Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 38—47

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

О надструктуре некоторых классов монотонных функций многозначной логики *

В. Б. Ларионов
ООО „Атес Медика Софт“

В. С. Федорова
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

Аннотация. В статье изучаются условия, достаточные для наличия бесконечной надструктуры у некоторых бесконечных семейств классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченное множество с единственным минимальным элементом.

Ключевые слова: многозначная логика; монотонная функция; надструктура; предикат.

Одна из основных задач в многозначной логике связана с выразимостью: заданную многозначную функцию или класс функций требуется представить, используя лишь функции некоторого имеющегося множества. Указанную задачу, несколько уменьшив общность постановки, можно переформулировать в задачу описания решетки замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций многозначной логики. Для двузначной логики (булевых дискретных функций) данная задача была полностью решена Э. Постом [9]. Однако оказалось, что в случае большей значности описать решетку замкнутых относительно операции суперпозиции классов функций невозможно, в частности, по причине континуальности множества ее элементов [8].

В связи с указанными трудностями работы по изучению решетки замкнутых классов функций многозначной логики разделились на два направления. Первое из них — разработка более сильных операторов замыкания, которые позволяли бы сжимать решетку замкнутых классов до счетного или конечного множества, которое уже возможно описать и исследовать. Второе направление — изучение различных под-

* Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг.

множеств решетки замкнутых классов функций многозначной логики. В данной работе рассматривается структура надрешетки некоторых семейств классов монотонных функций.

Одним из авторов было доказано [3, 2], что в случае, когда класс монотонных функций не является предполным, его *надструктура* (то есть множество содержащих его классов) может быть бесконечна. В статье [5] авторами было показано, что такая надструктура может содержать бесконечное число классов, не являющихся предикатно-описуемыми. В [2, 4] были получены критерии наличия бесконечной надструктуры для классов монотонных функций, сохраняющих частично упорядоченные множества с единственным минимальным элементом и двумя или тремя максимальными, а также с двумя минимальными и двумя максимальными элементами. Указанные критерии имеют следующий вид: класс монотонных функций имеет бесконечную надструктуру тогда и только тогда, когда порождающее его частично упорядоченное множество содержит некоторое фиксированное подмножество. Естественным образом возникает вопрос: можно ли придумать подобный критерий для *произвольного* класса монотонных функций.

В данной работе строятся новые классы монотонных функций, обладающие бесконечной надструктурой. При этом частично упорядоченные множества, порождающие указанные классы монотонных функций, образуют бесконечное семейство, элементы которого не удается описать условием наличия в них некоторого конечного подмножества.

Введем необходимые определения. Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение 1. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией k-значной логики ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.*

Будем использовать следующие стандартные обозначения. Множество всех функций k-значной логики обозначим P_k. Для любого подмножества A из P_k через $[A]$ будем обозначать замыкание относительно операции суперпозиции (для функций далее везде будет идти речь именно об этом типе замыкания).

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ из E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка r и записывать $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство $a_i \leqslant_r b_i$.

Определение 2. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной относительно частичного порядка r, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leqslant_r f(\tilde{b})$. Множество всех* *функций из P_k, монотонных относительно r, называется классом монотонных функций M_r.*

Для наглядности везде далее будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k и соответствующий класс обозначать M_H.

Определение 3. *Пусть $p(x_1, \dots, x_m)$ — некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \dots, y_n)$ – функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \dots, y_n)$ сохраняет предикат $p(x_1, \dots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$, $i \in \{1, \dots, n\}$, удовлетворяющих предикату p, набор $\Big(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1m}, \dots, a_{nm})\Big)$ также удовлетворяет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.*

Будем обозначать через $\mathrm{Pol}(p)$ множество всех функций, сохраняющих предикат p. Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = \mathrm{TRUE} \iff x \leqslant_r y$ [7]. Везде далее в выражении "монотонный класс задается предикатом R“ подразумевается именно описанный предикат $R(x, y)$.

Одним из семейств предполных классов функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ (везде далее рассматриваются только такие k) является некоторое подмножество всех классов монотонных функций [10]. Класс M_H является предполным тогда и только тогда, когда ЧУМ H обладает в точности одним максимальным и одним минимальным элементом [6].

На множестве предикатов вводятся следующие операции: отождествление переменных, конъюнкция и добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать его замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [1].

Лемма 1 (**[1]**). *Если $p_1 \in [p_2]$, то $\mathrm{Pol}(p_2) \subseteq \mathrm{Pol}(p_1)$.*

Пусть предикат p задается формулой F над системой $\{R\}$, где R — предикат, задающий класс монотонных функций. Далее будем рассматривать только формулы с вынесенными вперед кванторами существования, поскольку любую формулу можно привести к указанному виду. Сопоставим F ориентированный граф G_F по следующему правилу: между множеством вершин G_F и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом „x“, если переменная x свободная, и „$\exists x$“, если связанная. Данную вершину будем обозначать v_x. В графе G_F есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R(y, x)$.

Далее нам потребуются некоторые свойства предикатов, доказательства которых содержатся в [2]. Обозначим через $\overline{F}$ множество формул над $\{R\}$, графы которых не имеют ориентированных циклов.

Лемма 2 ([2]). *Пусть R — предикат, задающий класс монотонных функций, $p_1, p_2 \in [R]$, $\mathrm{Pol}\, p_1 \subseteq \mathrm{Pol}\, p_2$, предикат p_2 реализуется над $\{R\}$ формулой из $\overline{F}$. Тогда $p_2 \in [p_1]$.*

Определение 4. *Предикат $p(x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 2$, назовем невырожденным, если существует набор $\tilde{a} \in E_k^n$ такой, что $p(\tilde{a}) = \mathrm{FALSE}$, но для любого номера $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует элемент $b_i \in E_k$ такой, что $p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \mathrm{TRUE}$. Одноместный предикат невырожден тогда и только тогда, когда он отличен от тождественно истинного и ложного предикатов. В противном случае предикат назовем вырожденным.*

Лемма 3 ([2]). *Пусть ЧУМ H имеет единственный минимальный элемент, R — предикат, задающий класс монотонных функций M_H. Пусть $p_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, p_l(x_1, \ldots, x_{n_l}) \in [R]$ — невырожденные предикаты местности соответственно $n_1, \ldots, n_l$, задаваемые формулами из $\overline{F}$, $n = \max(n_1, \ldots, n_l)$, $\mathrm{Pol}\, p_i \neq \mathrm{Pol}\, R$. Тогда любой невырожденный предикат p' из множества $[p_1, \ldots, p_l]$ имеет местность $r \leqslant n$.*

Обозначим через H_n' ЧУМ, полученное из n-мерного булева куба B^n выбрасыванием минимального и максимального элементов, через H_n обозначим ЧУМ, полученное из H_n' выбрасыванием всех его максимальных элементов (или иначе, выбрасыванием из B^n верхних двух слоев и минимального элемента). Через L_n обозначим ЧУМ, полученное из H_n' добавлением двух не сравнимых между собой элементов a_1, a_2, которые меньше всех остальных элементов H_n', а также общего минимума a_{min} (см. рисунок 1). Максимальные элементы множества L_n обозначим через $m_1, \ldots, m_n$, все остальные элементы обозначим через a_W, где $W \subseteq \{1, \ldots, n\}$ — множество индексов элементов $m_1, \ldots, m_n$, которые превосходят a_W.

Аналогично, для произвольного ЧУМ L, имеющего n максимальных элементов $s_1, \ldots, s_n$, обозначим через M_W, где $W \subseteq \{1, \ldots, n\}$, множество элементов L, каждый из которых меньше максимумов с индексами из W и только их.

Определение 5. *Будем говорить, что ЧУМ L принадлежит семейству T_n, если L имеет n максимальных и один минимальный элемент и содержит подмножество L_n со следующими условиями:*

1) *для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо: элемент m_i при вложении попадает в множество $M_{\{i\}}$ ЧУМ L;*

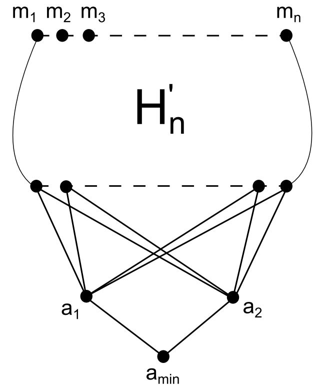

Рис. 1. Частично упорядоченное множество L_n.

2) каждый элемент a_W при вложении попадает в множество M_W ЧУМ L;

3) в ЧУМ L не появляется элемента из множества $M_{\{1,\ldots,n\}}$, который больше элементов a_1, a_2.

Теорема 1. *Для любого числа $n \geqslant 3$ и любого ЧУМ $L \in T_n$ класс монотонных функций M_L обладает бесконечной надструктурой.*

Доказательство. Возьмем любое ЧУМ $L \in T_n$, где $n \geqslant 3$ — произвольное число. Пусть класс M_L задается предикатом R. Введем $(n+2l)$-местные предикаты $p_{n,l}$, задаваемые над $\{R\}$ формулами $F_{n,l}$, граф которых изображен на рисунке 2, где $n \geqslant 3$, $l \geqslant 2$. Чтобы не загромождать рисунок, ориентация ребер не указана; подразумевается, что все ребра направлены сверху вниз. Данный граф будем трактовать как диаграмму Хассе некоторого ЧУМ, поэтому использование в его изображении множества H_n корректно. Для краткости вершины графа будем обозначать символами переменных формулы (везде далее будет оговорено, идет ли речь о вершинах или самих переменных). В графе присутствует $(l-1)$ фрагмент одинаковой структуры $W_1, \ldots, W_{l-1}$, каждый из которых состоит из множества H_n со своими метками вершин и связанной с ним пары переменных. Причем для любого W_i, $i = 1, \ldots, l-1$, множество H_n вместе с вершинами $y_{(i-1)n+1}, \ldots, y_{in}$ или вместе с вершинами $y_{in+1}, \ldots, y_{(i+1)n}$ образует множество H'_n. Вершины x_{n+2i-1}, x_{n+2i} несравнимы и меньше всех остальных элементов W_i. Все переменные x_j, $j = 1, \ldots, n+2l$, и только они являются свободными.

Покажем далее, что предикаты $p_{n,l}$ являются невырожденными. Обозначим $(n+2l)$-местный набор $(m_1, \ldots, m_n, a_1, a_2, a_1, a_2, \ldots, a_1, a_2)$ через $\tilde{a}_{n,l}$.

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 4. $p_{n,l}(\tilde{a}_{n,l}) = \text{FALSE}$.

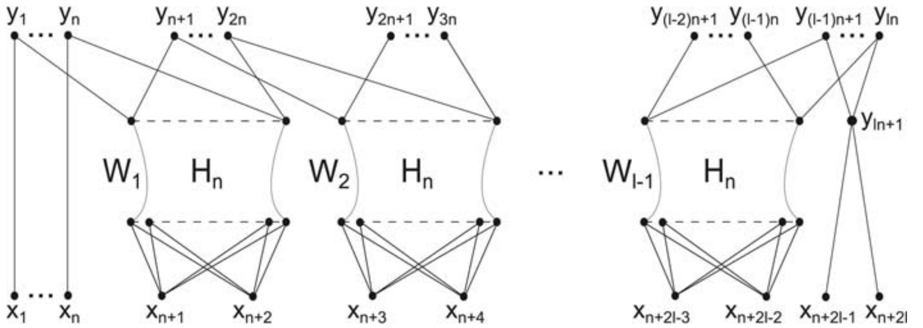

Рис. 2. Граф формулы $F_{n,l}$, задающей предикат $p_{n,l}(x_1, \ldots, x_{n+2l})$.

Доказательство. Будем присваивать значения переменным формулы $F_{n,l}$. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ принимают на наборе $\tilde{a}_{n,l}$ значения соответственно $m_1, \ldots, m_n$. Поскольку указанные значения являются максимальными элементами множества L_n, то в ЧУМ L указанные значения принадлежат соответственно множествам $M_{\{1\}}, \ldots, M_{\{n\}}$, и переменные $y_1, \ldots, y_n$ примут значения соответственно из множеств $M_{\{1\}}, \ldots, M_{\{n\}}$ ЧУМ L. Везде далее в доказательстве, когда речь будет идти о множествах M_W, будут подразумеваться именно множества ЧУМ L.

Рассмотрим далее фрагмент W_1 и покажем, что переменные $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ также примут значения из множеств $M_{\{1\}}, \ldots, M_{\{n\}}$ соответственно.

Рассмотрим множество H_n фрагмента W_1. Обозначим его переменные через y_W, где $W \subseteq \{1, \ldots, n\}$ — множество индексов переменных $y_1, \ldots, y_n$, соответствующие которым элементы W_1 больше элемента y_W. Поскольку переменные x_{n+1}, x_{n+2} принимают на наборе $\tilde{a}_{n,l}$ значения a_1, a_2, то все переменные H_n должны принять значения, большие a_1, a_2. В силу присвоенных переменным $y_1, \ldots, y_n$ значений каждая переменная y_W из H_n должна принять значение из множества $M_{W'}$, где $W \subseteq W'$.

Покажем далее по индукции, что для всех переменных H_n будет справедливо $W = W'$.

Рассмотрим самый нижний слой множества H_n фрагмента W_1. Как было сказано выше, каждая переменная y_{W_i} указанного слоя (здесь множества W_i получаются выбрасыванием одного элемента из множества $\{1, \ldots, n\}$) принимает значение из $M_{W_i'}$, где $W_i \subseteq W_i'$. Получаем, что множество W_i' может либо совпадать с W_i, либо с множеством $\{1, \ldots, n\}$. Но в последнем случае был бы получен элемент, меньший всех максимумов $m_1, \ldots, m_n$ и больший a_1, a_2. По определению семейства T_n такого элемента не существует. Таким образом, для всех переменных y_{W_i} нижнего слоя $W_i' = W_i$.

Пусть равенство $W = W'$ справедливо для всех переменных множества H_n фрагмента W_1 из нижних $(t-1)$ слоев $(t > 2)$. Покажем справедливость для t-го слоя. Предположим, что для некоторой переменной y_W указанного слоя справедливо $W \subset W'$. Не ограничивая общности положим $W = \{1, \dots, n-t\}$. Пусть $b \in W' \setminus W$. Поскольку $t > 2$, найдется элемент c, отличный от $1, \dots, n-t$ и b. Рассмотрим переменную $y_{W \bigcup \{c\}}$. По определению ЧУМ H_n справедливо $y_{W \bigcup \{c\}} \leqslant y_W$ (здесь переменные рассматриваются как элементы ЧУМ). Переменная $y_{W \bigcup \{c\}}$ принадлежит предыдущему слою ($(t-1)$-й, если считать снизу), для которого уже доказано, что $W \bigcup \{c\} = \{1, \dots, n-t, c\}$. Но поскольку $b \in W'$, то переменная y_W принимает некоторое значение, меньшее элемента m_b, следовательно, и переменная $y_{W \bigcup \{c\}}$ принимает значение, меньшее m_b, откуда $b \in W \bigcup \{c\}$. Полученное противоречие доказывает, что $W' = \{1, \dots, n-t\}$.

Итак, было показано, что любая y_W из H_n принимает значение из множества M_W. Поскольку верхний слой H_n состоит из переменных вида $y_{\{i,j\}}$, где $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, получаем, что переменные $y_{n+1}, \dots, y_{2n}$ принимают значения из множеств $M_{\{1\}}, \dots, M_{\{n\}}$ соответственно.

Рассматривая аналогичным образом фрагмент за фрагментом графа формулы $F_{n,l}$, получим, что переменные $y_{(l-1)n+1}, \dots, y_{ln}$ также принимают значения из множеств $M_{\{1\}}, \dots, M_{\{n\}}$ соответственно. Но переменные x_{n+2l-1}, x_{n+2l} принимают на наборе $\tilde{a}_{n,l}$ значения a_1, a_2. Получаем, что для переменной y_{ln+1} требуется значение, меньшее всех максимумов $m_1, \dots, m_n$ и большее элементов a_1, a_2. Но такого элемента в множестве L по определению семейства T_n нет.

Итак, невозможно корректно присвоить значения всем переменным формулы $F_{n,l}$ на наборе $\tilde{a}_{n,l}$. Таким образом, получаем, что $p_{n,l}(\tilde{a}_{n,l}) =$ FALSE.

Лемма доказана. □

Обозначим для любого $i = 1, \dots, n+2l$ через $\tilde{a}^i_{n,l}$ набор длины $n + 2l - 1$, совпадающий с набором $\tilde{a}_{n,l}$ с удаленной i-той компонентой.

Лемма 5. *Для любого $i \in \{1, \dots, n+2l\}$ справедливо*

$$\Big(\exists x_i \, p_{n,l}(x_1, \dots, x_{n+2l})\Big)(\tilde{a}^i_{n,l}) = \mathrm{TRUE}.$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $i \in \{1, \dots, n\}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $i = 1$ (остальные случаи доказываются абсолютно аналогично). По переменной x_1 берется проекция, поэтому ей можно присвоить любое значение. Пусть это будет m_2. Переменные $x_2, \dots, x_n$ примут соответственно значения $m_2, \dots, m_n$. Присвоим переменным $y_1, \dots, y_n$ соответственно значения m_2, m_2, m_3, $\dots$, m_n. Рассмотрим фрагмент W_1. Возьмем произвольную переменную y из множества H_n. Рассматривая граф формулы предиката как ЧУМ, имеем, что элемент y меньше элементов из некоторого подмножества множества $\{y_1, \dots, y_n\}$. Пусть в результате присвоения выше переменные указанного подмножества приняли значения $m_{j_1}, \dots, m_{j_s}$.

Присвоим переменной y значение $a_{\{j_1,\dots,j_s\}}$. В силу определения множества L_n и семейства T_n все указанные значения найдутся и проведенное присвоение корректно. При этом можно присвоить переменным $y_{n+1},\dots,y_n$ значения $m_2, m_2, m_3, \dots, m_n$. Проводя аналогичную процедуру для всех фрагментов, вплоть до W_{l-1}, получим, что переменные $y_{(l-1)n+1},\dots,y_{ln}$ также принимают значения $m_2, m_2, m_3, \dots, m_n$. Переменной y_{ln+1} присвоим значение $a_{\{2,\dots,n\}}$. Данное присвоение корректно, то есть для любого ориентированного ребра (v_y, v_x) графа формулы $F_{n,l}$ вершине v_x присвоено значение, меньше либо равное в смысле отношения R значения из вершины v_y, что и означает истинность предиката $p_{n,l}$ на рассматриваемом наборе.

Пусть теперь $n+1 \leqslant i \leqslant n+2l-2$. Это означает, что в некотором фрагменте W_j, $1 \leqslant j \leqslant l-1$, берется проекция по одной из переменных x_{n+2j-1}, x_{n+2j}. Присвоим указанной переменной значение так, чтобы пара переменных (x_{n+2j-1}, x_{n+2j}) приняла значение (a_s, a_s), где $s=1$ или $s=2$. Во всех фрагментах $W_1,\dots,W_{j-1}$ присвоим значения переменным, как было описано в лемме 4. При этом переменные $y_{(j-1)n+1},\dots,y_{jn}$ примут значения из множеств $M_{\{1\}},\dots,M_{\{n\}}$ соответственно. Всем переменным множества H_n рассматриваемого фрагмента W_j присвоим значения a_s. Всем остальным переменным (фрагменты $W_{j+1},\dots,W_{l-1}$, переменные $y_{(l-1)n+1},\dots,y_{ln+1}$) присвоим значение m_1. Данное присвоение также корректно.

Пусть наконец $i=n+2l-1$ или $i=n+2l$. Возьмем проекцию так, чтобы пара переменных (x_{n+2l-1}, x_{n+2l}) приняла значение (a_s, a_s), где $s=1$ или $s=2$. Переменной y_{ln+1} также присвоим значение a_s. Всем остальным переменным формулы присвоим значения, как это было описано в лемме 4. Данное присвоение также корректно.

Итак, для любого $i \in \{1,\dots,n+2l\}$ на наборе $\tilde{a}_{n,l}$ можно корректно присвоить значения переменным формулы, задающей проекцию предиката $p_{n,l}$ по переменной x_i.

Лемма доказана. □

Из двух доказанных лемм по определению получаем, что предикаты $p_{n,l}$ являются невырожденными. Обозначим классы $A_l = \operatorname{Pol} p_{n,l}$. По лемме 1 все указанные классы содержат класс монотонных функций M_L.

Предположим далее, что для некоторых различных номеров $i, j \geqslant 2$ справедливо $A_i = A_j$. Отметим, что формулы, задающие предикаты $p_{n,l}$, принадлежат семейству $\overline{F}$. В силу леммы 2 из соотношений $\operatorname{Pol} p_{n,i} \subseteq \operatorname{Pol} p_{n,j}$ и $\operatorname{Pol} p_{n,j} \subseteq \operatorname{Pol} p_{n,i}$ следует $p_{n,j} \in [p_{n,i}]$ и $p_{n,i} \in [p_{n,j}]$. Однако, согласно лемме 3, невозможно реализовать невырожденный предикат большей местности невырожденным предикатом меньшей местности. Полученное противоречие доказывает, что все классы

A_l различны и образуют бесконечную надструктуру класса монотонных функций M_L. □

Поскольку класс монотонных функций не меняется при инвертировании порождающего его ЧУМ [6], все доказанные результаты справедливы, если инвертировать исходное ЧУМ L_n, изображенное на рисунке 1.

Таким образом, было получено бесконечное семейство классов монотонных функций, обладающих бесконечной надструктурой. При этом ЧУМ, порождающие указанные классы, из-за особенностей их строения не удается описать простым критерием содержания некоторого фиксированного подмножества. В свете полученных результатов задача нахождения критерия наличия бесконечной надструктуры для произвольных классов монотонных функций представляется достаточно сложной.

Список литературы

1. Теория Галуа для алгебр Поста / В. Г. Боднарчук, В. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. – 1969. – № 3. — С. 1–10; № 5. – С. 1–9.
2. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Б. Ларионов. – 2009. – 157 с.
3. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов / В. Б. Ларионов // Дискрет. математика. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 111–116.
4. Ларионов В. Б. Критерий бесконечности надструктуры некоторых классов монотонных функций многозначной логики / В. Б. Ларионов, В. С. Федорова // Комбинаторные конфигурации и их применения : материалы 12-го межвуз. науч.-практ. семинара. Кировоград, 14–15 окт. 2011 г. – Кировоград, 2011. – С. 80–84.
5. Ларионов В. Б. О сложности надструктуры классов монотонных k-значных функций специального вида / В. Б. Ларионов, В. С. Федорова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 70-79.
6. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках / В. В. Мартынюк // Проблемы кибернетики. Вып. 3. – М. : Наука, 1960. – С. 49–61.
7. Яблонский С. В. Предполные классы в многозначных логиках / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, А. А. Набебин. – М. : Изд. дом МЭИ, 1997. – 144 с.
8. Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // ДАН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
9. Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. Vol. 5. – Princeton : Princeton Univ. Press, 1941. – 122 p.
10. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini / I. G. Rosenberg // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. – 1965. – Vol. 260. – P. 3817–3819.

V. B. Larionov, V. S. Fedorova

On the structure of closed classes containing some classes of monotone functions in multivalued logic

Abstract. We consider closed classes of monotone functions in multivalued logic with respect to partially ordered sets that have a unique minimal element. We build an infinite set of such classes, where each class is contained in an infinite number of closed classes.

Keywords: multivalued logic; monotone function; structure; predicate.

Ларионов Виталий Борисович, кандидат физико-математических наук, ООО "Атес Медика Софт" (`vitalyblarionov@yandex.ru`)

Федорова Валентина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, тел.: (495) 939-53-92 (`fedorovavs@cs.msu.ru`)

Larionov Vitaly, Ates Medica Soft Ltd. (`vitalyblarionov@yandex.ru`)

Fedorova Valentina, Moscow State University, faculty of computational mathematics and cybernetics, 119899, Moscow, Vorobyevy Gory, Moscow state university, faculty of computational mathematics and cybernetics, Phone: (495) 939-53-92 (`fedorovavs@cs.msu.ru`)