Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 91—103

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.518

Памяти Юрия Еремеевича Бояринцева

В. Ф. Чистяков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе дан краткий обзор научной и педагогической деятельности советского и российского математика Юрия Еремеевича Бояринцева.

Ключевые слова: уравнения в частных производных; уравнения переноса нейтронов; некорректные задачи; разностные схемы; устойчивость; сингулярные системы; дифференциально-алгебраические уравнения; индекс.

1. Краткая биография

23 ноября 2012 года ушел из жизни известный советский и российский математик Юрий Еремеевич Бояринцев. Юрий Еремеевич родился 12 мая 1933 года в пос. Полевской Свердловской области. В 1951 году он окончил среднюю школу и поступил на физико-математический факультет Уральского государственного университета. Во время учебы в университете Юрий Еремеевич, по его воспоминаниям, специализировался в разделах математики, связанных с теорией групп.

Однако стране требовались специалисты по численным методам решения уравнений в частных производных. Поэтому в числе выпускников, показавших наилучшие успехи в учебе, после окончания университета в 1956 году он был направлен в «почтовый ящик» на Урале. В советское время это было общее название режимных организаций, в которых производились работы по оборонной тематике. Этот «почтовый ящик» сейчас известен во всем мире под названием Всесоюзный научно-исследовательский институт технической физики. Уральский период биографии Юрия Еремеевича связан с работой под руководством одного из крупнейших специалистов по численным методам решения уравнений в частных производных, будущим академиком АН СССР, Николаем Николаевичем Яненко, о котором он тепло отзывался до конца своей жизни.

Для вычислений использовались первые советские электронно-вычислительные машины (ЭВМ). По воспоминаниям Юрия Еремеевича вычисления на первых ЭВМ требовали не только высокой математической культуры, но и таких качеств, как молниеносная реакция, знание наизусть машинных кодов, позволявших при признаках сбоя в расчетах внести коррективы в работу ЭВМ. Несмотря на жесткий контроль выполнения плановых заданий всячески поощрялись занятия научными исследованиями. Естественно, первые работы Бояринцева посвящены теории разностных схем. В числе первых в мире исследователей он изучал устойчивость разностных схем, получаемых при дискретизации уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Итогом этих исследований стала защита в 1966 году кандидатской диссертации «О сходимости разностных схем с переменными коэффициентами». После защиты диссертации Юрия Еремеевича назначают заведующим лабораторией в Вычислительном центре СО АН СССР в Новосибирске.

В 1971 году Юрий Еремеевич переезжает в Иркутск и назначается заведующим кафедрой вычислительной математики в Иркутском государственном университете (ИГУ). Через некоторое время он основывает лабораторию вычислительной математики в Сибирском энергетическом институте (СЭИ) СО АН СССР и параллельно продолжает преподавательскую деятельность в ИГУ в должности доцента.

В 1975 году в рамках СЭИ был создан Отдел теории систем и кибернетики (ОТСК) с целью формирования на его базе самостоятельного научно-исследовательского института с функциями вычислительного центра коллективного пользования. Лаборатория вычислительной математики становится подразделением ОТСК с тем же названием. В 1980 году ОТСК преобразуется в отдельный институт – Иркутский вычислительный центр СО АН СССР, перемеинованный позднее в Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН. Лаборатория вычислительной математики перемеиновывается в лабораторию алгебро-дифференциальных систем.

С переездом в Иркутск Юрий Еремеевич полностью меняет тему исследований. Он начинает изучать сингулярные (вырожденные) системы дифференциальных уравнений с целью построения эффективных численных методов для их решения. Так как отсутствовали конструктивные теоремы существования, параллельно создавалась качественная теория вырожденных систем. Итогом этих исследований стала защита в 1983 году докторской диссертации «Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений».

После защиты докторской диссертации Юрий Еремевич продолжает много и плодотворно трудиться по развитию теории ДАУ и построению численных методов для их решения. В 2002 году он передает руководство лабораторией автору этих строк, переходит на должность главного научного сотрудника и работает в этой должности до самой своей смерти.

2. Работа на Урале и в Новосибирске

Как выше уже говорилось, в этот период своей деятельности Юрий Еремеевич исследует численные методы решения систем дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты исследований разностных схем были опубликованы в Докладах АН СССР [1], [2] и подитожены в развернутой статье [3].

На примере начально-краевой задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\kappa(x,t)\frac{\partial u}{\partial x},\ 0 < \kappa_0 < \kappa(t,x) < \chi < \infty, \tag{2.1}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\kappa(x,t)\right| \le L,\ 0 \le t \le T < \infty,$$

где $\kappa_0,\ \chi,\ L,\ T-$фиксированные константы,

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \psi(x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2.2}$$

демонстрируется общая методика. При определенных условиях на гладкость в области $[0,1]\times[0,T]$ вводится сетка с шагами τ и h. Предполагается, что при измельчении шагов $\tau/h = \xi = const$. Строится разностная схема, допускающая матричное представление

$$(E+\alpha_1 B^{n+1})U^{n+1} + (-2E+\alpha_0 B^n)U^n + (E+\alpha_{-1}B^{n-1})U^{n-1} = 0, \tag{2.3}$$

где $E-$единичная матрица размерности N, $(N+1)h = 1$,

$$B^n = \| -\delta^j_{i-1} r^n_{i-1} + \delta^j_i (r^n_{i-1} + r^n_i) + \delta^j_{i+1} r^n_i \|^N_1,\ 0 \le n\tau \le T,$$

$$r^n_i = \kappa((i+1/2)h, n\tau)\xi^2,$$

δ^j_i-символ Кронекера, U^n – N-мерный вектор-столбец: $U^n = (U^n_i)^N_1$. Матрицей B^n и вектором U^n учтены краевые условия

$$U^n_0 = U^n_{N+1} = 0,\ U^0_i = \varphi(ih),\ U^1_i - U^0_i = \psi(ih).$$

Центральной идеей доказательства устойчивости и сходимости разностных схем является предположение: если оператор перехода устойчив (например, удовлетворяет критерию устойчивости Неймана) на каждом шагу процесса, то и разностная схема устойчива. На основе изучения свойств корней матричного уравнения

$$(E+\alpha_1 B^n)X^2 + (-2E+\alpha_0 B^n)X + (E+\alpha_{-1}B^n) = 0,$$

которое является некоторым аналогом характеристического уравнения, Бояринцевым доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть величина* $z = 4(\alpha_0^2 - 4\alpha_1\alpha_{-1})^{-1}$ *не принадлежит промежутку* $(0, 4R+\varepsilon)$, *где* $R = \sup\{\kappa(x,t)\xi^2,\ x \in [0,1], t \in [0,T]\}$, $\varepsilon > 0$, *и в (3)* $\|U_{1,2}^n\| \le 1 + C\tau,\ C = const.$

Тогда решения U_i^n *из схемы (2.3) сходятся к решению задачи (2.1), (2.2) при стремлении* τ *к нулю.*

Далее показано, что результаты можно распространить на краевые задачи для систем общего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}(-1)^{j-1}\frac{\partial^j}{\partial x_i^j}\kappa_{i,j}(x_1, x_2, \cdots x_m, t)\frac{\partial^j u}{\partial x_i^j},$$

$$0 < \kappa_0 < \kappa_{i,j}(t,x) < \chi < \infty.$$

Второе значительное достижение сввязано с изучением метода сферических гармоник для уравнения переноса нейтронов (статья [4], написанная совместно с О. П. Узнадзе). Уравнение переноса нейтронов записывается в цилиндрической системе координат (r, z, ψ):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (1-\gamma^2)^{1/2}\left(\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\sin\psi}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right) + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \Sigma\varphi -$$

$$-\frac{\Sigma_s}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\psi'\int\limits_{-1}^{1} d\gamma' g(\gamma', \psi' \to \gamma', \psi)\varphi(r, z, t, \gamma', \psi') = S(r, z, t, \gamma, \psi), \qquad (2.4)$$

где обозначения взяты из [5]. Функция $\varphi = \varphi(r, z, t, \gamma, \psi)$ описывает пространственно-угловое распределение в цилиндре D. Предполагается, что в момент $t = 0$ известна функция $s(r, z, \gamma, \psi) = \varphi(r, z, 0, \gamma, \psi)$, а на поверхность цилиндра Γ со стороны вакуума падают нейтроны с распределением $f(\Gamma, \Omega, t)$, $\Omega-$единичный вектор в направлении переноса нейтронов. Для простоты предполагается, что $f \equiv 0$.

Решение и свободный член представляются в виде ряда

$$\varphi(r, z, t, \gamma, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Y_n(r, z, t, \gamma, \psi), \qquad (2.5)$$

$$Y_n(r, z, t, \gamma, \psi) = \sum_{m=0}^{n}\varphi_n^m(r, z, t)P_n^m(\gamma)$$

$$S(r, z, t, \gamma, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)S_n(r, z, t, \gamma, \psi), \qquad (2.6)$$

$$S_n(r, z, t, \gamma, \psi) = \sum_{m=0}^{n}S_n^m(r, z, t)P_n^m(\gamma),$$

где $Y_n,\ S_n$ суть сферические функции, зависящие от $r, z, t,\ P_n^m(\gamma)-$полиномы Лежандра, а индикатриссу рассеяния запишем в виде

$$g(\Omega \to \Omega') = g[(\Omega'\Omega)] = g(\mu_0) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)g_n P_n(\mu_0), \qquad (2.7)$$

где

$$g_n = \int\limits_{-1}^{1} g(\mu_0)P_n(\mu_0)d\mu_0.$$

С учетом соотношений (2.5)-(2.7) и ортогональности полиномов Лежандра, интегральный член в (2.4) приобретает вид

$$\frac{\Sigma_s}{2\pi}\int\limits_0^{\pi} d\psi' \int\limits_{-1}^{1} \gamma' g(\Omega \to \Omega')\varphi(r, z, t, \Omega') = \frac{\Sigma_s}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)Y_n(r, z, t, \gamma, \psi).$$

Таким образом, относительно коэффициентов разложения $\varphi_n^m(r, z, t)$ вместо интегро-дифференциального уравнения получается бесконечная система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \varphi_n^m}{\partial t} + \frac{1}{2r^{(m+1)}}\frac{\partial}{\partial r}r^{m+1}\times$$

$$\times\left[\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2n+1}\varphi_{n+1}^{m+1} + \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{2n+1}\varphi_{n-1}^{m+1}\right] -$$

$$-\frac{(1+\delta_{1,m})r^{m-1}}{2(2n+1)}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{m-1}(\varphi_{n-1}^{m-1} - \varphi_{n-1}^{m-1})\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{n+m+1}{2n+1}\varphi_{n+1}^{m} + \frac{n-m}{2n+1}\varphi_{n-1}^{m}\right] + \Sigma_n\varphi_n^m = S_n^m,$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots;\ m = 0, 1.2, \cdots n, \qquad (2.8)$$

где $\delta_{1,m}-$символ Кронекера, $\Sigma_n = \Sigma - \Sigma_s g_n$.

Если ограничиться конечным числом членов разложения, то получается P_N-приближение сферических гармоник $(n = 0, 1, 2, \cdots, N)$. Чтобы замкнуть задачу к системе (2.8) добавляются начальные граничные условия. Они формируются расщеплением начальных и краевых условий исходной задачи. Доказана соответствующая теорема. Краевая задача для (2.8) решается методом расщепления. Вопрос о сходимости рассмотрен при условиях постоянства шагов дискретизации $\Delta z, \Delta r$ и отношения $\tau/\Delta z,\ \tau/\Delta r$ фиксированы, где $\tau-$шаг дискретизации по времени, все гармоники $\varphi_n^m = 0$ на внешней границе цилиндра, а также при предположении, что решение краевой задачи (2.8) в конечной окрестности цилиндрической оси известно.

Юрий Еремеевич всегда интересовался некорректными задачами. Им выполнена (совместно с В. Г. Васильевым) работа [6] по применению метода квазиобращения к задаче теплопроводности с обратным временем. Рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \tag{2.9}$$

где $a = const > 0,\ T = const > 0$, с начально-краевыми условиями,

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{2.10}$$

Задача (2.9), (2.10) некорректна. Сколь угодно малым возмущениям входных данных могут соответствовать сколь угодно большие возмущения решения. Метод квазиобращения является некоторым методом регуляризации. Исходной задаче в соответствие ставится уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 v}{\partial x^4},\ \alpha > 0,\ (x,t) \in [0,1] \times [0,T], \tag{2.11}$$

с начально-краевыми условиями,

$$v(x,0) = \varphi(x),\ v(0,t) = v(1,t) = 0,\ \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v(1,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{2.12}$$

Известно, что при малом α решения задач (2.9), (2.10) и (2.11), (2.12) близки. Для решения регуляризованной задачи применяется разностная схема

$$\frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = -a^2 \frac{\Delta^2 v_i^{n+1}}{h^2} - \alpha \frac{\Delta^4 v_i^{n+1}}{h^4},$$

где $\Delta v_i^{n+1} = v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}, i = 1, 2, \cdots, N,\ (N+1)h = 1,\ 0 \le n\tau \le T,\ \tau < 4\alpha$,

$$v_i^0 = \varphi(ih),\ v_0^n = v_n^{N+1},\ v_n^{-1} + v_n^1 = v_N^n + v_{N+2}^n.$$

Оценка оператора шага в L_2 имеет вид

$$\|C\| = \max\{M(\tau,k),\ k = 1, 2, \cdots, N\} \le 1 + O(\tau),$$

где

$$M(\tau,k) = \left| 1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} \left(\frac{4\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2} - a^2 \right) \right|^{-1}.$$

Эта оценка говорит о том, что будут накапливаться ошибки округления. Но от этого дефекта можно избавиться.

Теорема 2. *Если* $ha/2\alpha^{1/2} \le 1$, *то*

$$\max\{M(\tau,k),\ a/2\alpha^{1/2} \le k \le N\} < 1.$$

3. Иркутский период

В иркутский период Бояринцев изучает свойства и разрабатывает численные методы решения сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$F(\dot{x}, x, t) = 0,\ t \in T = [\alpha,\ \beta] \subset \mathbf{R}^1, \tag{3.1}$$

где $F : \mathbf{R}^{2n} \times T \to \mathbf{R}^{\nu}$, $\dot{} = d/dt$, $x \equiv x(t)$ – n-мерная искомая вектор-функция, и удовлетворяющие условию

$$\operatorname{rank}(\partial F/\partial \dot{x}) < \min\,(n,\ \nu) \tag{3.2}$$

во всей области определения F. Если $\nu = n$, то условие (3.2) эквивалентно условию $\det(\partial F/\partial \dot{x}) \equiv 0$.

Для обозначения объекта исследования в нашей и зарубежной литературе использовались и другие термины: «вырожденные системы ОДУ» «дескрипторные системы», «алгебро-дифференциальные системы (АДС)», «сингулярные системы», «системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), неразрешенные относительно производных», «вырожденные системы ОДУ» и даже «неявные (implicit) системы ОДУ». В настоящее время термин ДАУ потеснил все другие названия. Это вызвано тем, что в приложениях математическая модель объекта исследования часто имеет вид взаимосвязанных дифференциальных и алгебраических уравнений. В своих работах Бояринцев остановился на термине «АДС».

Интерес к ДАУ и численным методам их решения возник не только как к интересному математическому объекту. Он стимулировался проблемами математического моделирования в прикладных областях, в частности, в теориях электронных схем и электрических цепей, механике и химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике. В начале 70-х годов прошлого века в зарубежной литературе были уже опубликованы работы по применению для численного решения ДАУ разностных методов, основанных на формуле дифференцирования назад (ФДН). Были также опубликованы ряд работ в СССР и за рубежом исследователей в прикладных областях с применением разностных схем, используемых для решения ОДУ в нормальной форме. Но эти работы носили экспериментальный характер. Решали системы вида (3.1) с применением известных разностных схем и получали (не получали) приближение к решению. Положение осложнялось тем, что не существовало конструктивных теорем существования.

Юрий Еремеевич начал исследования с простейшего случая – линейного ДАУ с постоянными коэффициентами

$$F(\dot{x},\ x,\ t) = A\dot{x} + Bx - \psi(t) = 0,\ t \in T, \tag{3.3}$$

и простейшей разностной схемы

$$A\frac{y_{i+1}-y_i}{\tau}+By_{i+1}-\psi(t_{i+1})=0, \qquad (3.4)$$

$$i=0,1,\cdots,\mathcal{N},\ \tau=(\beta-\alpha)/\mathcal{N},\ t_i=\alpha+i\tau,$$

и ее первого «дифференциального приближения», полученного при применении к схеме (3.4) методики из [7]

$$[A+\varepsilon B]\dot{y}_\varepsilon+B(t)y_\varepsilon-\psi(t)=0,\ t\in T,\ \varepsilon>0, \qquad (3.5)$$

где $A,\ B-(n\times n)$-постоянные матрицы, $\psi(t)-$заданная вектор-функция из $\mathbf{C}^n(T)$. Предполагалось, что пучок матриц коэффициентов $\lambda A+B$ регулярен, т.е. существует число λ_0 (в общем случае комплексное) и такое, что det $(\lambda_0 A+B)\neq 0$. Краевые задачи ставились в предельно общем виде. Предполагалось, что на решение системы (3.3) наложено условие в виде интеграла Стильтьеса

$$\int\limits_\alpha^\beta C(s)x(s)d\sigma(s)=a,$$

где $C(s)-(q\times n)$-матрица, $a-$заданный вектор. В частности, в таком виде можно записать любые многоточечные краевые условия.

Выбор был не случайным. Для ДАУ с постоянными матрицами коэффициентов было известно [8], что для любой системы $A\dot{x}+Bx-\psi(t)=0$ с матрицами коэффициентов размерности $(\nu\times n)$ существуют постоянные неособенные матрицы $P,\ Q$ подходящей размерности со свойством

$$P[A\dot{Qy}+BQy-\psi(t)]=$$

$$=\mathrm{diag}\{E_d,N,M,L,0\}\dot{y}+\mathrm{diag}\{J,E_s,M_1,L_1,0\}y-P\psi(t)=0, \qquad (3.6)$$

где $x=Qy,\ E_d,\ E_s-$единичные матрицы размерности d и s соответственно, $M,L-$прямоугольные матрицы полного ранга и подходящей размерности, начиная с некоторого натурального k: $N^k=0$. Выражение

$$P(\lambda A+B)Q=\lambda\mathrm{diag}\{E_d,N,M,L,0\}+\mathrm{diag}\{J,E_s,M_1,L_1,0\}, \qquad (3.7)$$

называется канонической структурой пучка $\lambda A+B$ в смысле Веейрштрасса-Кронекера. Если пучок матриц $\lambda A+B$ регулярен, то правая часть равенства (3.7) имеет вид

$$\lambda\mathrm{diag}\{E_d,N\}+\mathrm{diag}\{J,E_{n-d}\}, \qquad (3.8)$$

и число k называется *индексом* пучка. Иначе говоря формула (3.6) позволяет выписать общее решение ДАУ в конечной форме, сформулировать условия совместности ДАУ и разрешимости начальных и краевых задач.

В работе [9] впервые в известной автору литературе было исследовано влияние структуры пучка матриц коэффициентов $\lambda A+B$ на поведение численных методов и обнаружено интересное явление, возникающее при применении разностных методов для решения ДАУ, названное позже «*пограничным слоем ошибок*». Суть этого явления состоит в том, что в первых точках сетки отклонение разностного приближения (3.4) от решения ДАУ стремится к бесконечности с порядком $O(1/\tau^{k-2})$, при стремлении шага сетки τ к нулю. Здесь k индекс пучка матриц коэффициентов. Статья [9] прояснила ряд принципиальных вопросов и сыграла большую роль в выборе направления исследований всей лаборатории.

В монографии [10] для случая регулярного пучка матриц коэффициентов впервые обоснован «метод возмущения» (3.5). Показано, что «пограничному слою ошибок» соответствует пограничный слой в окрестности $t=\alpha$ вида

$$\|y_\varepsilon(t)-x(t)\|_{C(T)}=O(e^{\frac{t-\alpha}{\varepsilon}}/\varepsilon^{2k-2}),\ t\in T_\varepsilon=[\alpha,\alpha+O(\varepsilon)].$$

и

$$\|y_\varepsilon(t)-x(t)\|_{C(T)}=O(\varepsilon),\ t\notin T_\varepsilon.$$

Практически одновременно были построены общие решения системы (3.1) в конечной форме. Было показано, что

$$x(t)=$$

$$=e^{\lambda_0 t}\left[e^{\tilde{A}^D t}\tilde{A}^D\tilde{A}x(0)+\int\limits_\alpha^t e^{\tilde{A}^D(t-s)}\tilde{A}^D\tilde{\psi}(s)ds+T^{k-1}(E_n-\tilde{A}^D\tilde{A})\tilde{\psi}(t)\right],$$

где $\tilde{A}=(\lambda_0A+B)^{-1}A,\ \tilde{\psi}(t)=e^{-\lambda_0 t}\psi(t),\ T-$оператор действующий на вектор-функцию $\varphi\equiv\varphi(t)$ по правилу

$$T^0\varphi=\varphi,\ T^{-1}=0,T\varphi=\frac{d}{dt}(\tilde{A}\varphi)+(E_n-\tilde{A}^D\tilde{A})\varphi,$$

M^D-матрица Дразина, единственным образом определяемая для произвольной квадратной матрицы M по правилу

$$MM^D=M^DM,\ M^DMM^D=M^D,\ M^DM^{k+1}=M^k$$

где $k-$индекс матрицы M: наименьшее из натуральных чисел, для которого $\operatorname{rank} M^k=\operatorname{rank} M^{k+1}$. Отметим, что индексы матрицы $\tilde{A}$ и пучка $\lambda A+B$ совпадают.

В ходе этих исследований сформировались важнейшие понятия теории ДАУ, такие как *индекс ДАУ, допустимые начальные данные, прстая структура, особые точки* и т.д.

Юрий Еремеевич получил обобщение уравнения Ляпунова.

Лемма 1. *Для того чтобы, все отличные от нуля собственные собственные числа матрицы A имели отрицательную вещественную часть необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$A^*Y + YA = -(A^DA)^*A^DA$$

имело решение Y являющейся эрмитовой матрицей, положительно определенной на образе матрицы A^DA.

На следующем этапе исследований рассматривались линейные системы уравнений с переменными коэффициентами

$$\tilde{\lambda}[A(t)x] + B(t)x = \psi(t),\ t \in T,$$

$$A(t)\tilde{\lambda}x + B(t)x = \psi(t),\ t \in T,$$

где $A(t),\ B(t)$ – $(\nu \times n)$-произвольные матрицы, $\tilde{\lambda}$–скалярный оператор, например, дифференциальный, разностный, интегральный. Были построены общие решения. Техника доказательств очень сложна, выражения очень громоздкие. Поэтому мы не можем привести их здесь. Для желающих ознакомиться наилучшим руководством будет докторская диссертация Бояринцева «Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений», доступ к которой можно получить через Интернет.

Скажем следующее. Кронекерова структура пучка матриц $\lambda A(t) + B(t)$ неинвариантна относительно преобразований, использующих замену переменных в ДАУ. А именно, пусть мы произвели замену $x = Q(t)y$. Структуры пучков

$$\lambda A(t) + B(t),\ \lambda A(t)Q(t) + [B(t) + A(t)\dot{Q}(t)]$$

могут совершенно различаться. Структура общего решения ДАУ для систем с постоянными коэффициентами полностью определяется кронекеровой канонической формой пучка. Бояринцевым были выделены классы ДАУ со свойством *совершенства* и свойством Ω, для которых неособенные преобразования не меняют типа кронекеровой структуры пучка матриц исходной системы. Для ДАУ, обладающих этими свойствами, и их разностных аналогов выписаны формулы общих решений.

В последние годы жизни Юрий Еремеевич много работал над способами вычисления так назваемых базовых матриц $C_0,\ C_1,\ \cdots, C_k$. Любое решение системы (1.3) с регулярным пучком матриц при достаточно гладкой $\psi(t)$при достаточно гладкой $\psi(t)$представимо в виде

$$x(t) = C_0z(t) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{i-1}\psi(t),\ \dot{z}(t) = BC_0z(t) + \psi(t). \tag{3.9}$$

В формуле (3.9) дифференциальный оператор можно заменять на разностный и это свойство можно применять для построения численных методов. Базовые матрицы использовались Бояринцевым для исследования нелинейных ДАУ с выделенной линейной частью

$$A\dot{x} + Bx = \Psi(x, t).$$

Сейчас исследователи в области автоматического регулирования начинают использовать этот аппарат для своих целей.

В заключение параграфа отметим еще одно обстоятельство. В монографиях содержатся результаты исследований самого Бояринцева и других авторов по теории обобщенных обратных матриц (включая матрицу Дразина и ее обобщения). Эти монографии являются хорошим и пока единственным в России введением в этот предмет.

4. Педагогическая деятельность и научное руководство

Юрий Еремеевич был широко эрудированным ученым и прекрасным педагогом. В рамках тематики, начало которой он положил, защищено три докторских и несколько кандидатских диссертаций. Бояринцев задавал общее направление исследований и вмешивался только для того, чтобы поправить или дать консультацию. При чтении лекций Бояринцев очень тщательно подходил к отбору учебного материала. Доказывалось немного теорем, но каждая теорема разбиралась «по косточкам». Автору особенно запомнились лекции посвященные теореме Лакса и критерию Неймана.

В иркутский период научной деятельности Юрий Еремеевич предпочитал публиковать результаты своих исследований в виде монографий, где можно подробно и с большим количеством поучительных примеров изложить материал. Им написано (3 из них в соавторстве) и опубликовано в издательстве «Наука» 7 монографий. Книга [11] переиздана на английском языке [12].

По инициативе и участии Бояринцева на математическом факультете ИГУ читались спецкурсы по новым тогда разделам вычислительной математики. Таисия Ивановна Назаренко прочитала курсы лекций «Интервальный анализ», «Численные методы решения ОДУ типа Адамса». Валентина Никитична Васильева прочитала курсы лекций «Теория сплайнов», «Теория некорреккткных задач», включая метод квазиобращения Лионса. Анатолий Соломонович Апарцин прочитал курсы лекций «Численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода». Сам Юрий Еремеевич Бояринцев читал спецкурс «Теория разностных схем (теорема Лакса и критерий устойчивости Неймана, численное решение ДАУ)». Лекции оказались настолько увлекательными, что автор этих строк решил специализироваться в этой области математики и стал доктором физико-математических наук. Некотрые курсы были настолько полными, что вполне заслуживали издания в виде отдельной книги.

Заканчивая этот обзор, скажем о прекрасных человеческих качествах Юрия Еремеевича Бояринцева. За тридцать пять лет работы, теснейшим образом общаясь с ним, автор ни разу (ни разу!) не слышал грубого слова. Неизменно выдержанный, вежливый, строго одетый, внимательный Юрий Еремеевич был образцом русского интеллигента. Математика была для него жизнью. Автору известно только одно нематематическое увлечение Юрия Еремеевича: классическая музыка. Он был тонким ее ценителем.

Список литературы

1. Janenko N. N. Convergence of difference schemes for the heat equation with variable coefficients / N. N. Janenko, Ju. E. Bojarincev (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1961. – Vol. 139. – P. 1322–1324.
2. Bojarincev Ju. E. On convergence of difference schemes for the waveequation with variable coefficients / Ju. E. Bojarincev (Russian) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1965. – Vol. 165. – P. 474–475.
3. Бояринцев Ю. Е. О сходимости разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами / Ю. Е. Бояринцев // Тр. МИАН СССР. – 1966. – Т. 74. – С. 16–37
4. Бояринцев Ю. Е. Об одном способе решения нестационарного уравнения переноса / Ю. Е. Бояринцев, О. П. Узнадзе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 6. С. 1406–1413.
5. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов / Г. И. Марчук. – М. : Гос. изд-во лит. в обл. атом. науки и техники. – 666 с.
6. Бояринцев Ю. Е. Об устойчивости метода квазиобращения при решении некорректных эволюционных уравнений / Ю. Е. Бояринцев, В. Г. Васильев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 9:4 (1969). С. 951–952.
7. Шокин Ю. И. О связи корректности первых дифференциальных приближений и устойчивости разностных схем для гиперболических систем уравнений / Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко // Мат. заметки. – 1968. – Т. 4, № 5. – С. 493–502.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 575 с.
9. Бояринцев Ю. Е. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев, В. М. Корсуков // Вопросы прикладной математики. – Иркутск : Изд. СЭИ СО АН СССР, 1975.
10. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.
11. Бояринцев Ю. Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1988. – 158 с.
12. Boyarintsev Y. Methods of solving singular systems of ordinary differential equations / Yuri Boyarintsev ; Translated from the 1988 Russian original by Vassily Michalkowski. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 1992. – 163 p.

13. Численные методы решения сингулярных систем / Ю. Е. Бояринцев, В. А. Данилов, А. А. Логинов, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука. Сиб. отделение, 1989. – 261 с.
14. Бояринцев Ю. Е. Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1996. – 261 с.
15. Бояринцев Ю. Е. Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования / Ю. Е. Бояринцев, В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука, 1998. – 224 с.
16. Бояринцев Ю. Е. Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 2000. – 222 с.
17. Бояринцев Ю. Е. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы / Ю. Е. Бояринцев, И. В. Орлова. – Новосибирск : Наука, 2006. – 124 с.

V. F. Chistyakov

In the memory of Bojarintsev Yuriy Yeremeyevich

Keywords: partial differential equations, neutron transport equation, ill-posed problems, difference schemes, stability, singular systems, differential algebraic equations, index.

Abstract. In this paper we give a brief review of the scientific work by Soviet and Russian mathematician Bojarintsev Yuriy Yeremeyevich.

Чистяков Виктор Филимонович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, chist@icc.ru

Chistyakov Viktor Filimonovich, Doctor of Sciences, chief research fellow, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS