Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 48—56

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 510.67

Операторы порождения предпорядков Рудин – Кейслера в классе теорий с континуальным числом типов *

Р. А. Попков
Новосибирский государственный технический университет

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет

Аннотация. Строятся операторы на классе счётных полных теорий с континуальным числом типов, порождающие предпорядки Рудин – Кейслера со всевозможными счётными ограничениями.

Ключевые слова: теория с континуальным числом типов; предпорядок Рудин – Кейслера; оператор порождения.

В книге [1] приведена классификация счётных моделей малых теорий относительно предпорядков Рудин – Кейслера и функций распределения числа предельных моделей. В работе [2] эта классификация обобщена для класса счётных полных теорий с континуальным числом типов. Предпорядки Рудин – Кейслера на множестве типов изоморфизма простых над кортежами моделей теорий T, образующие системы $\mathrm{RK}(T)$ и играющие ключевую роль в классификации, переносятся на предпорядки Рудин – Кейслера на типах из $S(T)$ и образуют системы $\mathrm{RKT}(T)$. Системы $\mathrm{RKT}(T)$ для класса малых теорий изучены в работе [3].

В настоящей работе исследуется возможность порождения систем $\mathrm{RKT}(T)$ для класса теорий с континуальным числом типов: определяются операторы, способные порождать теории со всевозможными счётными ограничениями систем вида $\mathrm{RKT}(T)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00460-а.

Ниже всюду рассматриваются счётные полные теории T с условием $|S(T)| = 2^\omega$. Класс всех таких теорий обозначается через $\mathcal{T}_c$.

Напомним основные определения.

Пусть $p = p(\bar{x})$ и $q = q(\bar{y})$ — типы из $S(T)$. Следуя [1], будем говорить, что тип p *подчиняется* типу q, или p *не превосходит* q *по предпорядку Рудин – Кейслера* и писать $p \leq_{\mathrm{RK}} q$, если любая модель $\mathcal{M} \models T$, реализующая тип q, реализует и тип p.

Если $p \leq_{\mathrm{RK}} q$ и существуют простые модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ над реализациями типов p и q соответственно, то будем также говорить, что модель $\mathcal{M}_p$ *подчиняется* модели $\mathcal{M}_q$, или $\mathcal{M}_p$ *не превосходит модели* $\mathcal{M}_q$ *по предпорядку Рудин – Кейслера* и писать $\mathcal{M}_p \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$.

Если существуют модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, то условие $\mathcal{M}_p \leq_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$ означает, что $\mathcal{M}_q \models p$, т. е. некоторая копия $\mathcal{M}'_p$ модели $\mathcal{M}_p$ является элементарной подсистемой модели $\mathcal{M}_q$: $\mathcal{M}'_p \preceq \mathcal{M}_q$.

Типы p и q называются *взаимоподчиняемыми*, *взаимореализуемыми*, *эквивалентными по Рудин – Кейслеру* или RK-*эквивалентными* (обозначается $p \sim_{\mathrm{RK}} q$), если $p \leq_{\mathrm{RK}} q$ и $q \leq_{\mathrm{RK}} p$. Если $p \sim_{\mathrm{RK}} q$ и существуют модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, то $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ также называются *взаимоподчиняемыми*, *эквивалентными по Рудин – Кейслеру* или RK-*эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M}_p \sim_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$).

Следуя [4], типы p и q называются *сильно взаимоподчиняемыми*, *сильно взаимореализуемыми*, *сильно эквивалентными по Рудин – Кейслеру* или сильно RK-*эквивалентными* (обозначается $p \equiv_{\mathrm{RK}} q$), если для некоторых реализаций $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов p и q соответственно типы $\mathrm{tp}(\bar{b}/\bar{a})$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}/\bar{b})$ являются главными. При этом, если модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ существуют, они также называются *сильно взаимоподчиняемыми*, *сильно эквивалентными по Рудин – Кейслеру* или *сильно* RK-*эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M}_p \equiv_{\mathrm{RK}} \mathcal{M}_q$).

Очевидно, что отношения подчинения суть предпорядки, а отношения (сильной) взаимоподчиняемости являются отношениями эквивалентности. При этом из $p \equiv_{\mathrm{RK}} q$ следует $p \sim_{\mathrm{RK}} q$.

Ясно, что невзаимоподчиняемые модели $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ неизоморфны. Кроме того, как и для малых теорий, неизоморфные модели могут найтись среди взаимоподчиняемых.

Через $\mathrm{RK}(T)$ обозначается множество $\mathbf{P}$ типов изоморфизма моделей $\mathcal{M}_p$, $p \in S(T)$, с отношением подчинения, индуцированным отношением подчинения $\leq_{\mathrm{RK}}$ между моделями $\mathcal{M}_p$: $\mathrm{RK}(T) = \langle \mathbf{P}; \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$. Будем говорить, что типы изоморфизма $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbf{P}$ *взаимоподчиняемы* ($\mathbf{M}_1 \sim_{\mathrm{RK}} \mathbf{M}_2$), если взаимоподчиняемы их представители.

Рассмотрим теперь отношение $\leq_{\mathrm{RK}}$, определённое на множестве $S(T)$ полных типов теории T. Система $\langle S(T); \leq_{\mathrm{RK}} \rangle$ обозначается как $\mathrm{RKT}(T)$.

Высотой (*шириной*) предупорядоченного множества $\langle X;\leq\rangle$ называется супремум мощностей её $\leq$-(анти)цепей, состоящих из попарно не $\sim$-эквивалентных элементов, где $\sim\rightleftharpoons(\leq\cap\geq)$. Напомним [1], что если $a\in X$, то множество $\triangle(a)$ (соответственно $\triangledown(a)$), состоящее из всех элементов x множества X, для которых выполняется $x\leq a$ ($a\leq x$), называется *нижним* (*верхним*) *конусом* элемента a.

Следуя [2] континуальное предупорядоченное направленное вверх множество $\langle X;\leq\rangle$ называется *предмодельным*, если оно имеет:

• счётное число элементов под каждым элементом $a\in X$: $|\triangle(p)|=\omega$;

• лишь счётные классы $\sim$-эквивалентности: $|\triangle(a)\cap\triangledown(a)|=\omega$ для любого элемента $a\in X$);

• счётное или континуальное и при этом совпадающее с X, косчётное или коконтитуальное множество общих элементов над любыми элементами $a_1,\ldots,a_n\in X$: $|\triangledown(a_1)\cap\ldots\cap\triangledown(a_n)|=\omega$, или $|\triangledown(a_1)\cap\ldots\cap\triangledown(a_n)|=2^\omega$ и при этом $\triangledown(a_1)\cap\ldots\cap\triangledown(a_n)=X$, $|X\setminus(\triangledown(a_1)\cap\ldots\cap\triangledown(a_n))|=\omega$ или $|X\setminus(\triangledown(a_1)\cap\ldots\cap\triangledown(a_n))|=2^\omega$;

• счётную высоту.

Предложение 1. [2] *Если $T\in\mathcal{T}_c$, то система* $\mathrm{RKT}(T)$ *предмодельна.*

Мы определим некоторый, достаточно широкий класс предмодельных предупорядоченных множеств $\langle X;\leq\rangle$, которые реализуются в виде $\mathrm{RKT}(T)$. Для этого обогатим системы $\langle X;\leq\rangle$ счётными множествами двухместных предикатов $Q_k^{(2)}$, $k\in\omega$, соответствующих формулам $\varphi(\bar{x},\bar{y})$, которые обеспечивают подчинение одних типов другими. Эти обогащения представляют собой превращение орграфа $\langle X;\leq\rangle$ в помеченный граф.

В первом из предлагаемых ниже двух обогащений раскраски дуг $(p,q)\in<$ предикатами Q_k означают, что при интерпретации элементов p и q в системе $\mathrm{RKT}(T)$ типами $p'(x)$ и $q'(y)$ соответственно формула $Q_k(x,y)$ свидетельствует о подчинении типа p' типу q', т. е. для любой реализации a типа q' формула $Q_k(x,a)$ совместна и $Q_k(x,a)\vdash p'(x)$. Во втором обогащении предполагается, что предикаты Q_k обеспечивают подчинение для некоторых типов p' и q' и при этом, помимо возможного подчинения для каких-то других типов, могут связывать реализации ещё каких-то типов уже без условия подчинения.

Будем говорить, что предмодельное множество $\langle X;\leq\rangle$ обладает *свойством раскраски первого рода* или *свойством квази-типовой раскраски*, если $\langle X;\leq\rangle$ имеет обогащение двухместными предикатами $Q_k^{(2)}$, $k\in\omega$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) тогда и только тогда выполняется $\models Q_k(p,q)$ для некоторого k, когда $p\leq q$;

2) для любого $k \in \omega$ существуют p, q с условием $p \leq q$ и такие, что $\models Q_k(p, q)$;

3) $\models Q_k(p, q) \to \exists^{=1} x Q_k(x, q)$, $p, q \in X$, $k \in \omega$;

4) для любого элемента $p \in X$ и любых $k_1, \ldots, k_n \in \omega$ множество $Q_{k_1}(p, X) \cap \ldots \cap Q_{k_n}(p, X)$ не более чем счётно, или континуально и при этом коконтинуально или не менее чем косчётно.

Предмодельное множество $\langle X; \leq\rangle$ обладает *свойством раскраски второго рода* или *свойством квази-типовой раскраски для реализаций*, если $\langle X; \leq\rangle$ имеет обогащение двухместными предикатами $Q_k^{(2)}$, $k \in \omega$, удовлетворяющими следующим условиям:

1) тогда и только тогда выполняется $\models Q_k(p, q)$ для некоторого k, когда $p \leq q$;

2) если $p \leq q$, то найдётся номер k такой, что $\models Q_k(p, q) \wedge \exists^{=1} x Q_k(x, q)$;

3) для любого $k \in \omega$ существуют p, q с условием $p \leq q$ и такие, что $\models Q_k(p, q) \wedge \exists^{=1} x Q_k(x, q)$;

4) для любого элемента $p \in X$ и любых $k_1, \ldots, k_n \in \omega$ каждое из множеств $Q_{k_1}(p, X) \cap \ldots \cap Q_{k_n}(p, X)$, $Q_{k_1}(X, p) \cap \ldots \cap Q_{k_n}(X, p)$ не более чем счётно, или континуально и при этом коконтинуально или не менее чем косчётно.

Очевидно, что каждая система $\mathrm{RKT}(T)$ (при интерпретации предикатов Q_k формулами, свидетельствующими о подчинении одних типов другим), будучи стоуновским пространством, обладает свойствами раскраски и первого, и второго рода. При этом, в отличие раскрасок первого рода, отражающих лишь подчинение типов (тип p подчиняется типу q, если pQ_kq для некоторого k, и здесь тип p по паре (q, k) определяется однозначно) для раскрасок второго рода каждая формула Q_k, обеспечивая подчинение для некоторой пары (p, q), может также связывать ещё какие-то типы q' с некоторыми непустыми семействами типов $F_{k,q'} = \{p_i \mid i \in I_k\}$ (с условием $p'Q_kq' \Leftrightarrow p' \in F_{k,q'}$), задавая *подчинение* семейства $F_{k,q'}$ типу q'.

Нетрудно заметить, что из подчинения конечного семейства типов F некоторому типу q' следует, что каждый тип из F подчиняется типу q' (достаточно к формуле, обеспечивающей это подчинение, конъюнктивно добавлять формулы, изолирующие типы в семействе F). Если же типу q' подчиняется бесконечное семейство F, то, согласно свойству стоуновского пространства, мы можем лишь гарантировать отделимость любых двух различных типов $p_1, p_2 \in F$ (с помощью формул φ, для которых $\varphi \in p_1$ и $\neg\varphi \in p_2$).

Будем говорить, что предупорядоченное множество $\mathcal{X} = \langle X; \leq, f\rangle$ с раскраской $f\colon < \to \mathcal{P}(\alpha)$ дуг в $\leq$ (α — счётный ординал, каждый элемент которого является индексом или, иначе говоря, цветом k некоторого предиката Q_k) и имеющим свойство раскраски первого (второго) рода является *счётно порождённым* из предупорядоченного множества $\mathcal{X}_0 = \langle X_0; \leq_0, f_0 \rangle$ с раскраской f_0: $<_0 \to \mathcal{P}(\alpha_0)$ дуг в $\leq_0$ и имеющего свойство раскраски первого (второго) рода, если $\mathcal{X} = G^\omega(\mathcal{X}_0)$, т. е. $\mathcal{X}$ получается из $\mathcal{X}_0$ в результате счётного числа применений оператора G такого, что $G(\mathcal{Y}) = \langle G(Y); \leq_{G(\mathcal{Y})}, f_{G(\mathcal{Y})} \rangle$ обладает свойством раскраски первого (второго) рода и для $\mathcal{Y} = \langle Y; \leq_{\mathcal{Y}}, f_{\mathcal{Y}} \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

• каждый элемент $y \in Y$ остаётся фиксированным или заменяется на не более чем счётное (> 1) или континуальное число новых элементов, и таких замен производится не более чем для счётного числа элементов;

• если $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$, y_0 фиксирован, и y_1 фиксирован ($Y_1 = \{y_1\}$) или заменяется на множество Y_1 новых элементов, то $y_0 < y'_1$ и $f_{G(\mathcal{Y})}(y_0, y'_1) \supseteq f_{\mathcal{Y}}(y_0, y_1)$ для любого $y'_1 \in Y_1$;

• если $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$, y_0 заменяется на множество Y_0 новых элементов и y_1 фиксирован ($Y_1 \rightleftharpoons \{y_1\}$) или заменяется на множество Y_1 новых элементов, то для любых $y'_0 \in Y_0$ и $y'_1 \in Y_1$ условие $y'_0 <_{G(\mathcal{Y})} y'_1$ относительно цвета Col в $f_{\mathcal{Y}}(y_0, y_1) \cap f_{G(\mathcal{Y})}(y'_0, y'_1)$ влечёт условие $y_0 <_{\mathcal{Y}} y_1$ относительно цвета Col; при этом, если множество Y_0 конечно, то $\bigcap\limits_{y'_1 \in Y_1} f_{G(\mathcal{Y})}(y'_0, y'_1) \neq \varnothing$;

• для любого $\mathrm{Col} \in \rho_{f_{G(\mathcal{Y})}} \setminus \rho_{f_{\mathcal{Y}}}$ множество $f^{-1}_{G(\mathcal{Y})}(\mathrm{Col})$ не более чем счётно.

Напомним [2], что *оператор континуального разбиения*

$$\mathrm{icp}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, Y, \{R_i^{(2)}\}_{i \in \omega})$$

получает на вход:

1) предикатную алгебраическую систему $\mathcal{A}$;

2) подсистему $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, носитель которой совпадает с бесконечным множеством решений некоторой формулы $\psi(x)$ в системе $\mathcal{A}$, а сама подсистема задаёт единственный неглавный 1-тип $p_\infty(x) \in S(\varnothing)$ и при этом реализующийся в ней;

3) бесконечное множество Y с условием $Y \cap A = \varnothing$;

4) последовательность двухместных предикатных символов $R_i^{(2)}$, $i \in \omega$.

Будем предполагать, что областью определения предикатов R_i является множество A_0, областью значений — множество Y, $\vdash R_i(x, y) \to R_0(x, y)$, $i > 0$. Работа оператора описывается следующими схемами формул:

1) $\forall x \, \exists^\infty y (\mathrm{Col}_0(x) \to R_0(x, y))$;

2) $\forall x, x' \, (\neg(x \approx x') \to \neg\exists y (R_0(x, y) \wedge R_0(x', y)))$, то есть R_0-образы разных элементов из множества решений формулы $\psi(x)$ не пересекают-

ся, и тем самым при помощи формулы $R_0(x,y)$ на множестве Y определяется отношение эквивалентности с бесконечным числом бесконечных классов;

3) $\forall x(\mathrm{Col}_n(x) \to \exists^\infty y(R_0(x,y) \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n} R_i^{\delta_i}(x,y)) \wedge \neg\exists z \bigvee\limits_{i>n} R_i(x,z))$ при всевозможных двоичных наборах $(\delta_1,\ldots,\delta_n)$, то есть для любого элемента $a \in A_0$, имеющего цвет n, при помощи формул $R_n(x,y)$ происходит разбиение множества решений формулы $R_0(a,y)$ на 2^n непересекающихся частей, каждая из которых бесконечна.

Таким образом, с помощью формул $R_n(a,y)$ происходит разбиение множества решений формулы $R_0(a,y)$, где $a \models p_\infty(x)$, на континуум попарно непересекающихся частей. На выход оператора подаётся алгебраическая система с континуумом неглавных типов $\{R_i^{\delta_i}(a,y) \mid i \in \omega \setminus \{0\}\}$, и над типом $p_\infty(x)$ нет простой модели.

Теорема 1. *Для любого конечного предупорядоченного множества* $\mathcal{X}_0 = \langle X_0; \leq_0, f_0\rangle$ *с раскраской* $f_0\colon <_0 \to \mathcal{P}(\alpha_0)$ *и обладающего свойством раскраски первого (второго) рода, а также для любого счётно порождённого предупорядоченного множества* $G^\omega(\mathcal{X}_0)$ *первого (второго) рода существует счётная теория* $T \in \mathcal{T}_c$, *для которой некоторое ограничение системы* $\mathrm{RKT}(T)$, *обогащённое формулами, обеспечивающими подчинение типов и раскраску дуг, изоморфно системе* $G^\omega(\mathcal{X}_0)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала предупорядоченное множество $\langle X_0; \leq_0\rangle$ без раскраски дуг. Обозначим мощность множества X_0 через n и рассмотрим теорию T' одноместных предикатов P_i, $i < n$, образующих разбиение некоторого множества A на непересекающиеся бесконечные множества с раскраской $\mathrm{Col}\colon A \to \omega \cup \{\infty\}$ такой, что для любых $i < n$, $j \in \omega$, существует бесконечно много реализаций каждого из типов $\{\mathrm{Col}_j(x) \wedge P_i(x)\}$, $\{\neg\mathrm{Col}_j(x) \mid j \in \omega\} \cup \{P_i(x)\} = p_i(x)$. Каждое из указанных множеств формул изолирует полный тип. Поставим в соответствие каждому элементу x_i множества X_0 предикат P_i, $i < n$.

Обогатим теорию T' до теории T_0 двухместными предикатами Q^β_{kl}, областью определениях которых будет множество решений формулы $P_k(x)$, а областью значений — множество решений формулы $P_l(x)$, $\beta \in f_0(x_k,x_l)$. Свяжем типы p_k и p_l предикатом Q^β_{kl}, где x_l является покрывающим для x_k в системе $\mathcal{X}_0$, x_l соответствует p_l и x_k соответствует p_k, преобразуя раскраску Col в 1-несущественную Q^β_{kl}-упорядоченную [1, 2]:

1) для любых $i \geq j$ существуют элементы $a,b \in A$ такие, что

$$\models \mathrm{Col}_i(a) \wedge \mathrm{Col}_j(b) \wedge Q^\beta_{kl}(a,b) \wedge P_k(a) \wedge P_l(b);$$

2) если $i < j$, то не существует элементов $a,b \in A$ таких, что

$$\models \mathrm{Col}_i(a) \wedge \mathrm{Col}_j(b) \wedge Q^\beta_{kl}(a,b) \wedge P_k(a) \wedge P_l(b).$$

При этом цвет β берётся тот, которым обладает дуга, связывающая элементы x_l, x_k, соответствующие предикатам P_l и P_k. Если $a \models p_l(y)$, то $Q^{\beta}_{kl}(x,a)$ — изолирующая формула и $Q^{\beta}_{kl}(x,a) \vdash p_k(x)$, и при этом реализации типа p_k не полуизолируют реализации типа p_l. Таким образом на множестве неглавных 1-типов $p_i(x)$, $i \in \omega$, организован предпорядок с раскраской дуг, соответствующий предпорядку $\leq_0$ и раскраске f_0. Обозначим получившуюся структуру через $\mathcal{M}_0$. Положим $T_0 = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_0)$.

Будем далее считать, что оператор G применяется не только к структуре $\mathcal{X}_0$, но и к соответствующей ей структуре $\mathcal{M}_0$. Положим $\mathcal{M}_{i+1} = G(\mathcal{M}_i) = G^i(\mathcal{M}_0)$, $i \in \omega$. Опишем действие оператора на $\mathcal{M}_i$, соответствующее действию на $\mathcal{X}_i = G^i(\mathcal{X}_0)$.

Пусть структура $\mathcal{M}_i$ уже определена. Если элемент $x_l \in X_i$ остаётся фиксированным, то на структуре $\mathcal{M}_i$ относительно этого элемента ничего не изменяется. Пусть элемент $x_l \in X_i$, которому подчинялись какие-то элементы x_{l_s}, меняется на не более чем счётное число, скажем μ, элементов, и элементу x_l соответствует некоторый предикат P_l. Тогда обогатим теорию $T_i = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_i)$ одноместными предикатами R_j, $j \in \mu$, разбивающими множество решений формулы $P_l(y)$ на μ частей так, что на μ бесконечных частей разбивается каждое из множеств решений формул $\mathrm{Col}_j(y) \wedge P_l(y)$, $j \in \omega$. Очевидно, что типы, строго подчиняющиеся типу $p_l(x)$, и раскраска дуг при этом сохраняются.

Пусть элемент $x_l \in X$ меняется на континуальное число элементов и элементу x_l соответствовал предикат P_l. Обогатим теорию T_i счётным числом одноместных предикатов R_j, образующих разбиение каждого из множеств решений формул $\mathrm{Col}_j(y) \wedge P_l(y)$, $j \in \omega$, на континуальное число частей с помощью формул $\bigwedge\limits_{j\in\omega} R_j^{\delta_j}(y)$, где $\delta_j \in \{0,1\}$. Данное действие аналогично действию оператора континуального разбиения. Отличие заключается в том, что на континуум частей разбивается само множество решений $P_l(x)$, а не некоторое связанное с ним множество, не пересекающееся с самой структурой $\mathcal{M}_i$. Очевидно, что типы, строго подчиняющиеся типу $p_l(x)$, остаются подчиняющимися (формулы, осуществляющие подчинение, сохраняются) и раскраска дуг при этом сохраняется. Если произошло разбиение покрывающего элемента на континуальное число типов, то в новые покрывающие входит какое-то счётное число типов, относящихся к рассматриваемой структуре. Ясно, что не все получившиеся неглавные типы реализуются на построенной счётной структуре. Возьмём те, которые реализуются, и поместим в их в искомое ограничение системы $\mathrm{RKT}(T_{i+1})$. Подчинение типов и раскраска дуг при этом так же сохраняется. Остальные условия, накладываемые на оператор G, выполняются по построению системы $\mathcal{M}_i$.

Действительно, пусть элементам $x_k, x_l \in X_i$, $x_k < x_l$, соответствовали неглавные 1-типы p_k и p_l (можно говорить как о предикатах P_k и P_l, так и о типах p_k и p_l, так как эти типы однозначно определяются данными предикатами и наоборот). Тогда после разбиения множества решений типа $p_l(x)$ на части, определяемые множествами решений типов $p_l(x)\cup\{R_j(x)\}$, старые раскрашенные дуги, обеспечивающие подчинение типов, образуют подмножество для множества новых дуг. Если меняется подчиняющийся элемент x_k, то раскраска β дуг из Q^{α}_{kl}, обеспечивающих подчинение, разбивается на “оттенки” β_j, соответствующие R_j, $j \in \mu$. Таким образом, получаем новую структуру $\mathcal{M}_{i+1}$ и теорию $T_{i+1} = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_{i+1})$.

Если хотя бы на одном шаге от T_i к T_{i+1} произошло разбиение на континуум частей, то искомая теория $T \in \mathcal{T}_c$ получается на счётном шаге. Иначе, необходимо обеспечить немалость теории T. Это можно сделать, применив оператор континуального разбиения. В данном случае можно положить $\mathcal{A} = G^{\omega}(\mathcal{M}_0)$, $\mathcal{A}_0 = G^{\omega}(\mathcal{M}_0 \upharpoonright P_0)$. $\square$

Теорема 2. *Для любого счётного ограничения $\langle X;\leq\rangle$ предмодельного множества существует теория $T \in \mathcal{T}_c$, для которой некоторое счётное ограничение системы* $\mathrm{RKT}(T)$ *изоморфно системе $\langle X;\leq\rangle$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы построим систему 1-типов с предпорядком, соответствующее предупорядоченному множеству $\langle X;\leq\rangle$, с той только разницей, что предикатов P_i возьмём счётное число и, соответственно, разбиение множества A произойдёт на счётное число частей. Немалость теории обеспечивается за счёт оператора континуального разбиения. $\square$

В заключение отметим, что отказавшись в определении предмодельного множества от условия счётности множеств $\triangle(p)$, а в определении квази-типовой раскраски — от условий 3 (единственности подчиняемых элементов относительно предикатов Q_k), а также заменив формулы Q_k на типы r, получим более широкий класс предупорядоченных множеств с раскрасками дуг, которые интерпретируют условие *обобщённого* подчинения каждому типу $q(\bar{y})$ семейства множеств типов $\{p(\bar{x}) \mid r(\bar{x},\bar{y})\cup p(\bar{x})\cup q(\bar{y})$ совместно$\}$ относительно типов или семейств типов $r(\bar{x},\bar{y})$. При сохранении вышеупомянутых условий счётности числа шагов построения теории приведённые результаты обобщаются для предупорядоченных множеств с условием обобщённого подчинения.

Список литературы

1. *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 336 с.

2. *Popkov R. A.* Distributions of countable models of complete theories with continuum many types / R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov // arXiv:1210.4043v1 [math.LO]. – 2012. – 30 p.
3. *Sudoplatov S. V.* On Rudin – Keisler preorders in small theories / S. V. Sudoplatov // Algebra and Model Theory 8. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov, S. V. Sudoplatov, and E. I. Timoshenko. – Novosibirsk : NSTU, 2011. – P. 94–102.
4. *Tanović P.* Theories with constants and three countable models / P. Tanović // Archive for Math. Logic. – 2007. – Vol. 46, N 5–6. – P. 517–527.

R. A. Popkov, S. V. Sudoplatov

Operators generating Rudin – Keisler preorders in the class of theories with continuum many types

Abstract. We construct an operator on the class of countable complete theories with continuum many types, generating Rudin – Keisler preorders with arbitrary countable restrictions.

Keywords: theory with continuum many types; Rudin – Keisler Preorder; generating operator.

Попков Роман Андреевич, аспирант, ассистент кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166 (r-popkov@yandex.ru)

Судоплатов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, тел.: (383)3634674; профессор кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166; доцент кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2, тел. (383)3634020 (sudoplat@math.nsc.ru)

Popkov Roman, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, graduate student, assistant, Phone: (383)3461166 (r-popkov@yandex.ru)

Sudoplatov Sergey, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Academician Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, leading researcher, Phone (383)3634674; Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx Avenue, Novosibirsk, 630073, professor, Phone: (383)3461166; Novosibirsk State University, 2, Pirogova street, Novosibirsk, 630090, associate professor, Phone: (383)3634020 (sudoplat@math.nsc.ru)