. – С. 1821–1826.
3. Давидсон Р. Теория заряженной плазмы / Р. Давидсон. – М. : Мир, 1978. – 216 с.
4. Дривотин О. И. Об определении стационарных решений уравнения Власова для аксиально-симметричного пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1987. – Т. 27, № 3. – С. 416–427.
5. Дривотин О. И. О новых классах стационарных решений уравнения Власова для аксиально-симметричного пучка заряженных частиц с постоянной плотностью / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1989. – Т.29, № 8. – С. 1245–1250.
6. Дривотин О. И. О самосогласованных распределениях для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Докл. РАН. – 1994. – Т.33, N3. – С. 284–287.
7. Овсянников Д. А. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц / Д. А. Овсянников, О. И. Дривотин. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2003. – 176 с.
8. Дривотин О. И. Самосогласованные распределения заряженных частиц в продольном магнитном поле. I, II / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 10, Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. – 2004. – № 1. – С. 3–15; № 2. – С. 70–81.
9. Дривотин О. И. Математические основы теории поля / О. И. Дривотин. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. гос. ун-та, 2010. – 168 с.
10. Ермаков В. П. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде / В. П. Ермаков // Унив. изв. Киев. – 1880. – Т. 20, № 9. – С. 1–25.
11. Капчинский И. М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях / И. М. Капчинский. – М. : Атомиздат, 1966. – 312 с.

12. Brillouin L. A theorem of Larmor and its importance for electrons in magnetic fields / L. Brillouin // *Phys. Rev.* – 1945. – Vol. 67, N 7&8. – P. 260–266.
13. Chen C. Rigid-rotor Vlasov equilibrium for an intense charged particle beam propagating through a periodic solenoidal magnetic field. C. Chen, R. Pakter, R. C. Davidson // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 79, N 2. – P. 225–228.
14. Davidson R.C., Chen C. Kinetic description of high intensity beam propagation through a periodic focusing field based on the nonlinear Vlasov – Maxwell equations / R. C. Davidson, C. Chen // *Particle Accelerators.* – 1998. – Vol. 59. – P. 175–250.
15. Davidson R.C. Three-dimensional kinetic stability theorem for high-intensity charged particle beams / R. C. Davidson // *Physics of Plasmas.* – 1998. – Vol. 5, N 9. – P. 3459–3468.
16. Drivotin O. I. New classes of uniform distributions for charged particles in magnetic field / O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov // *Proc. 1997 Part. Accel. Conf. PAC'97.* – Vancouver, B.C., Canada, 1997. – P. 1943–1945.
17. Drivotin O. I. Particle distributions for beam in electric field / O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov // *Proc. 1999 IEEE Part. Accel. Conf.* – N. Y., NY, USA, 1999. – P. 1857–1859.
18. Drivotin O. I. Modeling of self-consistent distributions for longitudinally non-uniform beam / O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov // *Nuclear Instr. and Meth. in Physics Research. A.* – 2006. – Vol. 558, N 1. – P. 112–118.
19. Drivotin O. I. Self-consistent distributions for charged particle beam in magnetic field / O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov // *Int. Journ. of Mod. Phys. A.* – 2009. – Vol. 24, N 5. – P. 816–842.
20. Drivotin O. I. Covariant formulation of the Vlasov equation / O. I. Drivotin // *Proc. of the 2011 Int. Particle Accelerators Conf., IPAC'2011, San-Sebastian, Spain, 2011.* – accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/wepc114.pdf.
21. Drivotin O. I. Degenerate solutions of the Vlasov equation / O. I. Drivotin // *Proc. of the 2012 Russ. Particle Accelerators Conf., RUPAC'2012, St.-Petersburg, 2012.* – accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb028.pdf
22. Gluckstern R. L. Analytic model for halo formation in high current ion linacs / R. L. Gluckstern // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – Vol. 73, N 9. – P. 1247–1250.
23. Gluckstern R. L. Stability of a uniform-density breathing beam with circular cross-section / R. L. Gluckstern, W.-H. Cheng, Ye H. // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – Vol. 75, N 15. – P. 2835–2838.
24. Halo formation in three-dimensional bunches / R. L. Gluckstern, A. V. Fedotov, S. Kurennoy, R. Ryne // *Phys. Rev. E.* – 1998. – Vol. 58. – P. 4977–4990.
25. Hofmann I. Transport and focusing of high intensity unneutralized beams / I. Hofmann // *Applied charged particle optics* / ed. A. Septier. Part C: Very-high-density beams. – N. Y. : Academic Press, 1983. – P. 49–140.
26. Kapchinsky I. Limitations of proton beam current in a strong focusing linear accelerator, associated with beam space charge. / I. Kapchinsky, V. Vladimirsky // *Proc. II Int. Conf. on High Energy Accelerators, Geneva, Cern, 1959.* – P. 274–288.

O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov

Solutions of the Vlasov equation for charged particle beam in magnetic field

Abstract. New approach based on covariant formulation of the Vlasov equation is presented. This approach allows to use various coordinates in the phase space, and to consider degenerate distributions. It is shown how to apply this approach to the

problem of finding of solutions of the Vlasov equation for charged particle beam. Solutions obtained within the framework of this approach are presented.

Keywords: the Vlasov equation; self-consistent distributions; phase density; Kapchinsky-Vladimirsky distribution; Ermakov integral.

Дривотин Олег Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., 35.

тел.: (812)4284726 (drivotin@yandex.ru)

Овсянников Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., 35. тел.: (812)4284726 (dovs45@mail.ru)

Drivotin Oleg, Saint-Petersburg State University, 35, Universitetskii pr., Petergof, St.-Petersburg 198504, professor, Phone: (812)4284726 (drivotin@yandex.ru)

Ovsyannikov Dmitri, Saint-Petersburg State University, 35, Universitetskii pr., Petergof, St.-Petersburg 198504, head of department, Phone: +7(911)2417568 (dovs45@mail.ru)