Серия «Математика»
2017. Т. 21. С. 61—76

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716
MSC 08A99,03B50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.61

О классах гиперфункций ранга 2, порожденных максимальными мультиклонами

А. С. Зинченко, В. И. Пантелеев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В теории дискретных функций одним из объектов исследования являются мультифункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все подмножества множества A. В множестве мультифункций можно выделить множество гиперфункций — функций, принимающих в качестве своих значений все непустые подмножества множества A.

Отношение принадлежности максимальным мультиклонам является отношением эквивалентности и порождает соответствующее разбиение. Используя данное разбиение, можно оценить мощности всех возможных базисов, подсчитать число различных типов базисов одинаковой мощности, построить каркас решетки клонов.

Зная число максимальных клонов, можно оценить сверху число классов разбиения как мощность множества всех подмножеств множества максимальных клонов. Свойства функций позволяют эту оценку понизить. Нижнюю оценку числа классов можно получить, построив соответствующие классы.

Стоит заметить, что с увеличением мощности множества максимальных клонов, сложность задачи описания всех классов эквивалентности значительно возрастает.

В работе рассматриваются мультифункции на двухэлементном множестве. Число максимальных мультиклонов было получено ранее и равно 15 (Пантелеев В. И., 2009).

Основной целью работы является описание разбиения множества гиперфункций на классы эквивалентности. При этом ранее было показано (Казимиров А. С., Пантелеев В. И.), что множество булевых функций, являющееся подмножеством множества гиперфункций, разбивается на 18 классов эквивалентности. В данной работе были найдены специальные свойства гиперфункций относительно принадлежности максимальным гиперклонам и с помощью компьютерного эксперимента описаны все классы эквивалентности, порождаемые функциями от трех аргументов. Полученные результаты позволили показать, что отношение принадлежности максимальным мультиклонам разбивает множество всех гиперфункций на 67 классов эквивалентности.

Ключевые слова: гиперклон, базис, гиперфункция, полное множество, суперпозиция, замкнутое множество, мультифункция.

Введение

Для произвольного множества A через $|A|$ обозначим мощность множества A и пусть $E = \{0, 1\}$.

На множестве E определим следующие множества функций:
$M^{(n)} = \{f \mid f : E^n \to 2^E\}$;
$H^{(n)} = \{f : f \in M^{(n)}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \geqslant 1$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E^n\}$;
$O^{(n)} = \{f : f \in M^{(n)}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E^n\}$;
$O^{*(n)} = \{f : f \in M^{(n)}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leqslant 1$ для любого набора $\tilde{\alpha} \in E^n\}$;
$M = \bigcup\limits_n M^{(n)}$, $H = \bigcup\limits_n H^{(n)}$, $O = \bigcup\limits_n O^{(n)}$, $O^* = \bigcup\limits_n O^{*(n)}$;
M, H, O, O^* — множества, соответственно, мультифункций, гиперфункций, булевых функций, частичных функций ранга 2.

Замечание 1. Договоримся в дальнейшем не различать одноэлементные множества и элементы этого множества, для множества E использовать обозначение 2, а для пустого множества — $*$, этим же символом обозначим множество всех функций, тождественно равных $\varnothing$.

Суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

с внешней мультифункцией $f(x_1, ..., x_n)$ и внутренними мультифункциями $f_1, ..., f_n$ определяет мультифункцию $g(x_1, ..., x_m)$ следующим образом: если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n). \qquad (1)$$

Понятия «клон», «максимальный клон», «функция, сохраняющая предикат» являются стандартными (см., например [2]). Предикаты ниже будем записывать в виде матрицы, в которой столбцами являются все наборы из предиката.

В [3] описаны все максимальные мультиклоны:

- $K_1 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f \equiv *$ или $f(0, ..., 0) \in \{0, 2\}\}$.
- $K_2 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f \equiv *$ или $f(1, ..., 1) \in \{1, 2\}\}$.
- $K_3 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(0, ..., 0) \in \{0, *\}\}$.
- $K_4 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(1, ..., 1) \in \{1, *\}\}$.
- $K_5 = H \cup \{*\}$.
- $K_6 = O^*$ — клон частичных функций.

Мультиклоны K_7—K_{15} являются множествами сохраняющими, соответственно, предикаты R_7—R_{15}, где

$$R_7 = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 & 1 & 2 \\ 1 & * & 0 & 1 & 2 & * & * & * \end{pmatrix}, \qquad R_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 2 \\ 0 & 1 & * & 2 \end{pmatrix},$$

$$R_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & * & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & * \end{pmatrix}, \; R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & * \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Предикат R_{12} содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предикат R_{13} содержит все наборы, кроме

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Предикат R_{14} не содержит наборы $(\alpha, \beta, \gamma \neq *)$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и не содержит наборы $(\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4)$ такие, что $\delta_i \neq *$ $(i \in \{1,2,3,4\})$ и среди $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ встречается $\alpha \in E$ и $\beta = 2$.

Предикат R_{15} не содержит следующие наборы и двойственные к ним $(\alpha, \beta, \delta \neq *,\ \nu \in \{1,2\},\ \mu \in \{0,1,2\})$.

$$\begin{pmatrix} * \\ \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Пусть есть матрица $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$. Обозначим столбцы этой матрицы через $A^1, ..., A^n$. Для гиперфункции $f(x_1, ..., x_n)$ определим $f\begin{pmatrix} a_1^1 \; ... \; a_1^n \\ \vdots \\ a_m^1 \; ... \; a_m^n \end{pmatrix}$ как следующее множество

$$\left\{ f(B^1, ..., B^n) \mid B^j \in \{A^1, ..., A^n\} \right\}.$$

Здесь, если $B^j = (b_1^j, ..., b_m^j)^t, j \in \{1, ..., n\}$, то

$$f(B^1, ..., B^n) \text{ есть } \begin{pmatrix} f(b_1^1, ..., b_1^n) \\ \vdots \\ f(b_m^1, ..., b_m^n) \end{pmatrix}.$$

Для каждой гиперфункции однозначным образом определим вектор принадлежности максимальным клонам. Длина такого вектора равна 15 и соответствующая координата равна 0, если гиперфункция принадлежит соответствующему максимальному клону, и 1, иначе.

На множестве всех гиперфункций определим отношение эквивалентности: эквивалентными будут гиперфункции, у которых совпадают векторы принадлежности максимальным клонам. Так как число максимальных клонов равно 15, то наибольшее возможное число классов эквивалентности равно $2^{15} = 32768$.

В работе найдены специальные свойства гиперфункций относительно принадлежности максимальным гиперклонам и с помощью компьютерного эксперимента описаны все классы эквивалентности, порождаемые функциями от трех аргументов. Полученные результаты позволили показать, что отношение принадлежности максимальным мультиклонам разбивает множество всех гиперфункций на 67 классов эквивалентности.

Из [5; 6] известно, что для булевых функций число аналогичных классов эквивалентности равно 15, при этом имеется один тип базиса мощности 1, 17 типов базиса мощности 2, 22 типа базиса мощности 3, 2 типа базиса мощности 4, базисов большей мощности не существует.

Изучение классов эквивалентности и типы базисов для различных дискретных функций, в том числе функций k-значной логики, частичных функций, можно посмотреть в [7; 8; 9; 10; 11].

1. Основной результат

В [1] показано, что множество булевых функций разбивается на 18 классов эквивалентности. Поэтому ниже мы будем рассматривать гиперфункции из множества $H \setminus O$. Все они принадлежат клону K_5 и не принадлежат клону K_6.

Пусть на наборе $\tilde{\alpha}$ функция возвращает 2. Тогда на противоположном наборе $\overline{\tilde{\alpha}}$ она возвращает 0 или 1 или 2. Значит

$$(f(\tilde{\alpha}), f(\overline{\tilde{\alpha}})) \in \{(2,0), (2,1), (2,2)\},$$

а потому функция f не принадлежит клону K_{11}.

Предположим, что на наборе $\tilde{\beta}$ функция f возвращает значение, отличное от 2. Тогда

$$\Big(f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta})\Big) \in \big\{(2020), (2121)\big\}.$$

Следовательно, функция не принадлежит клону K_{14}.

Осталось исследовать принадлежность гиперфункций оставшимся 11 максимальным клонам.

Лемма 1. *Если гиперфункция f не принадлежит клону K_9, то она не принадлежит клону K_{12}.*

Доказательство. Так как гиперфункция f не принадлежит клону K_9, то выполняется

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 0\,0 \end{Bmatrix} \cap f \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,2\,1\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \neq \varnothing.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in f \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,2\,1\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,1\,2\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in f \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,2\,1\,2\,2 \\ 0\,0\,1\,0\,2\,1\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix}$$

□

Лемма 2. *Если гиперфункция не принадлежит клону K_{10}, то она не принадлежит клону K_{13}.*

Лемма 3. *Если гиперфункция не принадлежит клону K_{13}, то она не принадлежит клону K_{10} или не принадлежит клону K_{15}.*

Доказательство. Пусть гиперфункция f не принадлежит клону K_{13}, тогда

$$f \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 1\,0\,0\,0\,1\,2\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,2\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,0\,0\,0\,1\,2\,0\,1\,2\,0\,1\,2 \end{pmatrix} \cap \begin{Bmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 2\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,1 \\ 0\,2\,1\,0\,0\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,2 \end{Bmatrix} \neq \varnothing.$$

Используя первые 8 столбцов справа, легко показать, что функция не принадлежит клону K_{10}, а используя четыре последних, — что функция не принадлежит клону K_{15}. □

Лемма 4. *Пусть функция f принадлежит клону K_{10} и $f(1, ..., 1) = 2$. Если f не принадлежит клону K_{12}, то она не принадлежит клону K_9.*

Доказательство. Очевидно, что f не возвращает 1 (в этом случае она не принадлежит клону K_{10}). Пусть гиперфункция не принадлежит клону K_{12}. Тогда на наборах из предиката R_{12} она возвращает (220), (020) или (200). Если в матрице, соответствующей предикату R_{12}, удалить первую или вторую строки, то оставшиеся наборы будут принадлежать предикату R_9. И тогда получаем, что на наборах из предиката R_9 функция возвращает (20). □

Лемма 5. *Пусть $f(0,...,0)=0$ и $f(1,...,1)=1$. Если гиперфункция f не принадлежит клону K_8, то она не принадлежит клону K_{12} или не принадлежит клону K_{13}.*

Доказательство. Пусть гиперфункция не принадлежит клону K_8. Это означает, что выполняется

$$f\begin{pmatrix}0\,1\,2\\1\,0\,2\end{pmatrix}\cap\begin{Bmatrix}0\,1\,2\,2\,0\,1\\2\,2\,0\,1\,0\,1\end{Bmatrix}\neq\varnothing.$$

В каждом из 6 возможных случаев убеждаемся в справедливости утверждения.

Для случаев 1, 3, 5 функция не принадлежит клону K_{12}, в остальных — K_{13}.

Для клона K_{12}:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,0\,2\\1\,1\,1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,1\,2\\1\,0\,1\\1\,1\,1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,1\,1\\1\,0\,1\\1\,1\,1\end{pmatrix}.$$

Для клона K_{13}:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\\1\,0\,2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,2\\1\,0\,0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in f\begin{pmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\\1\,0\,0\end{pmatrix}.$$

□

Лемма 6. *Если гиперфункция не принадлежит клону K_{10}, то она не принадлежит клону K_9 или не принадлежит клону K_8.*

Доказательство. Пусть гиперфункция не принадлежит клону K_{10}. Тогда выполняется

$$f\begin{pmatrix}0\,0\,1\,0\,2\,2\,2\\1\,0\,1\,2\,1\,0\,2\end{pmatrix}\cap\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,2\end{Bmatrix}\neq\varnothing.$$

В первом варианте легко показывается, что функция не принадлежит K_9:

$$f\begin{pmatrix}0\,0\,1\,0\,2\,0\,2\\1\,0\,1\,2\,1\,0\,2\end{pmatrix}\ni\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Для второго варианта предположим, что функция принадлежит клону K_8. Тогда, если $1\in f(0010222)$, то $0\in f(1101222)$.

Если $2\in f(1012102)$ и есть уточнение набора, при котором функция возвращает 0, то она не принадлежит K_9. Поэтому предполагаем, что есть уточнение, при котором функция возвращает 2, т. е. $2\in f(101\alpha10\beta)$ для некоторых α и β. Так как функция принадлежит K_8, то $f(010\bar{\alpha}01\bar{\beta})=2$.

Но тогда

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in f \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,\bar{\alpha}\,0\,1\,\bar{\beta} \\ 1\,1\,0\,1\,2\,2\,2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Лемма 7. *Если гиперфункция не принадлежит клону K_9, то она не принадлежит клону K_{10} или не принадлежит клону K_8.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 8. *Пусть $f(1, ..., 1) \in \{1, 2\}$. Тогда если гиперфункция не принадлежит клону K_{12}, то она не принадлежит клону K_{15}.*

Доказательство. Так как гиперфункция не принадлежит клону K_{12}, то выполняется

$$f\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 0\,0\,1\,1\,2\,0\,0\,1\,1\,2\,2\,0\,1\,1\,2 \\ 0\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,2\,1\,0\,2\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,1\,0\,2\,2\,2\,1\,0\,1\,0\,2\,2 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

Слева добавим сверху строку из одних 1. Получим

$$f\begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 0\,0\,1\,1\,2\,0\,0\,1\,1\,2\,2\,0\,1\,1\,2 \\ 0\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,2\,1\,0\,2\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,1\,0\,2\,2\,2\,1\,0\,1\,0\,2\,2 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing$$

или

$$f\begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 0\,0\,1\,1\,2\,0\,0\,1\,1\,2\,2\,0\,1\,1\,2 \\ 0\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 222222222222 \\ 011210220220 \\ 010222101022 \\ 100000000111 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

Слева все наборы, прочитанные снизу вверх, принадлежат предикату R_{15}, а справа — нет. $\square$

Лемма 9. *Пусть $f(0, ..., 0) = 2$. Тогда если гиперфункция не принадлежит клону K_{13}, то она не принадлежит клону K_{15}.*

Доказательство. Так как гиперфункция не принадлежит клону K_{13} и на наборе из всех нулей возвращает 2, то выполняется

$$f\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0\,0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 1\,0\,0\,0\,1\,2\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,2\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,0\,0\,0\,1\,2\,0\,1\,2\,0\,1\,2 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 2\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,2\,1\,2\,2\,1 \\ 0\,2\,1\,0\,0\,1\,2\,2\,1\,2\,1\,2 \\ 2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

Слева первые три строки сверху вниз образованы наборами из предиката R_{13}. В результате, слева все наборы принадлежат предикату R_{15}, а справа — нет. $\square$

Лемма 10. *Пусть $f(0,...,0)=0$. Тогда, если f не принадлежит клону K_{10}, то она не принадлежит клону K_{15}.*

Доказательство. Так как гиперфункция не принадлежит клону K_{10}, то выполняется

$$f\begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,2\,2\,2 \\ 1\,0\,1\,2\,1\,0\,2 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0, & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

Здесь первые две строки слева образованы наборами из предиката R_{10}.

Столбцы слева дополняем до наборов из предиката R_{15}. Получившиеся столбцы справа не принадлежат предикату R_{15}. □

Лемма 11. *Пусть $f(0,...,0)=0$, $f(1,...,1)=2$. Тогда, если f не принадлежит клону K_9, то она не принадлежит клону K_{15}.*

Доказательство. Следует из лемм 1 и 8. □

Лемма 12. *Пусть $f(0,...,0)=0$, $f(1,...,1)=2$, f принадлежит K_{10} и принадлежит K_9. Тогда, если f не принадлежит клону K_{15}, то она не принадлежит клону K_{13}.*

Доказательство. Очевидно, что гиперфункция ни на одном из наборов не возвращает 1 (иначе она не принадлежит K_{10}). Это замечание и предположение о том, что гиперфункция не принадлежит клону K_{15}, приводит к утверждению

$$f\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,2\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,0 \\ 0\,1\,2\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2, & 2, & 0, & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

Так как гиперфункция на наборе из всех нулей возвращает 0 и принадлежит K_9, то справедливо

$$f(00000002222222)=0.$$

Из утверждения

$$f\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,2 \\ 0\,0\,0\,2\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,0 \\ 0\,1\,2\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2, & 2, & 0, & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing$$

выбором подходящих строк получаем справедливость леммы. □

Лемма 13. *Пусть гиперфункция f ни на одном наборе не возвращает 0. Тогда, если f не принадлежит клону K_{15}, то она не принадлежит клону K_{12}.*

Доказательство. По условию леммы выполняется

$$f\begin{pmatrix} 2 & \dots & 2 & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{27} & 0\,0\,0\,2\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,0\,1\,1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_{27} & 0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{27} & 0\,1\,2\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2, & 2, & 1, & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing.$$

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = \overline{1, \dots, 27}) \in \{0, 1, 2\}$. Так как функция f принадлежит клону K_{10}, то на наборе $(2 \dots 22222221111111)$ она возвращает 1.

Рассматривая

$$f\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{27} & 0\,0\,0\,2\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,2\,0\,1\,1 \\ \beta_1 & \dots & \beta_{27} & 0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,0 \\ 2 & \dots & 2 & 2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$f\begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_{27} & 0\,0\,0\,0\,0\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,0 \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_{27} & 0\,1\,2\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,2\,1\,1\,1\,1 \\ 2 & \dots & 2 & 2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

получаем необходимое заключение. □

Теорема 1. *Множество $H \setminus O$ разбивается не более чем на 49 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным мультиклонам.*

Доказательство. Рассмотрим 9 вариантов, соответствующих значениям функции на наборах, образованных одними нулями или одними единицами.

В каждом таком варианте принадлежность клонам K_1–K_4 устанавливается однозначно. Значит осталось рассмотреть принадлежность 7 клонам — K_7–K_{10}, K_{12}, K_{13} и K_{15}.

Рассмотрим значения гиперфункции на наборе из всех нулей.

Случай 1. Гиперфункция принимает значение 0. Дальнейшие наши рассуждения зависят от значения гиперфункции на наборе, образованном одними единицами.

Случай 1.1. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 0.

С учетом того, что на некотором наборе функция возвращает 2, несложно заметить, что она не принадлежит классам K_7, K_8, K_9, а по лемме 1 не принадлежит клону K_{12}.

Если хотя бы на одном наборе гиперфункция принимает значение равное 1, то она не принадлежит клону K_{10}, а в соответствии с леммой 2 и клону K_{13}.

Утверждение

$$f\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} \cap \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \neq \varnothing$$

показывает, что функция не принадлежит клону K_{15}.

В результате остается один класс.

Для завершения случая 1.1. надо рассмотреть функции, которые возвращают только 0 и 2. Все такие функции принадлежат клону K_{10} и осталось рассмотреть принадлежность двум клонам K_{13}, K_{15}.

Любой набор из предиката R_{13} можно дополнить до набора из предиката R_{15}. Поэтому, если функция не принадлежит клону K_{13}, то с учетом того, что функция возвращает только 0 и 2, на наборах из предиката R_{13} она может возвратить единственный набор — (022). Все наборы вида (022μ) не принадлежат предикату R_{15}, а потому и функция не сохраняет данный предикат. Число возможных классов в этом случае не более 3.

Итак, в случае 1.1 число всевозможных классов не более 4.

Случай 1.2. Гиперфункция на наборе из всех единиц принимает значение 2.

Отношение принадлежности к клонам K_7, K_8 определяется тривиально. Если гиперфункция не принадлежит клону K_{10}, то по леммам 2 и 10 она не принадлежит клонам K_{13} и K_{15}. С учетом леммы 1 число классов не более 3.

Пусть теперь гиперфункция принадлежит клону K_{10}. Если она не принадлежит клону K_9, то по леммам 1, 11 она не принадлежит клону K_{15}. Остается два возможных варианта.

Если же она принадлежит клону K_9, то по лемме 4 она должна принадлежать и клону K_{12}. Так как она принадлежит клону K_{10}, то ни на одном из наборов ее значение не равно 1.

И воспользовавшись леммами 3 и 12, заключаем, что число классов не более 2.

Всего получаем не более 7 вариантов.

Случай 1.3. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 1.

Такая функция принадлежит клону K_7.

Равенство $f\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ показывает, что гиперфункция не принадлежит клону K_{15} и остается 5 классов и 32 варианта.

Если гиперфункция не принадлежит клону K_8, то леммы 1, 2, 5 оставляют 8 вариантов.

Если гиперфункция принадлежит клону K_8, то леммы 1, 2, 6, 7, оставляют 5 вариантов, а из принадлежности гиперфункции клону K_8 следуют равенства $f\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $f\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, показывающие, что гиперфункция не принадлежит клонам K_{13} и K_{12}. Остается 2 варианта.

В случае 1.3. получаем не более 10 вариантов.

Случай 2. Гиперфункция на наборе из всех нулей возвращает 1.

Все такие функции не принадлежит клонам K_7, K_{10} и по лемме 2 клону K_{13}.

Случай 2.1. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 0.

Равенство $f\begin{pmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ показывает, что гиперфункция не принадлежит клону K_9 (а по лемме 1 и клону K_{12}).

Покажем, что в этом случае гиперфункция не принадлежит и клону K_{15}.

Пусть на наборе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ функция возвращает 2. Если на противоположном наборе она возвращает 0 или 2, то получаем

$$f\begin{pmatrix}0 & \ldots & 0\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n\\ 0 & \ldots & 0\\ \bar{\alpha}_1 & \ldots & \bar{\alpha}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0 \text{ или } 2\end{pmatrix},$$

а если возвращает 1, то

$$f\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \ldots & \alpha_n\\ \bar{\alpha}_1 & \ldots & \bar{\alpha}_n\\ 1 & \ldots & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Следовательно гиперфункция не принадлежит K_{15}. И остается 2 варианта относительно принадлежности клону K_8.

Случай 2.2. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 1.

То, что гиперфункция не принадлежит клону K_8 устанавливается непосредственно.

Остались классы K_9, K_{12}, K_{15} и не более 8 вариантов.

Леммы 8 и 1 оставляют 4 варианта.

Случай 2.3. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 2.

Принадлежность клону K_8 определяется однозначно.

Леммы 8 и 1 оставляют тоже 4 варианта.

Случай 3. Гиперфункция на наборе из всех нулей возвращает 2.

Сразу же замечаем, что она не принадлежит клону K_7. Осталось рассмотреть принадлежность 6 оставшимся клонам.

Случай 3.1. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 0.

Такая функция не принадлежит клонам K_8, K_9 (следовательно, по лемме 1 и клону K_{12}). Осталось 3 клона — K_{10}, K_{13} и K_{15} и не более 8 вариантов.

Лемма 2 убирает 2 варианта и лемма 9 убирает 2 варианта. Осталось 4 варианта.

Случай 3.2. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 1.

Относительно клона K_8 все очевидно. Осталось 5 клонов и 32 варианта.

Случай 3.2.1. Пусть гиперфункция не принадлежит клону K_9. Значит она не принадлежит и клону K_{12}. По лемме 8 не принадлежит клону K_{15}. Теперь по лемме 2 исключаем вариант, при котором функция не принадлежит клону K_{10}, но принадлежит клону K_{13}. И осталось 3 варианта.

Случай 3.2.2. Пусть гиперфункция принадлежит клону K_9. Очевидно, что гиперфункция ни на одном из наборов не возвращает 0.

Если такая функция не принадлежит клону K_{10}, то по лемме 2 она не принадлежит клону K_{13}, а по лемме 9 она не принадлежит и клону K_{15}.

Осталось 2 варианта.

Если же гиперфункция принадлежит клону K_{10}, то в рассматриваемом случае она обязана принадлежать клону K_{13}.

Леммы 8 и 13 оставляют не более 2 вариантов.

Случай 3.3. Гиперфункция на наборе из всех единиц возвращает 2.

В векторе принадлежности максимальным клонам первые 7 элементов есть 0011011.

а) Если гиперфункция возвращает только 2, то ей соответствует 1 класс.

б) Пусть гиперфункция возвращает 0 и не возвращает 1.

Очевидно, что она не принадлежит клонам K_8, K_9 и следовательно клону K_{12} и принадлежит клону K_{10}.

Равенство $f\begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ показывает, что функция не принадлежит и клону K_{15}.

Остается не более 2 вариантов.

в) Пусть гиперфункция возвращает 1 и не возвращает 0.

Случай рассматривается аналогично предыдущему. Остается не более 2 вариантов.

г) Пусть гиперфункция возвращает 1 и возвращает 0.

Очевидно, что она не принадлежит клонам K_9, K_{10}, K_{12}, K_{13}, K_{15} и остается не более 2 вариантов. □

В таблице ниже приведен список из 49 функций и соответствующие им различные векторы принадлежности максимальным клонам. Все функции зависят от трех переменных и представлены векторами значений на всех наборах, записанных в натуральном порядке.

С учетом классов, порождаемых булевыми функциями, можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 2. *Множество всех гиперфункций разбивается на 67 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным мультиклонам.*

Таблица

Гиперфункции и соответствующие им классы

№	функция	вектор
1	10000020	111101111111111
2	10000002	101101111111111
3	10022110	111101101111111
4	20000010	011101111111111
5	00000120	010101111111111
6	10000021	101001111111111
7	11212112	101101110111111
8	20000012	001101111111111
9	20000220	011101111011111
10	00000220	010101111011111
11	00001002	000101111111111
12	11111221	101001110111111
13	11111222	101101110110111
14	20000020	011101111011011
15	20000222	001101111011111
16	20001001	001001111111111
17	20001112	001101101111111
18	21212112	001101110111111
19	00000012	000101110111111
20	00002220	010101111011011
21	00022002	000101111011111
22	11111112	101101110110110
23	11212121	101001110110111
24	20000000	011101111011010
25	20000002	001101111011011
26	20000111	001001111011111
27	21111112	001101110110111
28	21111221	001001110111111
29	00000020	010101111011010
30	00001021	000001011111111
31	00001112	000101110110111
32	00002002	000101111011011
33	11111121	101001110110110
34	20000001	001001111011011
35	21111121	001001110110111
36	00000222	000101110010111
37	00001121	000001010111111
38	00012001	000001011011111
39	00122011	000001001111111
40	21212111	001001110011011
41	00000121	000001010011111
42	00002001	000001011011011
43	00111211	000001010110111
44	00000002	000101110010010
45	00000021	000001010011011
46	00021111	000001010010111
47	00022111	000001000011111
48	21111111	001001110010010
49	22222222	001101100010000

Список литературы

1. Казимиров А. С. О классах булевых функций, порожденных максимальными мультиклонами / А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев // Вестн. Бурят. гос. ун-та. Математика и информатика. – 2015. – Вып. 9. – С. 16–22.
2. Казимиров А. С. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 / А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев, Л. В. Токарева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 61–78.

3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 3. – С. 95–114.
4. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М. : Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
5. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики / С. В. Яблонский // Мат. сб. – 1952. – Т. 30, № 2(72), С. 329–348.
6. Krnic L. Types of bases in the algebra of logic / L. Krnic // Glasnik matematicko-fizicki i astronomski. – 1965. – Ser. 2. – Vol. 20. – P. 23–32.
7. Classifikation and basis enumarations in many-valued logics / M. Miykawa, I. Stojmenovic, D. Lau, I. Rosenberg // Proc 17th International Symposium on Multi-Valued logic. – Boston, 1987. – P. 151–160.
8. Classifikation and basis enumarations of the algebras for partial functions / M. Miykawa, I. Stojmenovic, D. Lau, I. Rosenberg // Proc 19th International Symposium on Multi-Valued logic. – Rostock, 1989. – P. 8–13.
9. Lau D. Classification and enumaration of bases in $P_k(2)$ / D. Lau, M. Miykawa // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 01, N 02. – P. 255–282. https://doi.org/10.1142/S1793557108000242
10. Stojmenovic I. Classification of P_3 and the enumeration of bases of P_3 / I. Stojmenovic // Rev. of Res. 14, Fat. of Sci., Math. Ser. Novi Sad. – 1984. – P. 73–80.
11. Miyakawa M. Classification of three-valued logical functions preserving 0 / M. Miyakawa, I. Rosenberg, I. Stojmenovic // Discrete Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 28. – P. 231—249. https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 200567
(e-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`)

Зинченко Анна Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 242210 (e-mail: `azinchenko@gmail.com`)

V. I. Panteleyev, A. S. Zinchenko

On Classes of Hyperfunctions of Rank 2 Generated by Maximal Multiclones

Abstract. The research of multifunctions is a one of the directions in discrete function's investigations. Multifunction is a discrete function from a finite set A to all subsets of A. The set of hyperfunctions is a subset of set of multifunctions. Hyperfunction is a discrete function from a finite set A to all nonempty subsets of A.

The subset relation of hyperfunctions to maximal multiclones is a relation of equivalence and according it all hyperfunctions are divided into equivalence classes. Based on this equivalence it is possible to estimate the cardinality of all possible bases, calculate the number of different types of bases of the same cardinality, and construct some intervals of the clone lattice.

Knowing the number of maximal clones, we can obtain upper-bound estimate of the number of such classes as the cardinality of the set of all subsets of the set of maximal clones. It possible to lower this estimate by using properties of the hyperfunctions . A lower-bound estimate for the number of classes can be obtained by constructing the corresponding classes.

It is noteworthy that the complexity of the problem of describing all equivalence classes increases essentially with the cardinality of the set of maximal clones increasing.

This paper considers multifunctions on a two-element set. The number of maximal multiclones equals to 15 (Panteleyev V.I., 2009)

The primary purpose of this research is describing the classification of the set of hyperfunctions into equivalence classes. As Kazimirov A.S. and Panteleyev V.I. showed there are 18 equivalence classes on the set of Boolean functions, which is a subset of the set of hyperfunctions. In this paper were obtained special properties of hyperfunctions and were described all the equivalence classes generated by functions of 3 arguments having applied a computer experiment. The obtained results made it possible to show that the subset relation of hyperfunctions to maximal multiclones splits the set of all hyperfunctions into 67 equivalence classes.

Keywords: hyperclone, basis; hyperfunction, complete set, superposition, closed set, multifunction.

References

1. Kazimirov A.S., Panteleyev V.I. On the classes of Boolean functions generated by maximal multiclones *Vestn. Buryat. Gos. Univ., Mat., Inf.*, 2015, vol. 9, pp. 16-22. (in Russian)
2. Kazimirov A.S., Panteleyev V.I., Tokareva L.V. Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.*, 2014, vol. 7, pp. 61-78. (in Russian)
3. Panteleyev V.I. The criteria of completeness for redefining boolean function *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, 2009, vol. 9, no 3, pp. 95-114. (in Russian)
4. Tarasov V. V. A test for the completeness of not everywhere defined functions of the algebra of logic *Problemy Kibernet.*, 1975, vol. 30, pp. 319-325. (in Russian)
5. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no 2(72), pp. 329-348. (in Russian)
6. Krnic L. Types of bases in the algebra of logic. *Glasnik matematicko-fizicki i astronomski*, 1965, ser. 2, vol. 20, pp. 23–32.
7. Miykawa M., Stojmenovic I., Lau D., Rosenberg I. Classifikation and basis enumarations in many-valued logics *Proc 17th International Symposium on Multi-Valued logic*, Boston, 1987, pp. 151-160.
8. Miykawa M., Stojmenovic I., Lau D., Rosenberg I. Classifikation and basis enumarations of the algebras for partial functions *Proc 19th International Symposium on Multi-Valued logic*, Rostock, 1989, pp. 8–13.
9. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumaration of bases in $P_k(2)$ *Asian-European Journal of Mathematics* 2008, vol. 1, no. 2, pp. 255–282. https://doi.org/10.1142/S1793557108000242
10. Stojmenovic I. Classification of P_3 and the enumeration of base of P3, *Rev. of Res. 14, Fat. of Sci., Math. Ser.*, Novi Sad, 1984, pp. 73–80.

11. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenovic I. Classification of three-valued logical functions preserving 0 *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231–249. https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W

Panteleyev Vladimir Innokent'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952) 200567 (e-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`)

Zinchenko Anna Sergeevna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003 tel.: (3952) 242210 (e-mail: `azinchenko@gmail.com`).