Серия «Математика»
2014. Т. 8. С. 71—85

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Метод улучшения управления для иерархических моделей систем сетевой структуры *

В. И. Гурман
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

И. В. Расина
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

О. В. Фесько
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

О. В. Усенко
Сибирская академия права, экономики и управления

Аннотация. Системы неоднородной структуры широко распространены на практике и в настоящее время являются предметом активного изучения представителями различных научных школ и направлений. К ним традиционно относят системы с переменной структурой, дискретно-непрерывные, логико-динамические, гибридные и гетерогенные динамические системы. В данной работе рассматриваются системы неоднородной сетевой структуры. Для их моделирования и исследования применяется иерархический подход: строится двухуровневая модель, нижний уровень которой представлен различными управляемыми дифференциальными системами однородной структуры, а верхний — сетью операторов, обеспечивающей целенаправленное взаимодействие непрерывных подсистем. Эту модель можно рассматривать как дальнейшее развитие дискретно-непрерывной модели, предложенной и исследованной в ряде работ авторов. Ставится задача оптимального управления, и приводятся достаточные условия оптимальности управления — аналоги известных достаточных условий оптимальности Кротова, в которых фигурируют разрешающие функции типа Кротова для каждого уровня.

На основе этих условий и принципа локализации строится метод монотонного итерационного улучшения с линейными по состоянию функциями типа Кротова. Привлечение вторых производных по переменным управления в его структуре позволяет учесть овражистую структуру функционала. Построенный метод также как и модель имеет двухуровневую структуру. На нижнем уровне фигурирует традиционная сопряженная система дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разрешающих функций, тогда как на верхнем уровне сопряженные переменные определяются из линейной алгебраической системы уравнений.

В качестве примера рассматривается оптимизация водоохранных мероприятий в бассейне реки на упрощенной модели типа дерева операторов. Прототипом служит нижнее течение реки Селенги. Для этой задачи строится двухуровневая сетевая модель и применяется предложенный алгоритм. Приводятся результаты расчетов.

Ключевые слова: улучшение управления; иерархическая модель; сеть операторов.

1. Введение

Хотя понятие сети операторов введено, и соответствующие достаточные условия сформулированы впервые в работе [4] еще в 1976 году, до недавнего времени они практически не использовались. В [5] сеть операторов предложено применить для моделирования систем неоднородной структуры. Подобные системы в настоящее время являются предметом активного изучения под разными названиями: системы переменной структуры [10], дискретно-непрерывные системы [6], логико-динамические системы [2; 3], импульсные системы [12], гибридные системы [14; 15]. В [5] построена двухуровневая модель сети операторов, где нижний уровень представлен управляемыми дифференциальными системами. На этой модели поставлена задача оптимального управления и получены достаточные условия оптимальности. В данной работе на их основе получается метод итерационного улучшения управления. В качестве примера рассматривается оптимизация водоохранных мероприятий в бассейне реки на упрощенной модели типа дерева операторов.

2. Сеть операторов и достаточные условия оптимальности

Пусть имеется N операторов произвольной природы $f_k : \mathbb{X}_k \times \mathbb{U}_k \to \mathbb{Y}_k$,

$$y_k = f(k, x_k, u_k). \tag{2.1}$$

Вводятся подмножества $\mathbb{X}_{kq}$, такие что $\prod_{q=1}^{n_k} \mathbb{X}_{kq} = \mathbb{X}_k$.

Говорят, что выход оператора l *подается на вход* оператора k, если для некоторого q имеет место равенство $\chi(k, q, x_k) = y_l$, где $\chi(k, q, x_k)$ — оператор проектирования на подмножество $\mathbb{X}_{kq}$.

Пусть рассматриваемые операторы соединены указанным образом по некоторой схеме, представляемой ориентированным графом (рис. 1).

Предполагается, что для данного k между номерами q и l имеет место взаимно-однозначное соответствие.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00256-а).

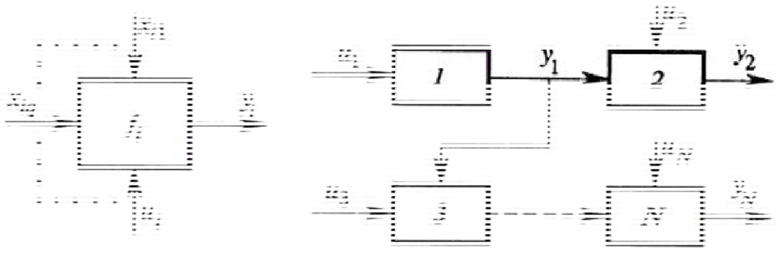

Рис. 1.

Иными словами, $\mathbb{X}_k$ олицетворяет множество входов k-го оператора, занятых в соединениях, а $\mathbb{U}_k$ — множество свободных входов. Такая модель называется *сетью операторов*. Специальный случай сети — цепочка произвольных операторов — может рассматриваться как общая модель динамической системы с переменной структурой.

Рассматривается задача о минимуме функционала

$$I = \sum_{1}^{N} I_k(y_k) = \sum_{1}^{N} I_k(f(k, x_k, u_k)) = \sum_{1}^{N} f^0(k, x_k, u_k) \tag{2.2}$$

на множестве $\mathbf{D}$ наборов $m = \{(x_k, u_k)\}$, $k = 1, \ldots, N$, связанных указанными соотношениями сети и возможными дополнительными ограничениями вида $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$, где $\mathbf{B}(k)$ — заданное при каждом k множество. Требуется найти минимизирующую последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$, т.е. такую, что $I(m_s) \to \inf\limits_{\mathbf{D}} I$.

Вводится множество $\mathbf{E}$ элементов m, не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k, j, x_k) = y_l$. Строится обобщенный лагранжиан:

$$L = -\sum_{k=1}^{N} R(k, x_k, u_k),$$

$$R(k, x, u) = \sum_{l=1}^{N} (\varphi(k, l, f(k, x, u)) - \varphi(l, k, \chi(k, l, x))) - f^0(k, x, u), \tag{2.3}$$

где $\varphi(k, l, y_k)$, $k, l = 1, \ldots, N$ — произвольные функционалы, такие что $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k, j, x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \to k$).

Теорема 1. *Пусть имеются последовательность $\{m_s\} \subset \mathbf{D}$ и функционалы $\varphi(k, l, y_k)$ такие, что $R(k, x_{ks}, u_{ks}) \to \mu(k)$, $k = 1, \ldots, N$, где $\mu(k) = \sup\, \{R(k, x, u)\colon (x, u) \in \mathbf{B}(k)\}$.*

Тогда $\{m_s\}$ минимизирует функционал I на $\mathbf{D}$.

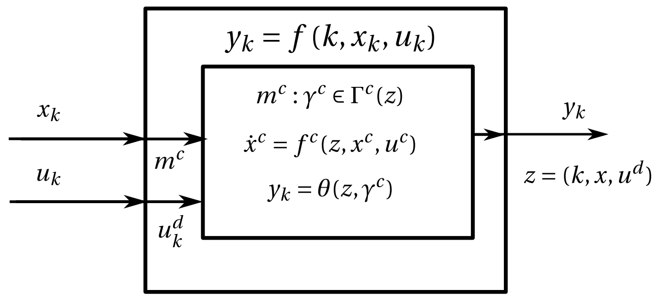

Рис. 2.

Доказательство теоремы дано в [4].

3. Двухуровневая модель с обыкновенными дифференциальными системами

Предлагается следующая конкретизация абстрактной сети операторов (рис. 2).

Представим условие $(x_k, u_k) \in \mathbf{B}(k)$ в форме $x_k \in \mathbf{X}(k)$, $u_k \in \mathbf{U}(k, x_k)$, где $\mathbf{X}(k)$ — проекция на $\mathbb{X}_k$, $\mathbf{U}(k, x_k)$ — сечение $\mathbf{B}(k)$ при данных k, x_k. Пусть на некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K} = \{1, \ldots, N\}$ имеем $u = (u^d, m^c)$, где u^d — произвольной природы, а m^c — некоторый непрерывный управляемый процесс, так что сечение множества $\mathbf{U}(k, x)$ при фиксированных x и u^d есть допустимое множество $\mathbf{D}^c(k, x, u^d)$ с соответствующей дифференциальной системой

$$\dot{x}^c = \frac{dx^c}{dt} = f^c(z, t, x^c, u), \quad t \in \mathbf{T}(z), \tag{3.1}$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z, t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c(z, t, x^c) \subset \mathbb{R}^{p(k)}, \quad z = (k, x, u^d).$$

$$\gamma^c = (t_I, x_I^c, t_F, x_F^c) \in \{\gamma^c \colon t_I = \tau(z), x_I^c = \xi(z), t_F = \vartheta(z), x_F^c \in \mathbf{\Gamma}^c(z)\}.$$

Решением этой комбинированной системы будем считать набор $m = (x(k), u(k)) \in \mathbf{D}$, где при $k \in \mathbf{K}' : u(k) = (u^d(k), m^c(k))$, $m^c \in \mathbf{D}^c(t, x(k), u^d(k))$.

Задача оптимизации формулируется для верхнего уровня. Требуется минимизировать функционал (2.2). Рассматривается множество $\mathbf{E}$ элементов m, не связанных сетевыми условиями — равенствами $\chi(k, j, x_k) = y_l$ и дифференциальными связями нижнего уровня. Вводятся произвольные функционалы $\varphi(k, l, y_k)$, $k, l = 1, \ldots, N$, такие что $\varphi(k, l, y_k) \equiv 0$, если равенство $\chi(k, j, x_k) = y_l$ отсутствует (отсутствует связь $l \to k$).

Для номеров $k\in\mathbf{K}'$ вводится дополнительно функционал $\varphi^c\left(z,t,x^c\right)$. Его можно рассматривать как параметрическое семейство функций от аргументов t,x^c с параметром z, которые считаются непрерывно-дифференцируемыми по этим аргументам; $\varphi^c\colon\ \mathbb{R}^{m(k)+1}\to\mathbb{R}$. Основные конструкции достаточных условий оптимальности имеют следующий вид [5]:

$$L=-\sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'}R_k-\sum_{\mathbf{K}'}R'_k,$$

где выражение для R_k совпадает с (2.3),

$$R'=G(z,\gamma^c)+\int\limits_{\mathbf{T}(z)}\left(R^c(z,t,x^c(z,t),u^c(z,t))-\mu^c(z,t)\right)dt,$$

$$G\left(z,\gamma^c\right)=\sum_{l=1}^{N}\left(\varphi\left(k,l,y_k\right)-\varphi\left(l,k,\chi\left(k,j,x_k\right)\right)\right)+$$

$$+\varphi^c\left(z,t_I,x_I^c\right)-\varphi^c\left(z,t_F,x_F^c\right)+\int\limits_{\mathbf{T}(z)}\mu^c\left(z,t\right)dt-I_k\left(\theta\left(z,\gamma^c\right)\right)),$$

$$R^c\left(z,t,x^c,u^c\right)=\varphi_{x^c}^{c\mathrm{T}}f^c\left(z,t,x^c,u^c\right)+\varphi_t^c\left(z,t,x^c\right),$$

$$\mu^c\left(z,t\right)=\sup\left\{R^c\colon x^c\in\mathbf{X}^c(z,t),\ u\in\mathbf{U}^c\left(z,t,x^c\right)\right\},$$

где $y_k=\theta\left(z,\gamma^c\right)$ при $k\in\mathbf{K}'$, $y_k=f(k,x,u)$ при $k\in\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'$. Обозначим

$$\mu'\left(k\right)=\sup\left\{G\left(z,\gamma^c\right):\ \gamma^c\in\mathbf{\Gamma^c}\left(z\right),\ x_I^c\in\mathbf{X}^c(z,t_I),\right.$$

$$\left.x_F^c\in\mathbf{X}^c(z,t_F),\ u^d\in\mathbf{U}^d(k),\ x\in\mathbf{X}(k)\right\}.$$

Легко убедиться, что $L(m)=I(m)$ при $m\in\mathbf{D}$, т.е. при выполнении отброшенных связей.

Теорема 2. *1. Для любых φ, φ^c и $m\in\mathbf{D}$ имеет место оценка*

$$I(m)-I_*\le\Delta=L(m)-L_*,\quad I_*=\inf_{\mathbf{D}}I,\quad L_*=\inf_{\mathbf{E}}L.\tag{3.2}$$

2. Пусть имеются два элемента $m^{\mathrm{I}}\in\mathbf{D}$ и $m^{\mathrm{II}}\in\mathbf{E}$ и функционалы φ и φ^c, такие, что $L\left(m^{\mathrm{II}}\right)<L\left(m^{\mathrm{I}}\right)=I\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, и $m^{\mathrm{II}}\in\mathbf{D}$.

Тогда $I(m^{\mathrm{II}})<I(m^{\mathrm{I}})$.

Теорема 3. *Пусть имеются последовательность дискретно-непрерывных элементов $\{m_s\}\subset\mathbf{D}$ и пара $(\varphi,\ \varphi^c)$ такие, что:*

1) $\mu^c\left(z,t\right)$ — кусочно-непрерывна при каждом z;

2) $R\left(k,x_s\left(k\right),u_s\left(k\right)\right)\to\mu\left(k\right)$;

3) $\int\limits_{\mathbf{T}(z_s(k))} \left(R^c\left(z_s(k), t, x_s^c\left(k, t\right), u_s\left(k, t\right)\right) - \mu^c\left(z_s(k), t\right)\right) dt \to 0, \quad k \in \mathbf{K}'$*;*

4) $G\left(z_s(k), \gamma_s^c(k)\right) - \mu'\left(k\right) \to 0, \quad k \in \mathbf{K}'$. *Тогда последовательность* $\{m_s\}$ *— минимизирующая для* I *на* $\mathbf{D}$.

Доказательство теорем 2 и 3 дано в [5]. Сформулированные достаточные условия позволяют строить конкретные методы и алгоритмы оптимизации.

4. Метод улучшения управления

Предположим, что ограничения на переменные состояния и управления отсутствуют, т.е. $\mathbf{X}(k) = \mathbb{X}_k$, $\mathbf{U}(k) = \mathbb{U}_k$, $\mathbf{X}^c(z,t) = \mathbb{R}^{n(k)}, \mathbf{U}^c(z,t) = \mathbb{R}^{r(k)}$, а t_I, t_F — фиксированы, $x_{kI}^c = \xi(k, x_k)$. На множестве $\mathbf{K}'$ функции f, f^0 имеют вид: $f = \theta(k, x_{kI}^c, x_{kF}^c)$, $f^0 = C^0(k, x_{kF}^c)$.

Рассматриваемая задача улучшения состоит, по существу, в построении оператора $\theta(m)$, $\theta : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$, такого что $I(\theta(m)) \le I(m)$. При некотором заданном начальном элементе такой оператор генерирует улучшающую, в частности, минимизирующую последовательность $\{m_s\}$: $m_{s+1} = \theta(m_s)$.

Будем строить метод на основе принципов расширения [11] и локализации [7]. Согласно последнему, задача улучшения некоторого элемента m^{I} сводится к задаче о минимуме вспомогательного функционала

$$I_\alpha(m) = \alpha I(m) + (1-\alpha) J(m^{\mathrm{I}}, m), \quad \alpha \in [0,1], \tag{4.1}$$

где $J(m^{\mathrm{I}}, m)$ — функционал типа метрики. Изменяя α от 0 к 1, можно достичь необходимой степени близости m_α к m^{I} и эффективно использовать аппроксимации конструкций достаточных условий в окрестности m^{I}. В итоге получается алгоритм с параметром α, играющим роль регулятора, настраиваемого при конкретном применении. Этот параметр выбирается так, чтобы разность $I(m^{\mathrm{I}}) - I(m_\alpha)$ была наибольшей, тогда соответствующий элемент m_α принимается за m^{II}.

Вспомогательный функционал зададим в виде:

$$I_\alpha = \alpha I + (1-\alpha)\,(\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} |\Delta u\,(k)\,|^2 +$$

$$+ \sum_{\mathbf{K}'} \int\limits_{\mathbf{T}(z)} |\Delta u^c\,(k,t)\,|^2 dt),$$

где $\alpha \in [0,1], \Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c = u^c - u^{c\mathrm{I}}$.

Согласно указанному принципу расширения по заданному элементу $m^{\mathrm{I}} \in \mathbf{D}$ требуется найти элемент $m^{\mathrm{II}} \in \mathbf{D}$, на котором $I_\alpha(m^{\mathrm{II}}) =$

$L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) < I_\alpha(m^{\mathrm{I}}) = L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right)$, или $L_\alpha\left(m^{\mathrm{II}}\right) - L_\alpha\left(m^{\mathrm{I}}\right) < 0$. Рассмотрим приращение функционала $L_\alpha(m)$, имеем:

$$\Delta L_\alpha \approx -\sum_{\mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'} \Delta R_k - \sum_{\mathbf{K}'} \Delta R'_k,$$

где $\Delta R = R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u$, $\Delta R' = \Delta G + \int\limits_{\mathbf{T}(z)} \Delta R^c dt$, $\Delta G = G_x^{\mathrm{T}}\Delta x + G_{x_F^c}^{\mathrm{T}}\Delta x_F^c$, $\Delta R^c = R_{x^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x^c + R_{u^c}^{c\mathrm{T}}\Delta u^c + \frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}} R_{u^c u^c}^c \Delta u^c$. Здесь для удобства изложения индекс k отсутствует, а функции $R,\ R'$ выписаны для функционала I_α.

Предположим, что матрицы R_{uu} и $R_{u^c u^c}^c$ отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра α [7]). Найдем $\Delta u, \Delta u^c$ доставляющие максимум выражениям для ΔR и $\Delta R'$. Нетрудно видеть, что $\Delta u = -(R_{uu})^{-1}R_u,\ \Delta u^c = -(R_{u^c u^c}^c)^{-1}R_{u^c}^c$ Для выполнения неравенства $\Delta L < 0$ потребуем далее, чтобы $\Delta R_k,\ \Delta G,\ \Delta R^c$ не зависели от $\Delta x,\ \Delta x_F^c,\ \Delta x^c$. Зададим функции $\varphi(k,l,y_k),\ \varphi^c$ в виде: $\varphi(k,l,y_k) = \psi(k,l)y_k,\ \varphi^c(z,t,x^c) = \psi^c(z,t)x^c$. Тогда из сформулированных условий получим:

$$\Delta u = \alpha_1(((\sum_{l=1}^{N} H_{uu}) - (1-\alpha)E)^{-1}\sum_{l=1}^{N} H_u), \tag{4.2}$$

$$\sum_{l=1}^{N}(f_x^{\mathrm{T}}\psi(k,l) - \chi_x^{\mathrm{T}}\psi(l,k)) - f_x^0 = 0,\ k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}', \tag{4.3}$$

$$\sum_{l=1}^{N}(\xi_x^{\mathrm{T}}\theta_{x_I^c}^{\mathrm{T}}\psi(k,l) - \chi_x^{\mathrm{T}}\psi(l,k)) + \xi_x^{\mathrm{T}}\psi^c(z,t_I) = 0, \tag{4.4}$$

$$\psi^c(z,t_F) = \sum_{l=1}^{N}\theta_{x_F^c}^{\mathrm{T}}\psi(k,l) - C_{x_F^c}^0, \tag{4.5}$$

$$\dot{\psi}^c(z,t) = -f_{x^c}^{c\mathrm{T}}\psi^c(z,t) = -H_{x^c}(z,t,x^c,u^c,\psi^c), \tag{4.6}$$

$$\Delta u^c = \alpha_2(H_{u^c u^c}^c)^{-1}H_{u^c}^c, k \in \mathbf{K}'. \tag{4.7}$$

Здесь $H(k,l,x,u,\psi(k,l)) = \psi^{\mathrm{T}}(k,l)f(k,x,u) - f^0(k,x,u)$, $H^c(z,t,x^c,u^c,\psi^c) = \psi^{c\mathrm{T}}(z,t)f^c(z,t,x^c,u^c) - (1-\alpha)|\Delta u^c(k,t)|^2$, а $\alpha_1,\ \alpha_2$ — коэффициенты, $\alpha_1,\ \alpha_2 \in [0,1]$.

Таким образом, алгоритм метода состоит в следующем:

Шаг 1. Задается элемент m^{I}, регулятор α, параметры $\alpha_1,\ \alpha_2$.

Шаг 2. Справа налево решаются уравнения (4.5), (4.6). Находится решение системы (4.3), (4.4). Тем самым определяются функции $\psi^c(z,t),\ \psi(k,l)$.

Шаг 3. По формулам (4.2), (4.7) вычисляются приращения управлений Δu, Δu^c и новые управления $u^{\mathrm{II}} = u^{\mathrm{I}} + \Delta u$, $u^{c\mathrm{II}} = u^{c\mathrm{I}} + \Delta u^c$. Найденные управления подставляются в уравнения сети (2.1),(3.1), тем самым определяется элемент m^{II}.

Шаг 4. Шаги 2–3 повторяются для различных α и находится α_*, такое что $I(m_{\alpha_*}) = \min\limits_{\alpha} I(m_\alpha)$ (с требуемой точностью).

Шаг 5. Элемент m_{α_*} берется в качестве m^{II}, итерация заканчивается и начинается следующая итерация с шага 1.

Шаг 6. Весь итерационный процесс заканчиваются при выполнении условия: $I(m_{s+1}) - I(m_s) < \epsilon$, где $\epsilon > 0$ — заданная точность.

Теорема 4. *Построенная итерационная процедура при условии ограниченности функционала I снизу генерирует улучшающую последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходящуюся по функционалу, т.е. существует число I^*, такое что $I^* \leq I(m_s)$, $I(m_s) \to I^*$.*

Доказательство следует непосредственно из свойства монотонности (по функционалу) рассмотренных операторов улучшения.

5. Оптимизация водоохранных мероприятий в бассейне реки

Как правило, речные бассейны испытывают интенсивную антропогенную нагрузку. Необходимы регулярные природоохранные мероприятия по очистке скапливающихся загрязнений в водной среде и донных отложениях. Такие мероприятия требуют больших затрат, поэтому актуальна задача их минимизации с учетом естественной самоочищающей способности природной среды. Для математических моделей, описывающих процессы переноса примесей вдоль русла с учетом большого количества источников загрязнений и перемешивания с водным потоком, характерны сложные аналитические зависимости. Как правило, такие модели представлены уравнениями в частных производных и требуют для проведения расчетов большого количества информации. Поэтому часто прибегают к построению сосредоточенных моделей, оперирующих с осредненными характеристиками [7]. Кроме того, широко распространены камерные модели, в основу построения которых заложен принцип дискретизации пространственных переменных.

Рассмотрим задачу оптимизации водоохранной деятельности в упрощенной постановке на примере условного речного бассейна: главная река с двумя притоками (рис. 3).

Можно построить соответствующую камерную модель рассматриваемого бассейна, разделив его на 5 камер, как показано на рис. 3. В каждой камере распределение концентрации загрязнений вдоль русла

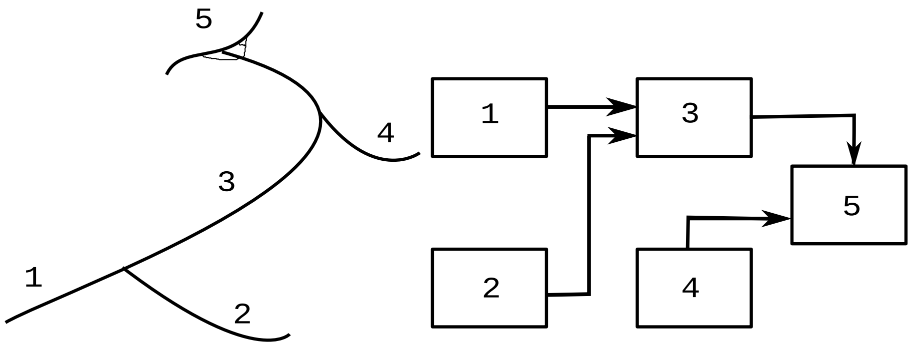

Рис. 3.

описывается некоторой дифференциальной системой:

$$\frac{dp}{dt} = A_1(t)^{\mathrm{T}}(p-p_l) + B_1(t)^{\mathrm{T}}(r-r_l) + (p-p_l))^{\mathrm{T}} A_2(t)(p-p_l) +$$

$$+(r-r_l)^{\mathrm{T}} B_2(t)(r-r_l) + s(t), \tag{5.1}$$

$t \in [0, t_F]$, $0 \le r \le r_{\max}$, где t имеет смысл расстояния от начала соответствующей камеры, p — вектора концентраций загрязнений, r — вектора интенсивностей природоохранных мероприятий, s — вектора потоков поступающих загрязнений, p_l, r_l — опорные траектория и управление системы. Здесь $A_1(t), B_1(t), A_2(t), B_2(t)$ — заданные матрицы. Все величины имеют номер соответствующей камеры $k = 1, \ldots 5$: t_k, p_k, который для краткости опущен. Эти уравнения можно рассматривать как один из вариантов аппроксимации более сложных нелинейных зависимостей, характерных для процессов перемешивания в водной среде. Задача состоит в обеспечении допустимых концентраций в устьях рек, $p_k(t_F) \le p_{k\max}$, с минимумом суммарных затрат, определяемых величиной

$$Q = \sum_{k=1}^{5} q_{kF}, \quad q_{kF} = \int\limits_0^{t_{kF}} c_k(t) r_k(t) dt.$$

Размерности векторов концентраций в разных камерах могут быть разными в зависимости от формы и размеров поперечного сечения русла, условий перемешивания и т.п.

В случае линейной зависимости правых частей (5.1) от переменных управления и состояния задача была решена в [9] на основе достаточных условий оптимальности (теорема 3).

Применим для решения поставленной задачи выше изложенный алгоритм. Примем для простоты p и r одномерными $B_1 = -1$, $B_2 = -0,5$, A_1, A_2, c, s — постоянными для каждой камеры. При естественном предположении $p \ge 0$ для любых управлений в указанных границах ограничение $p(t_F) \le p_{\max}$ можно заменить штрафом и минимизировать взвешенную сумму

$$I = \sum_1^5 I_k, \quad I_k = (\beta_k q_{kF} + (1-\beta_k) p_{kF}), \quad 0 < \beta_k < 1.$$

Представим рассматриваемую модель как дискретно-непрерывную систему (ДНС) [8; 13], на верхнем уровне которой находится сеть (дерево) операторов (рис. 3), а на нижнем — система из уравнения (5.1) и уравнения

$$\frac{dq}{dt} = cr, \quad q(0) = 0, \tag{5.2}$$

где cr имеет смысл природоохранных затрат на единицу длины соответствующей камеры (здесь номер k также не указан).

Положим при $k = 1, 2, 4$ (операторы только со свободными входами):

$$x_k = (x_k^1, x_k^2) = \mathrm{const}, \quad p(0) = p_{kI} = x_{k1}^1,$$

при $k = 3, 5$:

$$x_k = (x_{k1}^1, x_{k1}^2, x_{k2}^1, x_{k2}^2), \quad p_{kI} = x_{k1}^1 + x_{k2}^1.$$

Сетевые связи выражаются следующим образом:

$$x_{31} = y_1, \quad x_{32} = y_2, \quad x_{51} = y_3, \quad x_{52} = y_4.$$

Обозначим $x^c = (p, q)^{\mathrm{T}}, \quad y = x^c(t_F), \quad k = 1, \ldots, 5$. Тогда рассматриваемая дифференциальная система и функционал I_k для каждой камеры запишутся в виде

$$\frac{dp^c}{dt} = A_1^c(t)(p^c - p_l^c) + B_1^c(t)(r^c - r_l^c) + A^{c2}(t)(p^c - p_l^c)^2 + B_2^c(t)(r^c - r_l^c)^2 + s^c(t),$$

$$0 \le u^c = r^c \in [0,\ p_{\max}], \ \frac{dq^c}{dt} = cr^c,$$

$I_k = Q_k^0 x_{kF}^c$, где $Q_k^0 = \begin{bmatrix}(1-\beta_k) & \beta_k\end{bmatrix}$.

Здесь

$$\theta(z, \gamma^c) = y_k = x_{kF}^c, \quad \mathbf{\Gamma}^c(z) = \{\gamma^c \colon t_{kI} = 0,\ t_{kF} = \mathrm{const},\ x_{kI}^c = \kappa_k x_k\},$$

$$\kappa_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 3,\ 5.$$

Оператор проектирования $\chi(k, j, x)x$ в данном случае — линейная функция: $\chi(k, j, x) = \lambda(k, j)x$, $\lambda(k, j)$ — блочная матрица: $\lambda(k, 1) = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda(k, 2) = \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix}$.

Выпишем основные конструкции метода. Согласно рассматриваемому графу, будем иметь 5 функций φ^c нижнего уровня, по числу дифференциальных операторов, и 4 ненулевые функции φ верхнего уровня, соответствующие имеющимся сетевым связям, т.е. все $\psi\,(k,l)$ равны нулю, за исключением $\psi\,(1,3)$, $\psi\,(2,3)$, $\psi\,(3,5)$, $\psi\,(4,5)$. Имеем: $\psi^c = \psi^{c1}, \psi^{c2}$

$$\dot{\psi}^{c1} = (A^{c1} + 2A^{c2}(p^c - p^c_s))\psi^{c1}, \quad \dot{\psi}^{c2} = 0,$$

$$\psi^{c1}(k, t_{kF}) = \psi(k,3) - 1 + \beta_k, \quad \psi^{c2}(k, t_{kF}) = -\beta_k, \ k = 1, 2,$$

$$\psi^{c1}(k, t_{kF}) = \psi(k,5) - 1 + \beta_k, \quad \psi^{c2}(k, t_{kF}) = -\beta_k, \ k = 3, 4,$$

$$\psi^{c1}(5, t_{5F}) = -1 + \beta_5, \quad \psi^{c2}(5, t_{5F}) = -\beta_5,$$

$$\Delta r^c = \alpha_2(2B^c_2\psi^{c1} - 1 + \alpha)^{-1}(B^c_1\psi^{c1} + c\psi^{c2}),$$

$$\kappa^{\mathrm{T}}_3\psi^c\,(3, t_{3I}) = \lambda^{\mathrm{T}}(3,1)\psi(1,3) + \lambda^{\mathrm{T}}(3,2)\psi(2,3),$$

$$\kappa^{\mathrm{T}}_5\psi^c\,(5, t_{5F}) = \lambda^{\mathrm{T}}(5,1)\psi(3,5) + \lambda^{\mathrm{T}}(5,2)\psi(4,5),$$

где κ_k и $\lambda^{\mathrm{T}}(k,j)$ выписаны выше. Из уравнений для ψ^c и $\psi(k,l)$ следует

$$\psi(1,3) = \psi(2,3) = \left(\psi^{c1}(3,0),\ 0\right)^{\mathrm{T}}, \ \psi(3,5) = \psi(4,5) = \left(\psi^{c1}(5,0),\ 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Были проведены расчеты для условного бассейна, близкого по характеристикам к нижней части бассейна р. Селенги — главного притока оз. Байкал. Данные для расчетов содержатся в табл. 1.

Таблица 1

№	t_F км	A^1	A^2	c млн руб.км^3/т	s т/км^3	p_I т/км^3	$r_{\max}$ т/км^4
1	20	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^2$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	$0,4 \cdot 10^{-1}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$
2	30	$3 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-3}$	10^3	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,3 \cdot 10^{-1}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$
3	30	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^2$	$0,3 \cdot 10^{-2}$	–	$0,35 \cdot 10^{-2}$
4	20	$3 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-3}$	10^3	$0,2 \cdot 10^{-2}$	$0,4 \cdot 10^{-1}$	$0,25 \cdot 10^{-2}$
5	150	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^2$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	–	$0,6 \cdot 10^{-2}$

В качестве начального приближения использовался результат работы [9]. Решение было получено за 3 итерации. Малое число итераций объясняется удачным выбором первого приближения, полученного для линейной модели. Основные природоохранные мероприятия оказались сосредоточенными, как и при начальном приближении, в первой и пятой камерах. При этом произошло увеличение суммарных затрат с 299,76 до 391,72 млн. руб. Характер очистки в терминах удельных затрат показан на представительной камере № 5 (рис. 4). На этом рисунке $q-1$ — начальное приближение, а $q-2$ — полученный результат.

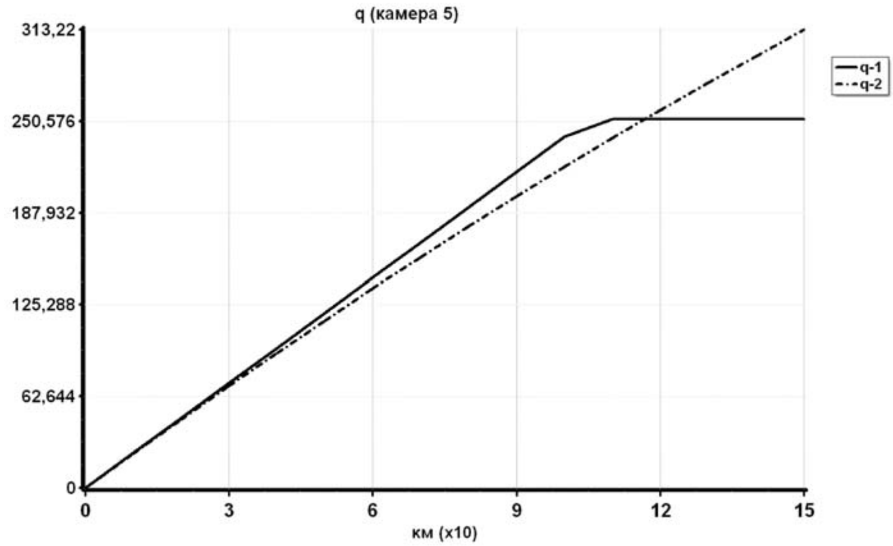

Рис. 4.

6. Заключение

Таким образом, для иерархической модели дискретно-непрерывной системы неоднородной сетевой структуры построен итерационный метод улучшения управления на основе аналога достаточных условий оптимальности Кротова. Сформулирована и доказана теорема о его сходимости по функционалу. Метод апробирован на задаче оптимизации водоохранной деятельности в бассейне реки.

Список литературы

1. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом / Ю. А. Анохин [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1987.
2. Бортаковский А. С. Достаточные условия оптимальности управления детерминированными логико-динамическими системами / А. С. Бортаковский // Информатика. Сер. Автоматизация проектирования. – 1992. – Вып. 2–3. – С. 72–79.
3. Васильев С. Н. Теория и применение логико-управляемых систем / С. Н. Васильев // Тр. 2-й Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» (SICPRO'03). – 2003. – С. 23–52.
4. Гурман В. И. Оптимизация дискретных систем : учеб. пособие / В. И. Гурман. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1976. – 121 с.
5. Гурман В. И. Достаточные условия оптимальности в иерархических моделях неоднородных систем / В. И. Гурман, И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №12. – С. 15–30.

6. Гурман В. И. К теории оптимальных дискретных процессов / В. И. Гурман // Автоматика и телемеханика. – 1973. – №6. – С. 53–58.
7. Гурман В. И. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума / В. И. Гурман, И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №10. – С. 12–18.
8. Гурман В. И. Дискретно-непрерывные представления импульсных решений управляемых систем / В. И. Гурман, И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №8. – С. 16–29.
9. Гурман В. И. Моделирование водоохранных мероприятий в бассейне реки / В. И. Гурман, О. В. Фесько, И. В. Расина // Вестн. БГУ. Математика, информатика. – 2013. – №3. – С. 4–15.
10. Теория систем с переменной структурой / под ред. С. В. Емельянова. – М.: Наука, 1970.
11. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973.
12. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями: монография / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. – М. : Наука, 2005. – 429 с.
13. Расина И. В. Итерационные алгоритмы оптимизации дискретно-непрерывных процессов / И. В. Расина // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №10. – С. 3–17.
14. Lygeros J. Lecture Notes on Hybrid Systems / J. Lygeros. – University of Cambridge : Cambridge, 2003.
15. Van der Shaft A. J. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems / A. J. Van der Shaft, Schumacher H. – Springer-Verlag : London Ltd, 2000.

Гурман Владимир Иосифович, доктор технических наук, профессор, Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, 152021, г. Переславль-Залесский, ул. Петра Первого, д. 4а
(e-mail: vig70@mail.ru)

Расина Ирина Викторовна, доктор физико-математических наук, Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, 152021, г. Переславль-Залесский, ул. Петра Первого, д. 4а
(e-mail: irinarasina@gmail.com)

Фесько Олесь Владимирович, кандидат технических наук, Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, 152021, г. Переславль-Залесский, ул. Петра Первого, д. 4а
(e-mail: oles.fesko@live.com)

Усенко Олег Валерьевич, старший преподаватель, Сибирская академия права, экономики и управления, 664025, г. Иркутск, ул. Сурикова, д. 21 (e-mail: o.v.usenko@gmail.com)

V. I. Gurman, I. V. Rasina, O. V. Fesko, O. V. Usenko

An improvement method for hierarchical model with network structure

Abstract. The systems of heterogeneous structure are widespread in practice, currently such systems are the subject of intense study by the representatives of different scientific schools and directions. These systems include systems with variable structure, discrete-continuous, logic-dynamic, hybrid and heterogeneous dynamic systems. In this article the systems of heterogeneous network structure are considered. For modelling and research the hierarchical approach is used: two-level model is created, the lower the level of which presents different controlled differential systems of homogeneous structure and the upper — network of operators, providing purposeful interaction of continuous subsystems. This model can be seen as a further development of the discrete-continuous model, proposed and investigated in a number of works of the authors. The optimal control problem is formulated, the sufficient conditions of optimality are derived — analogues of known the Krotov's sufficient conditions of optimality, which involve resolving functions type of Krotov for each level. On the basis of these conditions and the localization principle a method of monotone iterative improvements with linear with respect to the state of the Krotov-type functions is constructed. The involvement of the second derivatives on control variables in its structure allows to take into account ravine surface structure of functional. The method like the model has a two-level structure. On the lower level appears traditional conjugated system of differential equations for the coefficients of resolving functions, whereas on the upper level, conjugated variables are determined from the linear algebraic system of equations. As an example it is considered the optimization of water protection measures in the river basin for a simplified model with an operator tree. The prototype is the lower flows of the Selenga river. For this problem a two-level network model is built and the proposed algorithm is applied. The results of calculations are represented.

Keywords: control improvement, hierarchical model, network of operators

References

1. Anohin Ju.A., Gorstko A.B. et al. Matematicheskie modeli i metody upravlenija krupnomasshtabnym vodnym ob'ektom (in Russian). Novosibirsk, Nauka, 1987.
2. Bortakovskij A.S. Dostatochnye uslovija optimal'nosti upravlenija determinirovannymi logiko-dinamicheskimi sistemami (in Russian). *Informatika. Ser. Avtomatizacija proektirovanija*, 1992, vol. 2–3, pp. 72–79.
3. Vasil'ev S.N. Teorija i primenenie logiko-upravljaemyh system (in Russian). *Trudy 2-oj Mezhdunarodnoj konferencii «Identifikacija sistem i zadachi upravlenija» (SICPRO'03)»*, 2003, pp. 23–52.
4. Gurman V.I. Optimizacija diskretnyh sistem: uchebnoe posobie (in Russian). Irkutsk, Izd-vo Irkut. un-ta, 1976, 121 p.
5. Gurman V.I., Rasina I.V. Sufficient optimality conditions in hierarchical models of nonuniform systems (in Russian). *Avtomat. i telemeh.*, 2013, no. 12, pp. 15–30.
6. Gurman V.I. K teorii optimal'nyh diskretnyh processov (in Russian). *Avtomat. i telemeh.*, 1973, no. 6, pp. 53–58.
7. Gurman V.I., Rasina I.V. O prakticheskih prilozhenijah dostatochnyh uslovij sil'nogo otnositel'nogo minimuma (in Russian). *Avtomat. i telemeh.*, 1979, no. 10, pp. 12–18.
8. Gurman V.I, Rasina I.V. Discrete-continuous representations of impulsive processes in the controllable systems (in Russian). *Avtomat. i telemeh.*, 2012, no. 8, pp. 16–29.

9. Gurman V.I., Fesko O.V., Rasina I.V. Modelirovanie vodoohrannyh meroprijatij v bassejne reki (in Russian). *Vestnik BGU. Matematika, informatika*, 2013, no. 3, pp. 4–15.
10. Emel'janov S.V. Teorija sistem s peremennoj strukturoj (in Russian). Moscow, Nauka, 1970.
11. Krotov V.F., Gurman V.I. Metody i zadachi optimal'nogo upravlenija [Methods and problems of optimal control]. Moscow, Nauka, 1973, 446 p.
12. Miller B.M., Rubinovich E. Ja. Optimizacija dinamicheskih sistem s impul'snymi upravlenijami [Optimization of dynamic systems with pulse control]. Moscow, Nauka, 2005, 429 p.
13. Rasina I.V. Iterative optimization algorithms for discrete-continuous processes (in Russian). *Avtomat. i telemeh.*, 2012, no. 10, pp. 3–17.
14. Lygeros J. Lecture Notes on Hyrid Systems. University of Cambridge, Cambridge, 2003.
15. Van der Shaft A.J., Schumacher H. An Introduction to Hybrid Dynamical Systems. Springer-Verlag, London Ltd, 2000.

Gurman Vladimir, Doctor of Sciences (Technical), Professor, Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region Russia, 152020 Telephone/Fax: +7 (48535) 98-064
(e-mail: vig70@mail.ru)

Rasina Irina, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region Russia, 152020 Telephone/Fax: +7 (48535) 98-064
(e-mail: irinarasina@gmail.com)

Fesko Oles, Candidate of Sciences (Technical), Ailamazyan Program Systems Institute of RAS, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl Region Russia, 152020 Telephone/Fax: +7 (48535) 98-064 (e-mail: oles.fesko@live.com)

Usenko Oleg, Senior Lecturer, Siberian Academy of Law, Economics and Management, Irkutsk, 664025, Surikov str., 21,Telephone: +7(3952)20-20-33 (e-mail: o.v.usenko@gmail.com)