Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 2. С. 57—68

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК (Классификация по AMS:) 91A13, 91A44, 91, 90, 06, 52

Миграционно-устойчивая организация одномерного мира: теорема существования решения *

А. В. Савватеев
Российская экономическая школа; ЦЭМИ РАН; МФТИ; Яндекс (Москва); ОРЭСП ИНЦ СО РАН; ИМЭИ ИГУ; ИрГТУ (Иркутск)

Аннотация. В работе рассматривается одномерный вариант задачи о размещении мощностей (Uncapacitated Facility Location Problem) с позиций устойчивости относительно угрозы теоретико-игровой природы, а именно *миграционной угрозы устойчивости.* Доказана теорема существования разбиения на предписанное число групп, устойчивого в указанном смысле слова, для любого одномерного расселения участников конфликта. Для получения доказательства применена лемма Никайдо – Гейла – Дебрэ.

Ключевые слова: задача многомерного размещения; групповые структуры; континуальная (неатомарная) игра; миграционная устойчивость (устойчивость по Нэшу); лемма Накайдо – Гейла – Дебрэ.

1. Введение

Статья посвящена анализу угроз теоретико-игровой природы, которые возникают в следующей задаче, называемой задачей о размещении неограниченных мощностей (ЗРНМ в дальнейшем):

Имеется множество потенциальных мест открытия мощностей, призванных удовлетворять некий специфический спрос со стороны множества индивидов. Стоимость открытия мощности не зависит от места. Мощности эти имеют вид чистого общественного блага, т. е. любая из них способна полностью удовлетворить спрос всех людей.

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 120600280А. Автор благодарит Шломо Вебера за многолетнее сотрудничество и плодотворное обсуждение данной работы.

В то же время, существуют затраты прикрепления людей к мощностям, заданные в виде матрицы затрат. Требуется выбрать места для открытия мощностей, а также приписать к ним пользователей минимальным по суммарной стоимости образом.

Идейное наполнение матрицы затрат прикрепления людей к мощностям зависит от рассматриваемого приложения ЗРНМ (которых имеется достаточно большое количество), и может меняться от географических расстояний и издержек перемещения до индивидуальных преференций относительно того, в какой из мощностей спрос может быть удовлетворён более качественно, с точки зрения данного потребителя.

Приведём примеры ЗРНМ: задача оптимального размещения сети центров обслуживания; задача оптимальной композиции парламента (т. е. выбора количества партий и их политических программ); задача о формировании юрисдикций и городских округов. "Двумерная" ЗРНМ подробно изучалась в работах классической немецкой школы пространственного размещения, например, [14], [21].

Синонимом для ЗРНМ является *задача формирования групп*, если для каждой открытой мощности выделить группу её пользователей. В то же время в западной литературе по теории исследования операций ЗРНМ известна как UFLP — Uncapacitated Facility Location Problem, [15].

В настоящей работе ЗРНМ рассмотрена "под теоретико-игровым углом": в любом предлагаемом решении (то есть разбиении на группы), причём как доставляющем максимум ЗРНМ, так и любом допустимом, могут быть недовольные — как отдельные люди, так и целые коалиции. Анализ индивидуальных угроз устойчивости групповых структур и составляет содержание настоящей работы. Анализу коллективных угроз в ЗРНМ посвящены, например, работы [10], [11], [12], [6], [17], [18], [19], [16].

Смежными вопросами в теории формирования групп занимались авторы статей [2], [3]. В них рассмотрена концепция "равновесия по Нэшу, устойчивого к расколу", а также получены определённые частные результаты существования и характеризации. В работе [25] доказана теорема существования миграционно устойчивого разбиения для случая более сложного конфликта, но в ситуации равномерного расселения на отрезке. Работа [20] также посвящена нахождению миграционно устойчивых разбиений — при несколько иных предположениях.

Непосредственно примыкающей к настоящей статье работой является [8], в которой тоже в рамках простейшего континуального варианта ЗРНМ (равномерное расселение на отрезке) впервые предъявлен ряд требований к устойчивости оптимального и иных решений — требований, носящих теоретико-игровой характер.

Их реализация в предположении о равномерном расселении математически тривиальна, и устойчивое разбиение на "страны" всегда существует, в каком бы смысле, кооперативном или индивидуальном, угрозы ни понимались бы. В то же время, в работе [13] выявлены миграционно устойчивые разбиения на неравные группы в случае равномерного расселения.

Индивидуальная, или миграционная угроза устойчивости означает, что ни один участник ни одной группы не хочет стать членом другой группы (его суммарные издержки в его группе не выше, чем при его попадании в любую другую). Данное понятие устойчивости является частным случаем равновесия по Нэшу в игре, где люди выбирают себе группы (и в равновесии каждый выберет «свою» группу).

В настоящей работе требование *миграционной* устойчивости анализируется на основе обобщения модели А. Алесины и Э. Сполаоре. А именно, искусственное предположение о равномерности расселения снимается. Оказывается, что при сохранении одномерности мира, по-прежнему обеспечено существование миграционно устойчивого решения задачи.

Что же касается общего результата существования коалиционно устойчивого решения для одномерного расселения, то на сегодня он установлен для монотонной плотности в [5]. В то же время, для произвольного расселения на прямой известен контрпример [23]. В целом, данное направление призвано формализовать социально-экономические прозрения великой статьи [24].

2. Постановка задачи: ЗРНМ

Рассмотрим неатомическую игру [1], состоящую из континуума игроков общей массы 1, расселённых по отрезку $[0,1]$ с заданной положительной и отделённой от нуля плотностью $f(\cdot)$.[1] В дальнейшем всюду будем отождествлять игрока с его адресом проживания, $x \in [0,1]$. Кумулятивная функция распределения для плотности $f(\cdot)$ будет обозначаться за $F(\cdot)$. Массу любого измеримого подмножества $S \subset [0,1]$ будем обозначать за $|S| = \int_S f(x)dx$. Если S — отрезок, $S = [a,b]$, то $|S| = F(b) - F(a)$.

Каждый житель[2] отрезка должен быть приписан к определённому пункту удовлетворения фиксированного, неэластичного спроса. Всего пунктов обеспечения спроса планируется открыть $n > 0$, фиксированное и заданное число. Более того, рассматривается только случай $n > 1$, ибо при $n = 1$ невозможно поставить вопрос о миграционной устойчивости.

[1] Отделённость от нуля означает существование такого $\varepsilon > 0$, что для любого $x \in [0,1]$ выполнено неравенство $f(x) \geq \varepsilon$.

[2] Термины “игрок”, “житель”, “агент”, “потребитель” и “резидент” используются в работе синонимично.

Стоимость открытия любого пункта не зависит от адреса и равна g.

Стандартная постановка ЗРНМ в нашем случае будет выглядеть следующим образом (памятуя о том, что число групп разбиения задано и равно n):

$$\begin{array}{c} Min\left\{gn + \int_0^1 |x - m_{h(x)}|f(x)dx\right\}, \\ \{\{m_1,\ldots,m_n\}; h:[0,1]\to\{1,\ldots,n\}\}, \end{array} \tag{2.1}$$

где при нахождении минимума перебираются все наборы из n точек отрезка, а также все измеримые отображения $h(\cdot)$.

Иными словами, нужно выбрать места открытия мощностей $m_1, \ldots, m_n$, а также способ прикрепления каждого жителя к одному из мест, оптимальным по общей стоимости образом. Будем всегда считать в дальнейшем, что $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ (легко показать, что в оптимуме никогда не будет совпадения двух или более мест открытия мощностей). В качестве матрицы стоимости прикрепления потребителей к пунктам доступа в нашем случае берётся просто матрица попарных расстояний: $c_{xy} = |x - y|$, если житель x приписан к мощности, открытой в точке y.

В любом решении задачи (2.1) имеет место два наблюдения.

Во-первых, группа игроков, прикреплённых к одному и тому же пункту m_l, является интервалом (одномерной "ячейкой Вороного" для сетки $\{m_l\}_{l=1,\ldots,n}$)

$$S_l := \{x \in [0,1] \mid |x - m_l| \le |x - m_q| \ \forall q = 1,\ldots,n.\} \tag{2.2}$$

В частности, очевидно, что $S_l = [a_{l-1}, a_l]$ — интервал, причём для всех $1 < l \le n$ имеем $|a_{l-1} - m_{l-1}| = |a_{l-1} - m_l|$, иными словами, середины между пунктами открытия мощностей служат внутренними границами групп. Положим в работе $a_0 = 0,\ a_n = 1$.

Во-вторых, и это самое важное, каждая точка m_l является *медианой* своего отрезка-группы $S_l = [a_{l-1}, a_l]$:

$$F(m_l) - F(a_{l-1}) = F(a_l) - F(m_l) = \frac{s_l}{2}, \tag{2.3}$$

где $s_l = |S_l| = F(a_l) - F(a_{l-1}) = \int\limits_{a_{l-1}}^{a_l} f(x)dx$.

Оба наблюдения практически очевидны, и мы не останавливаемся здесь на их строгих доказательствах

В силу того же предположения, медианная точка любой интервальной группы единственна. Тем не менее, полезно отдельно сформулировать в нашей ситуации аналог *задачи Штейнера* (см. [4], стр. 382): задачу поиска медианы любой вообще интервальной *коалиции*[3] $S =$

[3] Коалицией называется произвольное измеримое подмножество отрезка $[0,1]$, имеющее строго положительную меру. Интервальная коалиция — это коалиция, являющаяся отрезком. Как правило, коалиции рассматривают с точностью до меры нуль, поэтому неважно, интервал это или (полу)замкнутый отрезок.

$[a, b] \subset [0, 1]$:

$$c[S] = \frac{\min_m \left\{ g + \int_a^b |x - m| f(x) dx \right\}}{|S|}. \tag{2.4}$$

Единственное решение этой задачи — медиана коалиции S – обозначается за $m[S]$. Именно в этой точке будет открыт пункт доступа для жителей коалиции S, если они будут самостоятельно решать задачу поставки общественного блага и постараются минимизировать суммарные издержки прикрепления.[4]

Соображения, приведённые выше, означают, что ЗРНМ допускает эквивалентную переформулировку в следующем виде:

$$\begin{gathered} Min \left\{ \sum_{l=1}^{n} s_l c[S_l] \right\}, \\ \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1\}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\forall l = 1, \dots, n$ имеем $S_l = [a_{l-1}, a_l]$, за s_l обозначена масса $|S_l|$ группы S_l, а минимум берётся по всем наборам упорядоченных границ будущих групп разбиения.

3. ЗРНМ: миграционная устойчивость

Теперь мы переходим от оптимизации в ЗРНМ к вопросам устойчивости разбиений по отношению к миграционной (теоретико-игровой) угрозе.

Для того, чтобы сформулировать соответствующее понятие, примем следующее предположение: если житель x принадлежит группе S, то он несёт издержки (плата за благо) в размере

$$c(x, S) = \frac{g}{|S|} + |x - m[S]|. \tag{3.1}$$

В формулу (3.1) аддитивно входят две компоненты. Первая из них означает, что издержки на обеспечение пунктом доступа делятся поровну между всеми членами группы; вторая компонента говорит о том, что каждый сам несёт свои издержки прикрепления к пункту. Если нет возможности дискриминировать жителей по параметру их адреса проживания, то такая функциональная форма издержек является единственно допустимой (реализуемой).

Соответственно, при смене группы меняются обе компоненты формулы.

Введём формально понятие допустимого решения рассматриваемого конфликта в форме разбиения на группы.

[4] Более того, в одномерной постановке к тому же решению приведёт и принцип голосования большинством, см. [9].

Определение 1. *Интервальное разбиение* $\pi = \{S_l\}_{l=1,\ldots,n}$ *отрезка* $[0,1]$ *— это набор из* n *интервальных коалиций* $\pi = \{S_1, \ldots, S_n\}$*, пересекающихся друг с другом только по краям и в объединении дающих целый отрезок* $[0,1]$.

Задать разбиение — означает задать границы интервалов $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$: тогда $S_l = [a_{l-1}, a_l]$. Мы так и будем отождествлять: $\pi = \{a_1, \ldots, a_{l-1}\}$.

Определение 2. *Разбиение* π *называется* миграционно устойчивым*, если для любого участника* $x \in S_k$ *любой группы* $k = 1, \ldots, n$ *его перемещение в любую другую группу* $l \neq k$ *не может повлечь снижения издержек:*

$$c(x, S_l) = \frac{g}{|S_l|} + |x - m_l| \geq \frac{g}{|S_k|} + |x - m_k| = c(x, S_k), \tag{3.2}$$

где $m_l = c[S_l]$ *и* $m_k = c[S_k]$.

Отсюда немедленно следует, что участники, живущие на границе двух групп разбиения, несут одинаковые издержки в обеих группах.[5] Более того, это условие является также и достаточным для устойчивости:

Лемма 1. *Разбиение* π *является миграционно устойчивым в том и только том случае, когда для любого пограничного жителя* $x = a_l$, $l = 1, \ldots, n-1$*, выполнено равенство*

$$c(x, S_l) = c(x, S_{l+1}). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пускай наше интервальное разбиение π удовлетворяет (3.3). Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: "сквозная" функция издержек $\tilde{c}(\cdot)$, заданная посредством формулы

$$\forall x \in [0,1] \quad \tilde{c}(x) = c(x, S_l), \tag{3.4}$$

где l таково, что $x \in [a_{l-1}, a_l]$, непрерывна (или что то же самое в данном случае, корректно определена на границах между интервалами).

Так как внутри каждой группы функция $c(x, S_l)$ является, согласно формуле (3.1), кусочно-линейной "птичкой" с наклоном обоих склонов, равным единице, то из нижеприведённой иллюстрации утверждение Леммы следует очевидно-наглядным образом. □

[5] И поэтому неважно, куда их приписать, если таки кому-то приспичит строго разбить множество участников на непересекающиеся, и поэтому незамкнутые, группы-полуинтервалы.

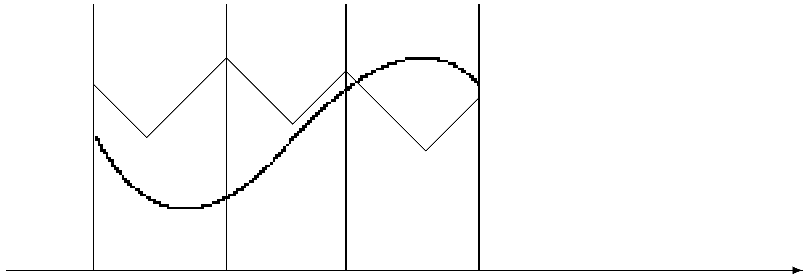

Рис. 1. Геометрическое доказательство Леммы 1.

На рисунке мы видим пример миграционно устойчивого разбиения нашего “мира” на три группы. Кривая линия обозначает плотность расселения жителей, а три “галочки” выражают функции издержек жителей, соответственно, первой, второй и третьей групп. Совпадение функций издержек на краях, очевидно, влечёт несуществование таких жителей, которые хотели бы сменить группу: мысленное продолжение модулеобразного графика функции издержек любой из трёх групп за пределы её границ лежит выше двух других графиков.

4. Доказательство основной теоремы

Теорема 1. *Пускай расселение игроков задаётся распределением $F(\cdot)$, допускающим непрерывную и отделённую от нуля плотснотъ $f(\cdot)$. Тогда при любом $n \geq 2$ существует интервальное разбиение π, являющееся миграционно устойчивым.*

Доказательство. В силу анализа, проведённого в предыдущих двух разделах, нашей целью при каждом n является нахождение интервального разбиения

$$N = [a_0, a_1) \sqcup [a_1, a_2) \sqcup \cdots \sqcup [a_{n-1}, a_n], \tag{4.1}$$

удовлетворяющего свойству (3.3) при каждом $l = 1, \ldots, n-1$, где точки $m_1, \ldots, m_n$ определяются посредством (2.4) как решения соответствующих задач внутригрупповой оптимизации.

Обозначим, как и выше, за s_l массу l-й группы и отметим, что между пространством наборов ненулевых масс $(s_1, \ldots, s_n)$ таких, что $\sum_{l=1}^{n} s_l = 1$ и пространством граничных наборов точек

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$$

существует взаимно-однозначное и взаимно непрерывное соответствие, что следует напрямую из свойств непрерывности и отделённости от нуля функции плотности, $f(\cdot)$.

Тем самым поиск разбиения эквивалентен поиску *набора масс групп* разбиения, а само пространство всех (упорядоченных) n-разбиений есть внутренность симплекса.

Введём ещё набор вспомогательных обозначений, подготовительных для доказательства основной теоремы статьи. А именно, обозначим величину издержек краевых левого и правого жителей группы l, где $l = 1, \ldots, n$, за c_{lL} и c_{lR}, соответственно. Формально:

$$c_{lL} = c(a_{l-1}, S_l); \quad c_{lR} = c(a_l, S_l). \tag{4.2}$$

Теперь мы сконструируем следующую вектор-функцию, Ψ, определённую на внутренности $(n-1)$-мерного симплекса Δ_n и отображающую эту внутренность в $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{gathered}\Psi(s_1, \ldots, s_n) = \\ s_2(c_{1R} - c_{2L}), s_1(c_{2L} - c_{1R}) + s_3(c_{2R} - c_{3L}), \ldots, \\ s_{n-2}(c_{n-1,L} - c_{n-2,R}) + s_n(c_{n-1,R} - c_{nL}), s_{n-1}(c_{nL} - c_{n-1,R}).\end{gathered} \tag{4.3}$$

Построенное отображение удовлетворяет всем условиям знаменитой Леммы Никайдо – Гейла – Дебре, см. например, [22], с. 585, или [7], с. 343. Для удобства читателя приведу здесь один из вариантов этой Леммы, наиболее подходящий для применения к построенному выше отображению:

Лемма Никайдо – Гейла – Дебрэ. Рассмотрим произвольное отображение $V : Int[\Delta_n] \to \mathbf{R}^n$, заданное на внутренности стандартного симплекса: $Int[\Delta_n] = \{(r_1, \ldots, r_n) | \forall i \; r_i > 0; \; \sum\limits_{i=1}^{n} r_i = 1\}$, со значениями в n-мерном пространстве. Предположим, что отображение V удовлетворяет следующим четырём требованиям:

(i) $V(\cdot)$ непрерывно на всём $Int[\Delta_n]$;

(ii) Имеет место *закон Вальраса*: $\forall (r_1, \ldots, r_n) \in Int[\Delta_n]$ имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} r_j V_j(r_1, \ldots, r_n) = 0$, где за $V_j(r_1, \ldots, r_n)$ обозначена j-я координата вектора $V(r_1, \ldots, r_n)$;

(iii) Существует такая единая константа $M > 0$, что *для любой точки* $(r_1, \ldots, r_n) \in Int[\Delta_n]$ и *любого* $j = 1, \ldots, n$ имеет место неравенство $V_j(r_1, \ldots, r_n) \geq -M$ (равномерная ограниченность снизу);

(iv) Неограниченность сверху при приближении к границе симплекса. А именно, для любой последовательности точек

$\{(r_1^k, \ldots, r_n^k)\}_{k=1}^{+\infty}$, целиком лежащей в $Int[\Delta_n]$, но сходящейся к точке $(r_1, \ldots, r_n)$, лежащей на границе симплекса (что означает существование хотя бы одного индекса j такого, что $r_j = 0$) имеет место предел $\max_j\{V_j(r_1^k, \ldots, r_n^k)\} \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

Тогда непременно существует такая точка $(r_1, \ldots, r_n) \in Int[\Delta_n]$, что $V(r_1, \ldots, r_n) = 0$. Или, расписывая V покоординатно, при любом $j = 1, \ldots, n$ имеем $V_j(r_1, \ldots, r_n) = 0$.

Доказательство можно прочесть на страницах 586-587 цитированной выше книги Мас-Колелла и других авторов по микроэкономике.

Проверим применимость этой леммы к нашему отображению Ψ, построенному выше.

(i) Непрерывность — в силу непрерывной зависимости набора точек границ $\{a_l\}_{l=1,\ldots,n-1}$ от набора масс $\{s_l\}_{l=1,\ldots,n}$, а также непрерывности функций издержек (3.1), (4.2) и непрерывности медианной точки $m[[a, b]]$ при изменении краёв группы $[a, b]$.[6]

(ii) Закон Вальраса:

$$\sum_{l=1}^{n} s_l \Psi_l(s_1, \ldots, s_n) = 0 \tag{4.4}$$

для всех наборов $(s_1, \ldots, s_n)$. Очевидно (прямая подстановка, все члены сокращаются попарно).

(iii) Равномерная ограниченность снизу:

$$\begin{gathered} s_{i-1}(c_{iL} - c_{i-1,R}) + s_{i+1}(c_{iR} - c_{i+1,L}) \geq \\ \geq -s_{i-1}c_{i-1,R} - s_{i+1}c_{i+1,L} \geq -1 - g - 1 - g = -(2 + g). \end{gathered} \tag{4.5}$$

(iv) Если последовательность точек из внутренности симплекса, $\{(s_1^m, \ldots, s_n^m)\}_{m \in \mathbf{N}}$ сходится при $m \to +\infty$ к точке $(s_1, \ldots, s_n)$, которая лежит на границе симплекса,[7] то

$$\max_{k=1,\ldots,n} \Psi_k(s_1^m, \ldots, s_n^m) \to +\infty \tag{4.6}$$

при $m \to +\infty$.

Последнее свойство доказывается следующим образом. В силу ограниченности вторых компонент функций издержек (3.1), а также сокращения s_i в числителе и в знаменателе выражений вида $s_i c_{iL}$ и $s_i c_{iR}$, максимум из координат вектор-функции Ψ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда к бесконечности стремится

$$\max\left\{\frac{s_2^m}{s_1^m}, \frac{s_1^m}{s_2^m} + \frac{s_3^m}{s_2^m}, \ldots, \frac{s_{n-2}^m}{s_{n-1}^m} + \frac{s_n^m}{s_{n-1}^m}, \frac{s_{n-1}^m}{s_n^m}\right\}. \tag{4.7}$$

---

[6] Вот здесь используется отделённость от нуля функции плотности расселения !

[7] Что означает, что для некоторых, *но не для всех одновременно*, индексов l выполнено $s_l^m \to 0$.

Если некоторые, *но не все*, компоненты s_l^m стремятся к нулю, то отношение некоторых из соседних неограниченно возрастает (упражнение по матанализу для первого курса!). Тем самым, последнее свойство тоже установлено.

Теперь, применяя Лемму Никайдо – Гейла – Дебрэ, мы заключаем, что существует такой набор ненулевых масс $(s_1, \ldots, s_n)$, что

$$\Psi_l(s_1, \ldots, s_n) = 0 \quad \forall l = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Вспоминая определение функции Ψ, а также учитывая тот факт, что все массы ненулевые: $\forall l \ s_l \neq 0$, мы немедленно получаем, что $c_{1R} = c_{2L}$ (из равенства нулю первой компоненты). Затем, двигаясь направо по формуле для Ψ, имеем $c_{2R} = c_{3L}$, и так шаг за шагом вплоть до $c_{n-1,R} = c_{nL}$. □

5. Сравнение равновесного и оптимального решений

Интересно теперь сравнить решение исходной задачи оптимизации, то есть ЗРНМ, с каким-нибудь из миграционно устойчивых разбиений в той же задаче. А именно, в решении задачи оптимизации должно быть выполнено

$$|a_l - m_l| - |a_l - m_{l+1}| = 0 \tag{5.1}$$

для любого $l = 1, \ldots, n-1$, что означает оптимизацию прикрепления каждого из жителей — *к ближайшему пункту доступа*. Любое отклонение от этого принципа, в силу отделённости от нуля функции плотности расселения, влечёт строгое отклонение от оптимума.

А что же в миграционно устойчивом разбиении? В последнем имеем

$$c(a_l, S_l) = c(a_l, S_{l+1}). \tag{5.2}$$

С учётом формулы (3.1) это равносильно тому, что

$$|a_l - m_l| - |a_l - m_{l+1}| = \frac{g}{|S_{l+1}|} - \frac{g}{|S_l|}. \tag{5.3}$$

Мы заключаем, что *необходимым* условием оптимальности миграционно устойчивого разбиения служит равенство нулю правых частей (5.3) при всех $l = 1, \ldots, n-1$. Последнее, в свою очередь, означает, что массы всех групп оптимального разбиения оказались одинаковыми: $\forall l = 1, \ldots, n \quad |S_l^{opt}| = \frac{1}{n}$. Это свойство имеет $(n-1)$-й порядок вырождения в (бесконечномерном) пространстве всех расселений на отрезке $[0, 1]$.

Как обычно, равновесность не в ладу с оптимальностью!

Список литературы

1. Ауманн Р. Значения для неатомических игр / Р. Ауманн, Л. Шепли. – М. : Мир, 1977. – 358 с.

2. Вартанов С. А. Об устойчивости к расколу равновесий в модели эндогенного формирования коалиций / С. А. Вартанов // Мат. теория игр и её приложения. – 2012. – Т. 4, вып. 1. – С. 3–21.
3. Вартанов С. А. О структуре равновесий Нэша и их устойчивости к локальному объединению в модели эндогенного формирования коалиций / С. А. Вартанов, Ю. В. Сосина // Мат. моделирование. – 2013. – Т. 25, вып. 4. – С. 44–64.
4. Курант Р. Что такое матетамика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – М. : МЦНМО, 2007. – 568 с.
5. Мусатов Д. В. Существование устойчивого разбиения на группы при убывающей плотности населения : дипл. работа / Д. В. Мусатов ; РЭШ. – 2008.
6. Савватеев А. В. Коалиционная устойчивость “биполярного мира”/ А. В. Савватеев // Журн. Новой экон. ассоциации. – 2013. – Т. 17. – С. 10–44.
7. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М. : Мир, 1972. – 519 с.
8. Alesina A. On the number and size of nations / A. Alesina, E. Spolaore // Quarterly Journal of Economics. – 1997. – Vol. 113. – P. 1027–1056.
9. Black D. On the Rationale of Group Decision Making / D. Black // Journal of Political Economy. – 1948. – Vol. 56. – P. 23–24.
10. Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules / A. Bogomolnaia, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // Economic Theory. – 2008. – Vol. 3. – P. 523–543.
11. Stability under unanimous consent, free mobility and core / A. Bogomolnaia, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // International Journal of Game Theory. – 2007. – Vol. 35. – P. 185–204.
12. The egalitarian sharing rule in provision of public projects / A. Bogomolnaia, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // Economics Bulletin. – 2005. – Vol. 8, Issue 11. – P. 1–5.
13. Heterogeneity Gap in Unidimensional Spatial Models / A. Bogomolnaia, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // Journal of Public Economic Theory. – 2008. – Vol. 10. – P. 455–473.
14. Christaller W. Die Zentralen Orte in Suddeutschland / W. Christaller. – Jena : Fisher, 1933. (English Translation, Central places in Southern Germany // Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.)
15. Cornuejols G. The uncapacitated facility location problem / G. Cornuejols, G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey // Discrete Location Theory / eds.: P. Mirchandani, R. Francis, John Wiley and Sons. – N. Y. : NYC, 1990. – P. 119–171.
16. Drèze J. Rawlsian Pricing of Access to Public Facilities: a Unidimensional Illustration / J. Drèze, M. Le Breton, S. Weber // Journal of Economic Theory. – 2007. – Vol. 136. – P. 759–766.
17. “Almost” subsidy-free spatial pricing in a multidimensional setting / J. Drèze, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber // Journal of Economic Theory. – 2008. – Vol. 143. – P. 275–291.
18. Goemans M. X. Cooperative facility location games / M. X. Goemans, M. Skutella // Journal of Algorithms. – 2004. – Vol. 50. – P. 192–214.
19. Greenberg J. Strong Tiebout Equilibrium under Restricted Preferences Domain / J. Greenberg, S. Weber // Journal of Economic Theory. – 1986. – Vol. 38. – P. 101–117.
20. Haimanko O. Voluntary formation of communities for the provision of public projects / O. Haimanko, M. Le Breton, S. Weber // Journal of Economic Theory. – 2004. – Vol. 115. – P. 1–34.

21. Lösch A. The Economics of Location / A. Lo"sch. – New Haven, CT : Yale Univ., 1954. Press
22. Mas-Colell A. Microeconomic Theory / A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green. – Oxford : Oxford University Press, 1995.
23. Savvateev A. V. Uni-dimensional models of coalition formation: non-existence of stable partitions / A. V. Savvateev // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. – 2012. – Vol. 2, Issue 4. – P. 49–62.
24. Tiebout C. A Pure Theory of Local Expenditures / C. Tiebout // The Journal of Political Economy. – 1956. – Vol. 64, Issue 5. – P. 416–24.
25. Westhoff F. Existence of Equilibria in Economies With a Local Public Good / F. Westhoff // Journal of Economic Theory. – 1977. – Vol. 17. – P. 84–112.

A. V. Savvateev

Migration-Proof Organization of a Linear World: Existence Theorem

Abstract. In the paper, a uni-dimensional version of the uncapacitated facility location problem is analysed from the angle of Nash-type (i.e. migrational) stability of group structures. A general result is proved that, under arbitrary population distribution admitting a strictly positive density, migration-proof solution comprised of prescribed number of groups always exists. To prove the theorem, a celebrated Nikaido-Gale-Debre Lemma is being utilized.

Keywords: Uncapacitated facility location problem, group structures, non-atomic games, migration-proofness, Nash stability, Nikaido-Gale-Debre Lemma

Савватеев Алексей Владимирович, кандидат экономических наук, РЭШ, ЦЭМИ РАН, МФТИ, Яндекс (Москва), 117 418 Нахимовский Проспект, 47, комната 1721;

ОРЭСП ИНЦ СО РАН, ИМЭИ ИГУ, ИрГТУ (Иркутск), 664000, Иркутск, бул. Гагарина, 20 тел.: 8-964-270-1184 (hibiny@mail.ru)

Savvateev Alexey, NES, CEMI RAS, MIPT, Yandex (Moscow), Moscow 117 418, Nakhimovskiy Prospekt, 47, Room 1721;

DRESP ISC SB RAS; IMEI ISU; ISTU (Irkutsk), 20, Gagarin St., Irkutsk, 664000 Phone: 8-964-270-1184 (hibiny@mail.ru)