Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 26—37

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.145

Полуполевые плоскости четного порядка, допускающие бэровскую инволюцию *

О. В. Кравцова
Сибирский федеральный университет

Аннотация. В статье развивается подход к построению и классификации полуполевых проективных плоскостей с использованием линейного пространства и регулярного множества. Построено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости четного порядка, допускающей бэровскую инволюцию.

Ключевые слова: полуполевая плоскость; регулярное множество; бэровская инволюция; изоморфизм; группа коллинеаций.

1. Введение

Хорошо известна гипотеза [6]: *полная группа автоморфизмов (коллинеаций) всякой полуполевой недезарговой плоскости разрешима.* К настоящему моменту, наряду с построением конечных полуполевых плоскостей, гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей ([5, 3, 2] и др.). Как доказано в [6], гипотеза редуцируется к вопросу о разрешимости группы автотопизмов (см. § 2). В силу теоремы Фейта – Томпсона о разрешимости любой группы нечетного порядка для подтверждения гипотезы достаточно рассматривать только полуполевые плоскости, допускающие автотопизмы порядка 2. Если полуполевая плоскость имеет четный порядок, следует изучить лишь вопрос о существовании бэровских инволюций в группе автотопизмов.

В 90-х годах опубликован ряд работ ([4, 5] и другие), посвященных построению и исследованию полуполевых плоскостей ранга 2, допускающих бэровскую инволюцию. Построения использовали векторное пространство размерности 4 и семейство линейных преобразований – регулярное множество (см. § 2), представленное 2×2-матрицами над

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 12-01-00968.

полем порядка p^n. В этом случае функции, задающие регулярное множество плоскости, есть многочлены степени $\leqslant p^{n-1}$.

Автор рассматривает полуполевую плоскость с использованием произвольных линейных пространств над полем простого порядка, следствием чего является переход к линейным функциям и значительное упрощение всех рассуждений и вычислений.

В работе получено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости произвольного четного порядка 2^N, допускающей бэровскую коллинеацию порядка 2 (Теоремы 2, 3). В качестве иллюстрации выполнено построение полуполевых плоскостей порядка 16, описано строение группы автотопизмов (Теоремы 4–6), доказана разрешимость полной группы коллинеаций (Теорема 7).

2. Основные определения и обозначения

Приведем некоторые основные определения и обозначения, в соответствии с [6, 8].

Определение 1. *Проективной плоскостью π называется множество, состоящее из элементов двух типов: точки и прямые, с отношением инцидентности между ними, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1) любые две различные точки инцидентны с единственной прямой;

2) любые две различные прямые инцидентны с единственной точкой;

3) существуют четыре различные точки такие, что никакие три из них не инцидентны с одной прямой.

Для точек и прямых конечной проективной плоскости можно ввести систему координат с использованием элементов некоторого *координатизирующего множества.* Свойства отношения инцидентности в проективной плоскости позволяют ввести на координатизирующем множестве операции сложения и умножения. Алгебраические свойства координатизирующего множества тесно связаны с геометрическими свойствами соответствующей проективной плоскости. Так, в частности, классическая, или *дезаргова* проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций – квазиполем. Координатизирующее множество полуполевой плоскости – кольцо с делением, или полуполе.

Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^n, p – простое число, W – координатизирующее полуполе.

Определение 2. *Правым, средним и левым ядрами полуполя W называются соответственно подмножества*

$$W_r = \{x \in W | (ab)x = a(bx)\ \forall a, b \in W\},$$
$$W_m = \{x \in W | (ax)b = a(xb)\ \forall a, b \in W\},$$
$$W_l = \{x \in W | (xa)b = x(ab)\ \forall a, b \in W\}.$$

Эти множества являются подполями в W, и известно, что полуполевую плоскость можно рассматривать как линейное пространство над любым из ядер полуполя [6]. Как правило, удобнее использовать левое ядро W_l.

Пусть $|W_l| = p^k$, $n = dk$, тогда аффинным точкам плоскости π соответствуют элементы $2d$-мерного линейного пространства над полем $GF(p^k) = F$:

$$(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_d), \quad x_i, y_i \in F, \quad i = 1, 2, \ldots, d,$$

аффинным прямым – смежные классы по подгруппам

$$V_i = \{(x, x\theta_i) | x \in F^d\}, \quad i = 1, 2, \ldots, p^n,$$
$$V_0 = \{(0, y) | y \in F^d\}.$$

Здесь θ_i – $d \times d$-матрицы с элементами из F, образующие *регулярное множество* R плоскости π (spread set, [8]). Множество R содержит нулевую и единичную матрицы и удовлетворяет условию $det(\theta_i - \theta_j) \neq 0$ для всех $i \neq j$. В частности, все матрицы из R, кроме нулевой, – невырожденные.

Полная группа коллинеаций (автоморфизмов) $Aut\pi$ полуполевой плоскости имеет вид $Aut\pi = T \leftthreetimes G$, где $T = \{\tau_{a,b} | a, b \in F^d\}$ – группа трансляций,

$$\tau_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b), \quad x, y \in F^d,$$

G – *трансляционное дополнение*, стабилизатор точки $(0, 0)$. Автоморфизмы из G задаются полулинейными преобразованиями пространства F^{2d}:

$$\alpha : (x, y) \to (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Здесь σ – автоморфизм поля F, A, B, C, D – матрицы над F размерности $d \times d$ (можно показать, что для любой полуполевой плоскости $C = 0$). Подгруппа G_0 группы G, образованная линейными преобразованиями, называется линейным трансляционным дополнением.

Пусть $[\infty]$ – трансляционная прямая плоскости π, (∞) – трансляционная точка. Подгруппа $\Lambda < G$, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник с вершинами P_1, $P_2 = (\infty)$, $P_3 \in [\infty]$ и сторонами l_1, $l_2 = [\infty]$, $l_3 \ni (\infty)$, называется *группой автотопизмов*. В силу $((\infty), (\infty))$-транзитивности и $([\infty], [\infty])$-транзитивности полуполевой плоскости без ограничения общности можно считать, что $P_1 = (0,0)$, $P_3 = (0)$, $l_1 = [0,0]$, $l_3 = [0]$ (обозначения в соответствии с [6]). Тогда матрицы, соответствующие автотопизмам – блочно-диагональные,

$$(x,y)^\lambda = (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Согласно [6] (с. 174), справедлив результат:

Лемма 1. *Для произвольной собственно полуполевой плоскости P полная группа коллинеаций разрешима в том и только в том случае, когда разрешима групa автотопизмов.*

Далее, если группа автотопизмов Λ имеет нечетный порядок, то она разрешима по теореме Фейта – Томпсона. Поэтому для решения вопроса о разрешимости следует рассматривать лишь полуполевые плоскости, допускающие автотопизмы порядка 2.

В соответствии с классическим результатом о проективных плоскостях [6], коллинеация порядка 2 является либо перспективностью (центральной коллинеацией), либо бэровской коллинеацией.

Определение 3. *Коллинеация проективной плоскости называется центральной, если она фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется элацией, в противном случае – гомологией.*

Определение 4. *Коллинеация проективной плоскости порядка m называется бэровской, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{m}$ (бэровскую подплоскость).*

Доказано [3], что центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы:

1) $H_r \simeq W_r^*$ – группа гомологий с осью $[0,0]$ и центром (∞);
2) $H_l \simeq W_l^*$ – группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$;
3) $H_m \simeq W_m^*$ – группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

Согласно[6] (с. 181), сформулируем следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть D – конечное полуполе. Если плоскость $P(D)$ имеет четный порядок и не содержит бэровских подплоскостей, либо имеет нечетный порядок и размерность D над хотя бы одним из ядер нечетна, то группа автотопизмов D разрешима.*

Таким образом, интересуясь вопросом о разрешимости полной группы коллинеаций недезарговой полуполевой плоскости четного порядка, мы можем рассматривать только лишь те плоскости, группа автотопизмов которых содержит бэровскую инволюцию.

3. Матричное представление регулярного множества

В 1989 году Н. Л. Джонсоном и другими [4] построено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости порядка q^2 над полем четного порядка q, допускающей бэровскую инволюцию в линейном трансляционном дополнении:

Теорема 1. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка q^2, $q = 2^k$, с левым ядром, содержащим $GF(q)$, которая допускает бэровскую инволюцию τ в линейном трансляционном дополнении. Тогда регулярное множество π состоит из матриц вида*

$$\theta(v,u) = \begin{pmatrix} u+v+m(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{pmatrix}, \qquad u,v \in GF(q),$$

где $m(x)$, $f(x)$ – аддитивные функции, f взаимно однозначна, $m(1) = 0$. Бэровская инволюция τ задается матрицей

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим более общий случай: пусть порядок левого ядра менее q, тогда для записи регулярного множества потребуются матрицы порядка более 2. Выберем наиболее удобную форму записи бэровской инволюции τ и построим матричное представление регулярного множества.

Теорема 2. *Полуполевая плоскость π порядка $2^N = 2^{2n}$, допускающая бэровскую инволюцию τ в трансляционном дополнении, может быть задана $4n$-мерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$ так, что*

$$\tau = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где E – единичная $n \times n$-матрица.

Доказательство. Действительно, пусть $|\pi| = 2^N$. Так как τ фиксирует поточечно подплоскость π_0 максимального порядка $|\pi_0| = \sqrt{|\pi|}$, то $N = 2n$ – четное число.

Рассмотрим множество аффинных точек плоскости π как линейное пространство размерности $4n$ над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$W^2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n}, y_1, y_2, \dots, y_{2n}) | x_i, y_i \in \mathbb{Z}_2\},$$
$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) | x_i \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Тогда τ – линейное преобразование пространства W^2, фиксирующее ровно $2n$ одномерных подпространств пространства W^2. Таким образом, жорданова нормальная форма матрицы τ образована $2n$ жордановыми клетками вида $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Покажем, что матрица (3.1) имеет такую же жорданову нормальную форму. Действительно,

$$\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)E & E \\ 0 & (1-\lambda)E \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & E \\ (1-\lambda)^2 E & (1-\lambda)E \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 0 & E \\ (1-\lambda)^2 E & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^2 E \end{pmatrix},$$

поэтому жорданова нормальная форма блока $\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}$ образована n жордановыми клетками размерности 2×2. Таким образом, можно выбрать базис линейного пространства W^2 так, что бэровская инволюция τ задается матрицей 3.1. □

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 полуполевая плоскость π имеет регулярное множество $R \subset GL_{2n}(2) \cup \{0\}$, образованное матрицами вида*
$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} U + V + m(V) + w(V) & f(V) + m(U) \\ V & U + w(V) \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

где $\{U\} = \{V\} = K$ – регулярное множество бэровской подплоскости π_0, фиксируемой инволюцией τ, m, w, f – линейные преобразования пространства $n \times n$-матриц над $\mathbb{Z}_2$, причем для всех $V \in K$

$$w(V) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 0 \;\dots\; 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Матрица регулярного множества полуполевой плоскости π однозначно определяется любой своей строкой, допустим, последней. Остальные строки матрицы являются аддитивными функциями элементов этой строки. Так как $\mathbb{Z}_2$ имеет простой порядок, то эти функции – линейные:

$$\theta(u_{2n,1}, \dots, u_{2n,2n}) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1,2n} \\ u_{21} & \dots & u_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{2n,1} & \dots & u_{2n,2n} \end{pmatrix},$$

где $u_{ij} = q_{ij1} u_{2n,1} + q_{ij2} u_{2n,2} + \dots + q_{ij,2n} u_{2n,2n}$ для $i = 1, 2, \dots, 2n-1$, $j = 1, 2, \dots, 2n$.

Перепишем матрицу в виде

$$\theta(V,U)=\begin{pmatrix} d(U)+h(V) & m(U)+f(V)\\ V+s(U) & U+w(V), \end{pmatrix}$$

разбивая на блоки порядка n. Здесь слагаемые V, $h(V)$, $f(V)$, $w(V)$ содержат линейные функции, зависящие только от $u_{2n,1},\dots,u_{2n,n}$. Остальные слагаемые определяются выбором элементов $u_{2n,2n+1},\dots$, $u_{2n,2n}$. Тогда, очевидно, последняя строка матриц $s(U)$ и $w(V)$ состоит только из нулей.

Выясним, при каких условиях на указанные функции плоскость с регулярным множеством R допускает бэровскую инволюцию τ вида 3.1. Для сокращения записи обозначим $T=\begin{pmatrix} E & E\\ 0 & E\end{pmatrix}$, тогда $\tau=\begin{pmatrix} T & 0\\ 0 & T\end{pmatrix}$.

Так как τ – коллинеация, то для любой матрицы $\theta(V,U)\in R$ произведение $T^{-1}\theta T$ также принадлежит R [7]. Далее, в силу замкнутости множества R по сложению, матрица $T^{-1}\theta(V,U)T+\theta(V,U)$ принадлежит R. Выполняя действия, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} V+s(U) & d(U)+s(U)+U+h(V)+w(V)+V\\ 0 & V+s(U) \end{pmatrix}=\theta(0,V).$$

Отсюда следует, что матрица V для каждой $\theta(V,U)\in R$ – либо нулевая, либо невырожденная, множество всех таких матриц замкнуто по сложению, содержит нулевую и единичную матрицы, поэтому является регулярным множеством полуполевой плоскости порядка 2^n. Легко проверить, что это бэровская подплоскость π_0, фиксируемая инволюцией τ:

$$T^{-1}\theta(0,V)T=\theta(0,V).$$

Обозначим регулярное множество подплоскости π_0 через K. Для всех матриц $U,V\in K$ имеем:

$$s(U)=0,\quad d(U)=U,\quad h(V)=V+m(V)+w(V),$$

причем $m(E)=0$, так как $\theta(0,E)=\begin{pmatrix} E & m(E)\\ 0 & E\end{pmatrix}$ – единичная матрица. Теорема доказана. □

4. Полуполевые плоскости порядка 16

Рассмотрим полуполевую плоскость π порядка 16 как множество векторов 8-мерного линейного пространства над $\mathbb{Z}_2$. Предполагая, что π допускает бэровскую инволюцию τ вида 3.1, запишем регулярное множество плоскости π в виде 3.2, где K – регулярное множество бэровской подплоскости π_0, фиксируемой инволюцией τ. Так как U, V являются 2×2-матрицами над $\mathbb{Z}_2$, то K – поле,

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Поле K является двумерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_2$ с базой $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $K = \{aD + bE | a, b \in \mathbb{Z}_2\}$.

Регулярное множество R плоскости π является 4-мерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_2$, его база состоит из четырех матриц:

$$R_1 = \begin{pmatrix} D + m(D) + w(D) & f(D) \\ D & w(D) \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} E + m(E) + w(E) & f(E) \\ E & w(E) \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} D & m(D) \\ 0 & D \end{pmatrix}, \qquad R_4 = \begin{pmatrix} E & m(E) \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$w(D) = W_1, \quad w(E) = W_2, \quad m(D) = M, \quad f(D) = F_1, \quad f(E) = F_2,$$

тогда для любой матрицы $U = aD + bE \in K$ имеем

$$w(U) = aW_1 + bW_2, \qquad m(U) = aM, \qquad f(U) = aF_1 + bF_2,$$

отметим, что $m(E) = 0$. Регулярное множество R плоскости π запишем в виде

$$R = \{x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 + x_4R_4 | x_i \in \mathbb{Z}_2, \ i = 1, 2, 3, 4\}. \tag{4.1}$$

Исходя из требования невырожденности всех матриц регулярного множества R, кроме нулевой, получим (с использованием компьютера) список возможных вариантов матриц M, F_1, F_2, W_1, W_2, содержащий 224 набора. Таким образом, построено 224 регулярных множества вида 4.1 и, следовательно, 224 полуполевых плоскости порядка 16, допускающих бэровскую инволюцию.

Для дальнейшего исследования и классификации построенных плоскостей найдем левое ядро W_l координатизирующего полуполя W. Построим централизатор регулярного множества R в $GL_4(2) \cup \{0\}$, выбирая матрицы, перестановочные с R_1, R_2, R_3. Непосредственные вычисления показывают, что 8 плоскостей из построенных 224 имеют левое ядро порядка 16, поэтому R является полем, соответствующие плоскости – дезарговы. 72 плоскости имеют левое ядро порядка 4, поэтому изоморфны плоскостям ранга 2 над полем $GF(4)$. Оставшиеся 144 плоскости имеют левое ядро порядка 2, поэтому не могут быть заданы линейным пространством размерности менее 4. Вычисляя порядок правого ядра W_r и среднего ядра W_m, получим аналогичный результат.

Известно [1], что существует ровно одна недезаргова полуполевая плоскость ранга 2 над $GF(4)$, поэтому 72 плоскости, удовлетворяющие условию $|W_l| = |W_r| = |W_m| = 4$, должны быть попарно изоморфны. Как показано в [7], изоморфизм таких плоскостей задается линейным преобразованием 8-мерного линейного пространства:

$$\varphi : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где x, y – векторы 4-мерного пространства, клетки A и B имеют размерность 4×4. Если преобразование φ задает изоморфизм плоскостей с регулярными множествами R и R', то матрицы A и B удовлетворяют условию:

$$\forall \theta \in R \quad A^{-1}\theta B \in R'.$$

Так как обе плоскости допускают бэровскую инволюцию τ вида 3.1, поставим условие $\varphi\tau\varphi^{-1} = \tau$ и зададим преобразование φ матрицей вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Отображения, заданные матрицами вида 4.2, образуют группу порядка 288, действующую на классе полуполевых плоскостей с регулярным множеством вида 3.2. При этом класс построенных плоскостей разбивается на пять непересекающихся орбит:

1) 8 дезарговых плоскостей попарно изоморфны;

2) 144 плоскости с ядром порядка 2 попарно изоморфны;

3) множество из 72 плоскостей с ядром порядка 4 разбивается на 3 класса по 24 попарно изоморфных плоскости.

Для подтверждения изоморфности плоскостей с ядром порядка 4 потребовалось рассмотреть линейные преобразования φ, не перестановочные с бэровской инволюцией τ, отказавшись от условия 4.2. Компьютерный перебор произвольных невырожденных 4×4-матриц A и B показал, что все плоскости с ядром порядка 4 изоморфны между собой.

Таким образом, доказан результат.

Теорема 4. *Существуют ровно три, с точностью до изоморфизма, полуполевые плоскости порядка 16, допускающие бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении. Регулярное множество этих плоскостей имеет вид 4.1 и определяется матрицами M, F_1, F_2, W_1, W_2, приведенными в таблице:*

Плоскость	M	F_1	F_2	W_1	W_2
π_1	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$
π_2	$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$
π_3	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

При этом плоскость π_3 дезаргова, плоскость π_1 имеет ядро порядка 4, плоскость π_2 – ядро порядка 2.

Используя тот же программный аппарат, что и для построения изоморфизмов, найдем группу автотопизмов, централизатор бэровской инволюции τ и общее количество инволюций.

Плоскость	$\lvert W_l\rvert$	$\lvert C_\Lambda(\tau)\rvert$	$\lvert P\rvert$	$\lvert\Lambda\rvert$	Число инволюций в Λ
π_1	4	12	27	108	27
π_2	2	2	1	18	9
π_3	16	36	225	900	25

В этой таблице P – подгруппа в Λ, порожденная перспективностями:

$$P = H_l(H_m \times H_r).$$

Подгруппа P нормальна в группе автотопизмов Λ [6]. Как следует из таблицы, плоскость с ядром порядка 2 не допускает гомологий. Уточняя строение подгрупп автотопизмов для недезарговых плоскостей, сформулируем полученные результаты.

Теорема 5. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка 16 с левым ядром порядка 4, допускающая бэровскую инволюцию τ в трансляционном дополнении. Тогда централизатор τ в группе автотопизмов имеет вид*

$$C_\Lambda(\tau) = (\langle\tau\rangle \times \langle\beta\rangle) \leftthreetimes \langle\alpha\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \leftthreetimes S_3,$$

где $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$, $\beta\alpha = \alpha\beta^2$, $\langle\beta\rangle = H_m$ – группа $((0), [0])$-гомологий.

Теорема 6. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка 16 с левым ядром порядка 2, допускающая бэровскую инволюцию τ в трансляционном дополнении. Тогда $C_\Lambda(\tau) = \langle\tau\rangle$, плоскость не допускает гомологий, группа автотопизмов Λ имеет вид*

$$\Lambda = (\langle\alpha\rangle \times \langle\beta\rangle) \leftthreetimes \langle\tau\rangle,$$

где $|\alpha| = |\beta| = 3$.

Теорема 7. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 16. Тогда полная группа коллинеаций π разрешима.*

5. Заключение

Предложенный автором метод построения полуполевых плоскостей с использованием линейного пространства над полем простого порядка представляется удобным для теоретических исследований и практических вычислений. Этот метод не требует рассмотрения нелинейных функций, полулинейных отображений векторных пространств и упрощает компьютерные расчеты по причине выполнения арифметических операций в кольце вычетов.

Список литературы

1. Кравцова О. В. К вопросу об изоморфизме полуполевых плоскостей / О. В. Кравцова, П. К. Куршакова // Вестн. КГТУ. Мат. методы и моделирование. – Красноярск, 2006. – Вып. 42. – С. 13–19.
2. Левчук В. М. Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников / В. М. Левчук, С. В. Панов, П. К. Штуккерт // Механика и моделирование. – Красноярск : СибГАУ, 2012. – С. 56-70.
3. Подуфалов Н. Д. О полуполевых плоскостях порядка 16^2 / Н. Д. Подуфалов, Б. К. Дураков, О. В. Кравцова, Е. Б. Дураков // Сиб. мат. журн. – 1996. – Т. 37, № 3. – С. 616–623.
4. Biliotti M. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 / M. Biliotti, V. Jha, N. L. Johnson, G. Menichetti // Geom. Dedicata. – 1989. – Vol. 29. – P. 7–43.
5. Huang H. 8 semifield planes of order 8^2 / H. Huang, N. L. Johnson // Discrete Math. – 1990. – Vol. 80, N 1. – P. 69–79.
6. Hughes D. R. Projective planes / D.R. Hughes, F. C. Piper. – Springer-Verlag New-York Inc., 1973. – 324 p.
7. Kravtsova O. V. Some results on isomorphisms of finite semifield planes / O. V. Kravtsova, S. V. Panov, I. V. Shevelyova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics. – Krasnoyarsk, 2013. – Vol. 6, Issue 1. – P. 33–39.
8. Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes / N. D. Podufalov // Contem. Math. – 1992. – Vol. 131, part 1. – P. 697–705.

O. V. Kravtsova

Semifield planes of even order that admit the baer involution

Abstract. The author extend an approach to construct and classify the semifield projective planes using the linear space and spread set. The spread set matrix representation for any semifield plane of even order that admits the baer involution is constructed.

Keywords: semifield plane; spread set; baer involution; isomorphism; collineation group.

Кравцова Ольга Вадимовна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79 тел.: (3912)2062148 (`ol71@bk.ru`)

Kravtsova Olga, Institute of Mathematics and Computr Science, Siberian Federal University, 79, Svobodny, Krasnoyarsk, 660041,
Phone: (3912)2062148 (`ol71@bk.ru`)