Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 4. С. 107—127

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.922, 517.977.1, 517.926.4

Правильные системы дифференциально-алгебраических уравнений *

А. А. Щеглова
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

П. С. Петренко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аннотация. Рассматриваются линейные и нелинейные системы дифференциально-алгебраических уравнений. Для линейных систем получены условия приводимости и правильности, доказаны теоремы, связывающие эти понятия. Для нелинейной системы в условиях существования глобальной структурной формы доказана теорема об устойчивости по первому приближению. Допускаются произвольно высокий индекс неразрешенности и переменные ранги матриц Якоби, описывающих систему.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения; Приводимость; правильность; устойчивость по линейному приближению.

1. Введение

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \quad t \in I = [t_0, +\infty), \tag{1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы со значениями в $\mathbf{R}^n$, $x(t)$ — искомая n-мерная функция. Предполагается, что $\det A(t) \equiv 0$. Системы такого рода называются дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). В статье под мерой неразрешенности ДАУ (1.1) относительно производной понимается индекс дифференцирования [1–4].

Рост интереса к изучению систем ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования во многих прикладных областях: тео-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00132), Программы Президиума РАН (проект № 17.1) и ФЦП "Научно и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011).

рии автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике.

В настоящее время исследование устойчивости ДАУ далеко от завершения. Достаточно полно в этом отношении изучены линейные системы с постоянными коэффициентами. В линейном нестационарном и нелинейном случаях результаты получены при довольно жестких ограничениях: низкий индекс неразрешенности, полуявная (semiexplicit) форма, постоянство матрицы при производной. Поставленная в данной работе задача получения результатов, ориентированных на ДАУ, не подчиняющихся указанным ограничениям, остается по-прежнему актуальной.

Для анализа как линейных, так и нелинейных ДАУ в работе используется так называемая "эквивалентная форма" [5, 6], в которой разделены "алгебраическая" и "дифференциальная" подсистемы. Эта структурная форма сохраняет свойство устойчивости и допускает исследование нелинейных систем по первому приближению. Ее существование доказано в предположениях близких к необходимым для регулярного поведения решений, а алгоритм ее построения в линейном случае отличается конструктивностью.

2. Эквивалентная структурная форма для линейных ДАУ

Для системы (1.1) определим $(nr \times nr)$ – матрицу $D_{r,z}(t) =$

$$\begin{pmatrix} C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},$$

а также матрицы

$$D_{r,y}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & O \\ \begin{pmatrix} C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t) \\ \vdots \\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & D_{r,z} \end{pmatrix}, D_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \bar{B}(t) & D_{r,y} \end{pmatrix},$$

имеющие соответственно размеры $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$. Здесь и далее $C_i^j = \dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ — биномиальные коэффициенты, O — нулевая матрица соответствующего размера, $\bar{B}(t) = \operatorname{colon}\Big(B(t), B'(t), \dots, B^{(r)}(t)\Big)$.

Для анализа ДАУ высокого индекса успешно используются так называемые продолженные системы (см., в частности, [1, 4, 7, 8, 9]).

Определение 1. *Система линейных алгебраических уравнений*

$$D_{r,x}(t)\,\mathrm{colon}\,(x, y, z_1, \ldots, z_r) = 0, \quad t \in I,$$

где $x, y, z_i \in \mathbf{R}^n$, называется r-продолженной системой по отношению к ДАУ (1.1).

Иначе говоря, продолженная система представляет собой совокупность системы ДАУ (1.1) и ее r полных производных по t, в которой $x(t) = x, x'(t) = y, x^{(j+1)}(t) = z_j$ полагаются независимыми переменными.

Предположим, что для некоторого r $(0 \le r \le n)$ выполняется условие $\mathrm{rank}\, D_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}$ $\forall t \in I$, и в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется неособенный для всех t минор $n(r+1)$–ого порядка, включающий в себя ρ столбцов матрицы $D_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $D_{r,y}$.

Определение 2. *Неособенный для всех $t \in I$ минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_{r,x}(t)$, включающий в себя ρ столбцов матрицы $D_{r,z}(t)$ и n первых столбцов матрицы $D_{r,y}(t)$, будем называть разрешающим минором.*

Допустим, что известно, какие именно столбцы матрицы $D_{r,x}(t)$ входят в разрешающий минор. Вычеркнем $n - d$ столбцов матрицы $\bar{B}(t)$, которые не входят в упомянутый минор, где $d = nr - \rho$. После соответствующей перестановки столбцов из $D_{r,x}(t)$ получим матрицу

$$\Lambda_r(t) = D_{r,x}(t)\ \mathrm{diag}\left(Q\begin{pmatrix} O \\ E_d \end{pmatrix},\ Q, \ldots, Q\right)^1, \tag{2.1}$$

где E_d — единичная матрица порядка d, Q — $(n \times n)$-матрица перестановок[2].

Матрица Q строится следующим образом. Обозначим $i_1, i_2, \ldots, i_d$ и $i_{d+1}, i_{d+2}, \ldots, i_n$ номера столбцов матрицы $\bar{B}(t)$, которые соответственно входят и не входят в разрешающий минор. Будучи умноженной на $\bar{B}(t)$ слева, матрица Q переставляет в $\bar{B}(t)$ каждый (i_{d+k})-ый столбец $(k = \overline{1, n-d})$ на k-ое место, а каждый (i_j)-ый столбец $(j = \overline{1, d})$ на место с номером $n-d+j$. Матрица Q обратима и состоит из нулей и n единиц, причем единице равны элементы с индексами (i_{d+k}, k) и $(i_j, n-d+j)$.

Лемма 1. *[6].Пусть:*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^r(I)$;
2) $\mathrm{rank}\, D_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}$ $\forall t \in I$;
3) в матрице $D_{r,x}(t)$ имеется разрешающий минор.

---

[1] Запись $\mathrm{diag}\,(A_1, \ldots, A_s)$ обозначает квазидиагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены блоки, перечисленные в скобках, остальные элементы — нулевые.

[2] О матрицах перестановок строк и столбцов см. в книге [10, с. 127, 128].

Тогда существует оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{2.2}$$

с непрерывными коэффициентами $R_j(t)$ $(j = \overline{0,r})$, *обладающий свойством: для любой n–мерной функции $\nu(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$*

$$\mathcal{R}\left[A(t)\nu'(t) + B(t)\nu(t)\right] =$$

$$= (R_0(t)\;\; R_1(t)\;\; \ldots\;\; R_r(t))\, D_{r,x}(t)\;\operatorname{colon}\left(\nu(t), \nu'(t), \ldots, \nu^{(r+1)}(t)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}\nu'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}\nu(t). \tag{2.3}$$

При этом матрицы $R_j(t)$ находятся единственным образом по формуле

$$(R_0(t)\;\; R_1(t)\;\; \ldots\;\; R_r(t)) = (E_n\;\; O\;\; \ldots\;\; O)\;\Lambda_r^\top(t)\;\left(\Lambda_r(t)\Lambda_r^\top(t)\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

Другими словами, действие оператора $\mathcal{R}$ преобразует систему (1.1) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.5}$$

где $\operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Q^{-1}x(t)$,

$$\begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} = (R_0(t)\;\; R_1(t)\;\; \ldots\;\; R_r(t))\,\bar{B}(t)Q.$$

Лемма 2. *[6]. Пусть:*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I)$*;*
2) $\operatorname{rank} D_{r,y}(t) = \operatorname{rank} D_{r-1,y}(t) + n\;\; \forall t \in I$;
3) существует оператор $\mathcal{R}$ (2.2) с непрерывными на I коэффициентами, обладающий свойством (2.3).

Тогда существует оператор $\mathcal{L} = L_0(t) + L_1(t)\dfrac{d}{dt}$ *такой, что*

$$\mathcal{L}\left[\sum_{j=0}^{r} R_j(t)\delta^{(j)}(t)\right] = \delta(t)\;\; \forall\delta(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(I), \tag{2.6}$$

где $L_0(t)$, $L_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(n \times n)$*-матрицы.*

Определение 3. *Решением системы (1.1) называется n-мерная вектор-функция $x(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обращающая при подстановке уравнение (1.1) в тождество на I.*

Теорема 1. *Пусть:*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$;
2) выполнены условия 2), 3) леммы 2.

Тогда любое решение системы (1.1) будет решением системы (2.5) и наоборот.[3]

Доказательство. Пусть $x_*(t)$ — решение системы (1.1). Подействовав оператором $\mathcal{R}$ на тождество $A(t)x_*'(t) + B(t)x_*(t) \equiv 0$, получим

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}x_*'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}x_*(t) \equiv 0.$$

Следовательно, функция $Q^{-1}x_*(t)$ (Q — матрица перестановок из (2.1)) является решением системы (2.5).

Предположим теперь, что функция $\operatorname{colon}(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)) = Q^{-1}\tilde{x}_*(t)$ является решением системы (2.5). В сделанных предположениях, согласно лемме 2, существует оператор $\mathcal{L}$ со свойством (2.6). Подействуем этим оператором на тождество

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} Q^{-1}\tilde{x}_*'(t) + \begin{pmatrix} J_2(t) & E_d \\ J_1(t) & O \end{pmatrix} Q^{-1}\tilde{x}_*(t) \equiv$$
$$\equiv \mathcal{R}\left[A(t)\tilde{x}_*'(t) + B(t)\tilde{x}_*(t)\right] \equiv 0.$$

Поскольку $\mathcal{L}[0] = 0$, то в результате получим $A(t)\tilde{x}_*'(t) + B(t)\tilde{x}_*(t) \equiv 0$, т.е. функция $\tilde{x}_*'(t)$ является решением системы (1.1). □

Определение 4. *Систему (2.5) будем называть эквивалентной формой для ДАУ (1.1).*

3. Приводимость дифференциально-алгебраических уравнений

Определение 5. *Система (1.1) называется приводимой, если существует оператор $\mathcal{M} = \sum_{j=0}^{r} M_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$ с непрерывными на I коэффициентами $M_j(t)$, обладающий левым обратным оператором, и матрица Ляпунова $V(t)$ такие, что действие оператора $\mathcal{M}$ и замена переменной*

$$x(t) = V(t)\operatorname{colon}(\xi_1(t), \xi_2(t))$$

[3] Здесь приведен более простой вариант доказательства, чем представленный в работе [6].

преобразуют ДАУ (1.1) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1'(t) \\ \xi_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in I, \tag{3.1}$$

где H — $(n-d) \times (n-d)$-постоянная матрица.

Лемма 3. *Пусть в (2.5) $J_1(t) \in \mathbf{C}(I)$, $J_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$. Для того чтобы система (2.5) была приводима, необходимо и достаточно выполнения условий:*
i) некоторая фундаментальная матрица $X(t)$ системы

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0, \tag{3.2}$$

может быть представлена в виде

$$X(t) = U(t)e^{tH}, \tag{3.3}$$

где $U(t)$ — матрица Ляпунова, H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$-матрица;
ii) матрица $J_2(t)U(t)$ ограничена на I вместе со своей производной.

Доказательство. Достаточность. В силу условия i), по теореме Еругина [11] система (3.2) приводима. А именно, замена переменных $x_1(t) = U(t)\xi_1(t)$, (где $U(t) = X(t)e^{-tH}$) и последующее умножение слева на матрицу $e^{tH}X^{-1}(t)$ преобразует систему (3.2) к виду

$$\xi_1'(t) - H\xi_1(t) = 0.$$

Сделаем в (2.5) замену переменных $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = V(t) \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, где $V(t) = \begin{pmatrix} X(t)e^{-tH} & O \\ -J_2(t)X(t)e^{-tH} & E_d \end{pmatrix}$, а затем умножим полученную систему слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & e^{tH}X^{-1}(t) \end{pmatrix}$. В результате получим систему вида (3.1). В силу предположений i) и ii) матрица $V(t)$ будет матрицей Ляпунова.

Таким образом, система (2.5) приводима с обратимым оператором $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & e^{tH}X^{-1}(t) \end{pmatrix}$. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть система (2.5) приводима. Из структуры этой системы следует, что в этом случае система (3.2) также будет приводима. По теореме Еругина одна из фундаментальных матриц системы (3.2) имеет вид (3.3), следовательно, условие i) выполняется.

Осуществим в (2.5) преобразование Ляпунова $x_1(t) = U(t)\xi_1(t)$ ($U(t)$ — матрица из (3.3)). В результате последующего умножения слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & U^{-1}(t) \end{pmatrix}$ получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_2(t)U(t) & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

В сделанных предположениях система (3.4) также будет приводима, т.е. найдется матрица Ляпунова $G(t)$ вида

$$G(t) = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ G_1(t) & G_2(t) \end{pmatrix},$$

такая, что преобразование $\operatorname{colon}(\xi_1, x_2) = G(t) \operatorname{colon}(\xi_1, \xi_2)$ приводит систему (3.4) к виду (3.1). Иначе говоря, матрица $G(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{pmatrix} J_2(t)U(t) & E_d \\ -H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ G_1(t) & G_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E_d \\ -H & O \end{pmatrix},$$

откуда единственным образом находятся блоки $G_1(t)$ и $G_2(t)$

$$G_1(t) = -J_2(t)U(t), \quad G_2(t) = E_d.$$

Поскольку $G(t)$ является матрицей Ляпунова, то из ее структуры вытекает справедливость условия *ii*). □

Теорема 2. *Пусть $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$ и выполнено предположение 2) леммы 2. Для того чтобы система (1.1) была приводима с матрицей*

$$V(t) = P \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

(где $V_1(t)$ — $(n-d) \times (n-d)$-матрица Ляпунова; $V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ — $(d \times d)$-матрица ограниченная на I вместе с производной; P — некоторая матрица перестановок) необходимо и достаточно выполнения условий:

a) существует оператор (2.2) со свойством (2.3);

b) общее решение системы (1.1) может быть представлено в виде

$$x(t) = Q \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c, \tag{3.6}$$

где H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$-матрица, $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа, Q — матрица перестановок из (2.1), $V_1(t)$ и $V_2(t)$ такие же как в (3.5).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.1) приводима, и матрица $V(t)$ имеет вид (3.5). Рассмотрим систему (3.1), полученную из (1.1) в результате действия оператора $\mathcal{M}$ и замены переменных $x(t) = V(t)\operatorname{colon}(\xi_1, \xi_2)$. Осуществим в (3.1) обратное преобразование

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^{-1} & O \\ -V_2 V_1^{-1} & E_d \end{pmatrix} P^{-1} x(t),$$

а затем умножим полученную систему слева на матрицу $\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1 \end{pmatrix}$. В результате получим ДАУ

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -V_2 V_1^{-1} & E_d \\ V_1\left(\left(V_1^{-1}\right)' - H V_1^{-1}\right) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{3.7}$$

которая записана с использованием обозначения $\operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t)) = P^{-1}x(t)$. Система (3.7) имеет вид (2.5), где

$$J_1 = V_1\left(\left(V_1^{-1}\right)' - H V_1^{-1}\right), \quad J_2 = -V_2 V_1^{-1}, \tag{3.8}$$

и получена из (1.1) действием оператора

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1 \end{pmatrix} \mathcal{M}.$$

По теореме 1 системы (1.1) и (2.5) имеют решения, которые связаны матрицей перестановок $x(t) = Q\operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t))$, поэтому $P = Q$. В свою очередь, решения систем (3.1) и (2.5) удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что общее решение системы (3.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c,$$

где $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа. Следовательно, общее решение ДАУ (1.1) представимо в виде (3.6). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть имеют место условия a) и b). Оператор $\mathcal{R}$ преобразует ДАУ (1.1) к виду (2.5), причем, по теореме 1, системы (1.1) и (2.5) эквивалентны в смысле решений. Условие b) гарантирует, что общее решение системы (2.5) имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ V_2(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{tH} & O \\ O & O \end{pmatrix} c, \tag{3.9}$$

где $c \in \mathbf{R}^n$ — произвольная константа.

С другой стороны, общее решение можно найти непосредственно из системы (2.5):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) & O \\ -J_2(t)X(t) & O \end{pmatrix} c, \tag{3.10}$$

где $X(t)$ — некоторая фундаментальная матрица решений подсистемы (3.2). Приравнивая правые части равенств (3.9) и (3.10), получим

$$X(t) = V_1(t)e^{tH}, \quad -J_2(t)V_1(t) = V_2(t).$$

В силу свойств матриц V_1 и V_2, для системы (2.5) выполнены все предположения леммы 3, согласно которой ДАУ (2.5) приводима к виду (3.1). Поскольку такое приведение осуществляется с помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ -J_2(t)V_1(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

и умножения слева на матрицу $\tilde{V}(t) = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1(t)^{-1} \end{pmatrix}$ (см. доказательство необходимости леммы 3), то система (3.1) получена из (1.1) с помощью преобразования Ляпунова

$$x(t) = Q \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} V_1(t) & O \\ -J_2(t)V_1(t) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

и оператора $\mathcal{M} = \tilde{V}(t)\mathcal{R}$. В сделанных предположениях справедлива лемма 2, в соответствии с которой оператор $\mathcal{R}$ имеет левый обратный. Следовательно, в силу обратимости матрицы $\tilde{V}(t)$ оператор $\mathcal{M}$ также имеет левый обратный. Таким образом система (1.1) приводима с матрицей вида (3.5). $\square$

4. Правильные системы

Предположим, что для ДАУ (1.1) выполнены все предположения леммы 1.

Определение 6. *Система (1.1) называется правильной, если выполняются условия:*
1) существует оператор $\mathcal{R}$ вида (2.2), имеющий левый обратный и обладающий свойством (2.3);
2) полный спектр системы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\eta$ $(\eta \leq n)$ состоит из конечных чисел и сумма

$$S = \sum_{i=1}^{\eta} \lambda_i$$

характеристических показателей решений ДАУ (1.1), входящих в некоторую ее нормальную фундаментальную систему, совпадает с величиной

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp}\tilde{B}(\tau)d\tau - d,$$

где

$$\tilde{B}(t)=\left\{\tilde{b}_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix} O & E_{n-d}\\ E_d & O\end{pmatrix}\mathcal{R}\left[B(t)\right]Q^{-1},$$

$\operatorname{Sp}\tilde{B}(t)=\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{b}_{jj}(t)$ *— след матрицы* $\tilde{B}(t)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и в ДАУ (2.5):*
1) $\sup\limits_{t\in I}\|J_1(t)\|<\infty$;
2) матрица $J_2(t)$ *имеет строгий характеристический показатель равный нулю:* $\chi\left[J_2(t)\right]=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\|J_2(t)\|=0$.

Тогда число элементов спектра ДАУ (1.1) $\eta=n-d$ *и полные спектры систем (1.1), (2.5) и (3.2) совпадают.*

Доказательство. Условие 2) гарантирует, что полный спектр ДАУ (2.5) совпадает с полным спектром ее дифференциальной подсистемы (3.2). Из предположения 1) следует, что число элементов спектра системы (3.2) равно $\eta=n-d$. Справедливость леммы вытекает из того факта, что решения систем (1.1) и (2.5) связаны матрицей перестановок. □

Лемма 5. *В предположениях леммы 4 система (1.1) правильна тогда и только тогда, когда:*
i) существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp}\tilde{B}(\tau)d\tau=\sigma$;
ii) сумма характеристических показателей ДАУ (1.1) $S=\sigma-d$.

Доказательство. Согласно теореме 1 и определению 6, система (1.1) правильна тогда и только тогда, когда правильна система (2.5).

Поскольку

$$\tilde{B}(t)=\begin{pmatrix} J_1(t) & O\\ J_2(t) & E_d\end{pmatrix},$$

то $\operatorname{Sp}\tilde{B}(t)=\operatorname{Sp}J_1(t)+d$. Следовательно, условие i) выполняется в том и только том случае, когда существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_{t_0}^{t}\operatorname{Sp}J_1(\tau)d\tau=\sigma_1=\sigma-d$.

Принимая во внимание лемму 4, можно заключить, что *i*) и *ii*) представляют собой необходимые и достаточные условия правильности системы (3.2) [12, с. 166].

Очевидно, что в сделанных предположениях система (2.5) правильна тогда и только тогда, когда правильна ее подсистема (3.2). Отсюда следует справедливость утверждения леммы. □

Замечание 1. Из доказательства леммы 5 следует, что в предположениях леммы 4 ДАУ (1.1) правильна тогда и только тогда, когда правильна ее дифференциальная подсистема (3.2).

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Если система (1.1) является приводимой с матрицей $V(t)$ вида (3.5) (где $V_1(t)$ — матрица Ляпунова; $V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ ограничена на I вместе с производной; P — матрица перестановок), то она правильна.*

Доказательство. Согласно теореме 2, имеют место условия a) и b), фигурирующие в формулировке этой теоремы.

Из условия *b*) следует, что общее решение системы (2.5) может быть представлено в виде (3.9), поэтому общее решение дифференциальной подсистемы (3.2) можно записать в форме (3.3), где $U(t) = V_1(t)$. По теореме Еругина система (3.2) приводима и, следовательно, правильна [12, с. 166].

При доказательстве необходимости теоремы 2 для ДАУ (2.5) был получен вид матриц $J_1(t)$ и $J_2(t)$ (3.8). Свойства матриц $V_1(t)$ и $V_2(t)$ обеспечивают выполнение условий 1) и 2) леммы 4. В этом случае, по замечанию 1, система (1.1) будет правильной. □

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения леммы 4. Если система (1.1) правильна, то она приводима с матрицей $V(t)$ вида (3.5), где матрица $V_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ обратима $\forall t \in I$ и*

$$\chi[V_1(t)^{\pm 1}] = 0, \tag{4.1}$$

$V_2(t) \in \mathbf{C}^1(I)$ и $\chi[V_2(t)] = 0$, P — матрица перестановок.

Доказательство. По определению 6, существует оператор $\mathcal{R}$, преобразующий (1.1) к виду (2.5), и сумма характеристических показателей ДАУ (1.1) совпадает с числом

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp} \begin{pmatrix} J_1(\tau) & O \\ J_2(\tau) & E_d \end{pmatrix} d\tau - d = \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Sp}\, J_1(\tau) d\tau.$$

Согласно лемме 4, полные спектры систем (1.1), (2.5) и (3.2) совпадают, поэтому в условиях теоремы дифференциальная подсистема (3.2) правильна. На основании известного факта [13, с. 131] отсюда следует приводимость системы (3.2) с обратимой $\forall t \in I$ матрицей $V_1(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обладающей свойством (4.1). В этом случае ДАУ (1.1) с помощью замены переменной (3.11) и действия оператора $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} E_d & O \\ O & V_1(t)^{-1} \end{pmatrix} \mathcal{R}$ преобразуется к виду (3.1). В силу условия 2) леммы 4 матрица $V_2(t) = -J_2(t)V_1(t)$ имеет строгий характеристический показатель равный нулю. Таким образом, ДАУ (1.1) приводима с матрицей $V(t)$ вида (3.5), где $P = Q$, а $V_1(t)$ и $V_2(t)$ обладают необходимыми свойствами. $\square$

5. Эквивалентная форма для нелинейных ДАУ

Рассмотрим нелинейную систему ДАУ

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in I, \tag{5.1}$$

где $\det \dfrac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} \equiv 0$, $F(t,x,y)$ — достаточно гладкая функция со значениями в $\mathbf{R}^n$ и областью определения $\mathcal{D} = I \times \mathcal{X} \times \mathbf{R}^n$, $\mathcal{X}$ — окрестность точки $x = 0$.

Определение 7. *Система уравнений*

$$\mathcal{F}_r(t, x, y, z_1, \ldots, z_r) = \begin{pmatrix} F(t,x,y) \\ F_1(t,x,y,z_1) \\ \ldots \\ F_r(t,x,y,z_1,\ldots,z_r) \end{pmatrix} = 0, \tag{5.2}$$

где $F_j(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(j+1)}(t)) = \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t, \phi(t), \phi'(t))$ *при любой достаточно гладкой n-мерной вектор-функции $\phi(t)$, называется r-продолженной системой по отношению к ДАУ (5.1).*

В дальнейших рассуждениях будем опираться на локальную теорему о существовании решений ДАУ (5.1) [5]. При доказательстве этой теоремы строится система вида

$$x_1'(t) = f_1\left(t, x_1(t)\right), \tag{5.3}$$

$$x_2(t) = f_0\left(t, x_1(t)\right), \tag{5.4}$$

такая, что все решения исходной ДАУ (5.1), определенные в окрестности начальной точки, являются решениями системы (5.3), (5.4) и наоборот. Соответствующая (5.1) система (5.3), (5.4) получается как часть компонент неявной функции, удовлетворяющей r-продолженной системе.

Как известно, классическая теорема [14, с. 68] гарантирует существование неявной функции лишь в некоторой окрестности начальной точки. Для доказательства теоремы об устойчивости по первому приближению системы вида (5.3), (5.4) нам потребуется, по крайней мере, чтобы функции f_1 и f_0 были определены при всех $t \in I$. С этой целью воспользуемся следующим глобальным вариантом теоремы о неявной функции, который является прямым следствием более общего результата, полученного в [15].

Пусть A — $(p \times g)$-матрица, $\chi \in \mathbf{R}^q$. Обозначим

$$L(A) = \max_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|A\chi\|_{\mathbf{R}^p}, \quad l(A) = \min_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|A\chi\|_{\mathbf{R}^p}.$$

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{W} \subseteq \mathbf{R}^m$ — выпуклое открытое множество, $\Phi(\nu, \eta) : \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$. Кроме того:*
1) существует точка $(\nu_0, \eta_0) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k$ такая, что $\Phi(\nu_0, \eta_0) = 0$;
2) $\Phi(\nu, \eta) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W} \times \mathbf{R}^k)$[4];
3) $l\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\nu, \eta)\right) > 0 \ \ \forall (\nu, \eta) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k$;
4) существует непрерывная функция $w(s) : I \to I$, такая, что

$$w(s) > 0, \ \ s \in (0, \infty), \tag{5.5}$$

$$\int_1^\infty \frac{ds}{w(s)} = \infty, \tag{5.6}$$

и

$$L\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\nu, \eta)\right) \Big/ l\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\nu, \eta)\right) \le w(\|\eta\|) \ \ \forall (\nu, \eta) \in \mathcal{W} \times \mathbf{R}^k.$$

Тогда в области $\mathcal{W}$ определена единственная неявная функция $\eta = g(\nu) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W})$, такая, что $g(\nu_0) = \eta_0$ и

$$\Phi(\nu, g(\nu)) = 0 \ \ \forall \nu \in \mathcal{W}.$$

Рассмотрим r-продолженную систему (5.2). Обозначим

$$\bar{Z}_j = (z_1, \ldots, z_j), \ \ j = r, r+1.$$

Введем в рассмотрение следующие объекты: матрицу размеров $n(r+1) \times nr$

$$\Gamma_{r,z}(t, x, y, \bar{Z}_r) = \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial \bar{Z}_r \right),$$

квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Gamma_{r,y}(t, x, y, \bar{Z}_r) = \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial y \quad \Gamma_{r,z} \right)$$

[4] Запись $\Phi(\nu, \eta) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{W} \times \mathbf{R}^k)$ означает, что функция Φ имеет в указанной области непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов.

и матрицу размеров $n(r+1)\times n(r+2)$

$$\Gamma_{r,x}(t,x,y,\bar{Z}_r) = (\ \partial\mathcal{F}_r/\partial x \quad \Gamma_{r,y}\ ).$$

По построению функция $\mathcal{F}_r$ из (5.2) определена при всех вещественных значениях переменной $\bar{Z}_r$.

Далее будем предполагать, что система (5.1) имеет нулевое положение равновесия, т. е. $F(t,0,0)\equiv 0$. В этом случае $\mathcal{F}_r(0)=0$.

Допустим, что в области $\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$ (область $\mathcal{Z}\subseteq\mathbf{R}^{nr}$ изменения переменной $\bar{Z}_r$ будет определена ниже) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,z}=\rho=\mathrm{const}$, и в матрице $\Gamma_{r,x}$ имеется квадратная порядка $n(r+1)$ подматрица Δ_r, обратимая в нуле и включающая в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}$:

$$\Delta_r(t,x,y,\bar{Z}_r) = \left(\frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial x_2}\ \ \frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial y}\ \ \frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial Z_1}\right), \tag{5.7}$$

где

$$\mathrm{colon}\,(x_1,\,x_2) = Qx,\ \ \mathrm{colon}\,(Z_1,\,Z_2) = Q_1\bar{Z}_r; \tag{5.8}$$

$x_1\in\mathbf{R}^{n-d},\ x_2\in\mathbf{R}^{d},\ Z_1\in\mathbf{R}^{\rho},\ Z_2\in\mathbf{R}^{d}$; как и выше $d=nr-\rho$; Q и Q_1 — матрицы перестановок строк.

Пусть:

1) множество $\mathcal{X}$, фигурирующее в описании множества $\mathcal{D}$, представляет собой прямое произведение $\mathcal{X}=\mathcal{X}_1\times\mathbf{R}^d$, где $\mathcal{X}_1\subseteq\mathbf{R}^{n-d}$ — окрестность точки $x_1=0$;

2) $\mathcal{Z}=\mathbf{R}^{\rho}\times\mathcal{Z}_2$, где $\mathcal{Z}_2\subseteq\mathbf{R}^d$ — окрестность точки $Z_2=0$.

Лемма 7. *Пусть:*

1) $F(t,x,y)\in\mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$;

2) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,z}=\rho=\mathrm{const}\quad\forall(t,x,y,\bar{Z}_r)\in\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$;

3) в матрице $\Gamma_{r,x}$ *имеется квадратная порядка* $n(r+1)$ *подматрица* $\Delta_r:\ \exists\Delta_r^{-1}(0)$, *включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}$ *(см. (5.7));*

4) существует непрерывная функция $w(s): I\to I$ *со свойствами (5.5), (5.6) такая, что при любых значениях* $(t,x,y,\bar{Z}_r)\in\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$ *имеют место оценки*

$$l\,(\Delta_r)>0,$$

$$L\left(\frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial t}\ \ \frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial x_1}\ \ \frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial Z_2}\right)\Big/\,l\,(\Delta_r)\le w\,(\|(x_2,y,Z_1)\|)\,.$$

Тогда в области $\mathcal{G}=I\times\mathcal{X}_1\times\mathcal{Z}_2$ *определена единственная неявная функция, обращающая систему (5.2) в тождество на* $\mathcal{G}$ *и имеющая вид*

$$y=f(t,x_1), \tag{5.9}$$

$$x_2 = f_0(t, x_1), \tag{5.10}$$

$$Z_1 = \varphi(t, x_1, Z_2), \tag{5.11}$$

где функции f, f_0, φ имеют на областях определения непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов.

Справедливость леммы непосредственно вытекает из леммы 6 и теоремы о существовании в некоторой окрестности нуля неявной функции вида (5.9)–(5.11), удовлетворяющей продолженной системе (5.2) [5].

Умножим уравнение (5.9) слева на матрицу перестановок строк Q из (5.8). В результате получим систему

$$y_1 = f_1(t, x_1), \tag{5.12}$$

$$y_2 = f_2(t, x_1),$$

где

$$\operatorname{colon}(y_1, y_2) = Qy,$$

$\operatorname{colon}(f_1, f_2) = Qf(t, x_1)$. Размерности векторов y_1 и y_2 совпадают соответственно с размерностями векторов x_1 и x_2 из (5.8).

Полагая $y_1 = x_1'(t)$, $\operatorname{colon}(x_1, x_2) = \operatorname{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$, поставим в соответствие системе (5.12), (5.10) ДАУ (5.3), (5.4).

Построим для (5.1) $(r+1)$-продолженную систему

$$\mathcal{F}_{r+1}(t, x, y, \bar{Z}_{r+1}) = 0. \tag{5.13}$$

Предположим, что выполнено условие 3) леммы 7, и в $n(r+2) \times (n+d)$-матрице $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \end{pmatrix}$ имеется подматрица S размеров $n(r+2) \times n$ такая, что в некоторой области

$$\operatorname{rank} \Gamma_{r+1,z} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & S \end{pmatrix} = \rho + n. \tag{5.14}$$

При этом

$$S = \frac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3}(t, x, y, Z_1, Z_3, Z_4) \tag{5.15}$$

где переменные Z_1, Z_2 определяются из (5.8),

$$\operatorname{colon}(Z_3, Z_4) = Q_2 \operatorname{colon}(Z_2, z_{r+1}),$$

Q_2 — матрица перестановок строк, $Z_3 \in \mathbf{R}^n$, $Z_4 \in \mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_4 \subseteq \mathbf{R}^d$ — окрестность точки $Z_4 = 0$.

Обозначим

$$\Delta_{r+1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial y} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_4} \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. *Пусть:*
1) $F(t,x,y) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$*;*
2) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,z} = \rho = \mathrm{const} \quad \forall (t,x,y,\bar{Z}_r) \in \mathcal{D}\times\mathcal{Z}$*;*
3) в матрице $\Gamma_{r,x}$ *имеется квадратная порядка* $n(r+1)$ *подматрица (5.7), обратимая всюду в области* $\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$*, и включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}$*;*
4) в матрице $\left(\dfrac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2}\ \ \dfrac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}}\right)$ *имеется* $(n(r+2)\times n)$*-подматрица (5.15) такая, что* $\forall(t,x,y,Z_1,Z_3,Z_4) \in \mathcal{H} = \mathcal{D}\times\mathbf{R}^{\rho}\times\mathbf{R}^{n}\times\mathcal{Z}_4$ *имеют место равенства (5.14);*
5) существует непрерывная функция $v(s) : I \to I$ *со свойствами*

$$v(s) > 0, \ \ s \in (0,\infty); \quad \int\limits_1^{\infty} \frac{ds}{v(s)} = \infty,$$

такая, что при любых значениях $(t,x,y,Z_1,Z_3,Z_4) \in \mathcal{H}$ *справедливы оценки*

$$l\left(\Delta_{r+1}\right) > 0,$$

$$L\left(\hat{\Delta}\right)/l\left(\Delta_{r+1}\right) \le v\left(\|(x_2,y,Z_1,Z_3)\|\right).$$

Тогда любое решение системы (5.1) является решением системы (4.15), (4.16) и наоборот. При этом функции f_0 *и* f_1 *в (5.3), (5.4) определены всюду в области* $I\times\mathcal{X}_1$*.*

Доказательство. В предположениях 1)–3) в окрестности нуля определена неявная функция (5.9)–(5.11), обращающая в тождество первые $n(r+1)$ уравнений системы (5.13). Рассмотрим оставшиеся n уравнений

$$F_{r+1}(t,x,y,\bar{Z}_{r+1}) = 0. \tag{5.16}$$

Заметим, что $F_{r+1}(0) = 0$.

Подставим в уравнение (5.16) функции (5.9)–(5.11), в результате получим систему

$$\tilde{F}_{r+1}\left(t,x_1,Z_3,Z_4\right) = 0, \tag{5.17}$$

в которой, в силу предположения 4), матрица $\dfrac{\partial\tilde{F}_{r+1}}{\partial Z_3}$ обратима в некоторой окрестности нуля.

В условиях теоремы для системы (5.17) выполняются все предположения теоремы о неявной функции, согласно которой в некоторой окрестности нуля определена единственная непрерывно дифференцируемая функция

$$Z_3 = \phi_2(t,x_1,Z_4), \tag{5.18}$$

удовлетворяющая уравнению (5.17). Подстановка (5.18) в функцию (5.11) преобразует последнюю к виду

$$Z_1 = \phi_1(t, x_1, Z_4). \tag{5.19}$$

Таким образом, найдена единственная неявная функция (5.9), (5.10), (5.18), (5.19), определенная в некоторой окрестности нуля и имеющая непрерывные частные производные по своим аргументам. Эта функция при подстановке обращает систему (5.13) в тождество.

С другой стороны, в сделанных предположениях для системы (5.13) выполняются все условия леммы 6, в соответствии с утверждением которой в области $\mathcal{H}$ определена единственная непрерывно дифференцируемая неявная функция

$$\operatorname{colon}(x_2, y, Z_1, Z_3) = \Psi(t, x_1, Z_4), \tag{5.20}$$

удовлетворяющая системе (5.13). В силу единственности, эта функция совпадает с неявной функцией (5.9), (5.10), (5.18), (5.19) на области определения последней. Таким образом, неявная функция (5.20) является продолжением функции (5.9), (5.10), (5.18), (5.19) на всю область $\mathcal{H}$. Предположения 3)–5) теоремы гарантируют, что функция (5.20) будет иметь вид (5.9), (5.10), (5.18), (5.19).

Дальнейшее доказательство теоремы дословно повторяет доказательство локальной теоремы существования из работы [5]. □

Зададим начальные условия

$$x(t_0) = x_0, \tag{5.21}$$

где x_0 — заданный вектор из $\mathbf{R}^n$, $t_0 \in I$.

Теорема 5 позволяет получить критерий существования и единственности решения задачи (5.1), (5.21) .

Следствие 1. *Пусть выполнены все предположения теоремы 5. Для того чтобы задача (5.1), (5.21) была разрешима в некоторой окрестности точки t_0 необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$x_2(t_0) = f_0\left(t, x_1(t_0)\right), \tag{5.22}$$

где $\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = Qx_0$ (Q — матрица перестановок из (5.8)). При этом, если решение задачи (5.1), (5.21) существует, то оно единственно.

Справедливость следствия непосредственно вытекает из теоремы 5.

Определение 8. *В условиях теоремы 5 начальные данные (5.21), удовлетворяющие равенству (5.22), будем называть согласованными в точке $t_0 \in I$ с системой (5.1) (кратко, согласованными).*

Определение 9. *Систему (4.15), (4.16) будем называть эквивалентной формой для ДАУ (5.1).*

Пусть

$$A(t) = \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y}(t,0,0), \quad B(t) = \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial x}(t,0,0), \tag{5.23}$$

тогда ДАУ (1.1) являются системой первого приближения для системы (5.1).

Теорема 6. *Пусть:*
1) $F(t,x,y) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$*;*
2) выполнены предположения 2)–5) теоремы 5.

Тогда для системы (5.1) операции линеаризации и перехода к эквивалентной форме перестановочны.

Доказательство фактически повторяет доказательство соответствующей теоремы из статьи [5] с учетом областей определения всех фигурирующих в доказательстве неявных функций.

Теорема 6 утверждает, что система (2.5) является системой первого приближения для ДАУ (5.3), (5.4). При этом для построения системы (2.5) нет необходимости находить неявные функции (5.12), (5.10). Для этого достаточно вычислить коэффициенты оператора (2.2) по формуле (2.4) и затем подействовать этим оператором на систему (1.1).

6. Устойчивость нелинейных систем по первому приближению

Определение 10. *Решение* $x_*(t)$ *ДАУ (5.1) называется устойчивым по Ляпунову (кратко, устойчивым) при* $t \to +\infty$*, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \in I$ *найдется* $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что*
1) при любых согласованных в точке t_0 *начальных данных (5.21) таких, что* $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta_0$*, все решения* $x(t,t_0,x_0)$ *соответствующих задач Коши определены на интервале* $I_0 = [t_0, +\infty)$*;*
2) для этих решений при $t \in I_0$ *справедлива оценка*

$$\|x(t,t_0,x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} < \varepsilon.$$

Определение 11. *Устойчивое решение* $x_*(t)$ *ДАУ (5.1) называется асимптотически устойчивым при* $t \to +\infty$*, если для любого* $t_0 \in I$ *существует* $\delta = \delta(t_0) \in (0, \delta_0)$ *такое, что все решения* $x(t,t_0,x_0)$ *ДАУ (5.1) обладают свойством*

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t,t_0,x_0) - x_*(t)\|_{\mathbf{R}^n} = 0,$$

как только $\|x_0 - x_*(t_0)\|_{\mathbf{R}^n} < \delta$*.*

В сделанных предположениях система (5.1) может быть представлена в виде

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + r(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{6.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ определяются по формулам (5.23), функция $r(t,x,y)$ удовлетворяет условиям малости

$$\lim_{\|x\|,\|y\|\to 0} \frac{r(t,x,y)}{\|x\| + \|y\|} = 0.$$

Предположим, что выполнены все условия теоремы 5. В этом случае ДАУ (5.3), (5.4) представляют собой эквивалентную форму для системы (5.1). Допустим, что в (5.3), (5.4) функции f_1 и f_0 обладают достаточной гладкостью. Поскольку, $f_1(t,0) = 0, \;\; f_0(t,0) = 0 \; \forall t \in I$, система (5.3), (5.4) может быть представлена в виде

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t)) = 0, \tag{6.2}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + r_2(t, x_1(t)) = 0, \tag{6.3}$$

где в условиях теоремы 6

$$\begin{pmatrix} r_2(t,x_1) \\ r_1(t,x_1) \end{pmatrix} = \mathcal{R}\left[r(t,x,x')\right], \tag{6.4}$$

оператор $\mathcal{R}$ (см. (2.2), (2.4)) преобразует систему первого приближения (1.1) в эквивалентную форму (2.5).

Теорема 7. *Пусть:*
1) $F(t,x,y) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$*;*
2) выполнены предположения 2)–5) теоремы 5;
3) существует константа $m > 1$ *и функция* $\mu(t) \in \mathbf{C}(I)$*, имеющая неположительный характеристический показатель, такие что в некоторой окрестности точки* $x_1 = 0$ *функция* $r_1(t,x_1)$ *из (6.4) подчинена условию*

$$\|r_1(t,x_1)\| \le \mu(t)\|x_1\|^m;$$

4) система $x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0$ *правильна и все ее характеристические показатели отрицательны;*
5) в (6.3) J_2 *имеет неположительный характиристичекий показатель и* $\|r_2(t,x_1)\| \to 0$ *при* $\|x_1\| \to 0$.

Тогда тривиальное решение уравнения (6.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. В предположениях 1), 2) справедлива теорема 6, в соответствии с утверждением которой имеет место равенство (6.4). По теореме 5 ДАУ (6.1) и (6.2), (6.3) имеют одни и те же решения.

В условиях 3), 4) для системы (6.2) выполняются все предположения теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [13, с. 351], согласно которой тривиальное решение этого уравнения асимптотически устойчиво, причем решения, начинающиеся вблизи точки $x_1 = 0$, стремятся к нулю экспоненциально.

Предположение 5) гарантирует, что $\|x_2(t)\| \to 0$ при $\|x_1(t)\| \to 0$. Это означает, что тривиальное решение системы (6.2), (6.3) асимптотически устойчиво. Следовательно, тривиальное решение системы (6.1) также будет асимптотически устойчивым. $\square$

Список литературы

1. Brenan K. E. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations / K. E. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold // SIAM. – 1996.
2. Campbell S. L. The index of general nonlinear DAEs / S. L. Campbell, C. W. Gear // Numer. Math. – 1995. – N 72. – P. 173–196.
3. Ascher U. M. Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations / U. M. Ascher, L. R. Petzold // SIAM. – 1998.
4. Campbell S. L. Solvability of general differential algebraic equations / S. L. Campbell, E. Griepentrog // SIAM J. Sci. Stat. Comp. – 1995. – N 16. – P. 257–270.
5. Щеглова А. А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем / А. А. Щеглова // АиТ. – 2008. – № 10. – С. 57–80.
6. Щеглова А. А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / А. А. Щеглова // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 9. – С. 57–70.
7. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука, 1996. – 278 с.
8. Kunkel P. Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination / P. Kunkel, V. Mehrmann // Numer. Math. – 1998. – N 79. – P. 581–600.
9. Чистяков В. Ф. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем / В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова. – Новосибирск : Наука, 2003. – 319 с.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988.
11. Еругин Н.П. Приводимые системы / Н. П. Еругин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1946. – Т. 13.
12. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1967. – 467 с.
13. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И. В. Гайшун. — Минск : Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 1999.
14. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). Ч. 1-2 / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1972. – 624 с.
15. Cristea M. A note on global implicit function theorem / M. Cristea // Journal of inequalities in pure and applied mathematics. – 2007. – Vol. 8, N 4. – Article 100.

A. A. Shcheglova, P. S. Petrenko

Regular systems of differential-algebraic equations

Abstract. We consider linear and nonlinear systems of differential-algebraic equations. The conditions of reducibility and regularity of linear systems are obtained. The theorems connecting these notions are proved. The theorem about stability of nonlinear systems in the first approximation is proved under the conditions of existence of some global structural form. An arbitrary high unsolvability index and variable ranks of Jacobi matrices describing a system are allowed.

Keywords: differential-algebraic equations, reducibility, regularity, stability in the first approximation

Щеглова Алла Аркадьевна, доктор физико-математических наук, зам. директора по научной работе, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел. (3952)453058 (shchegl@icc.ru)

Петренко Павел Сергеевич, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 (petrenko_p@mail.ru)

Shcheglova Alla, Doctor of physical and mathematical sciences, Deputy director for science, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Russia, Irkutsk, Lermontov Str., 134 (shchegl@icc.ru)

Petrenko Pavel Post-graduate student, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Russia, Irkutsk, Lermontov Str., 134 (petrenko_p@mail.ru)