Серия «Математика»
2014. Т. 10. С. 93—105

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716

Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 *

В. И. Пантелеев
Иркутский государственный университет

Л. В. Рябец
Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается действие оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства (E-оператор) для множества гиперфункций на двухэлементном множестве.

По отношению к этому оператору строятся полные множества гиперфункций. Показывается, что число предполных множеств равно четырем, формулируется и доказывается критерий функциональной полноты.

На множестве рассматриваемых гиперфункций вводится отношение эквивалентности, соответствующее принадлежности гиперфункций к E-предполным множествам. Показано, что множество всех гиперфункций разбивается на 14 классов эквивалентности.

Среди полных множеств выделяются минимальные полные множества — базисы. Показано, что существуют базисы мощности 1, 2, 3 и не существует базисов большей мощности. Для базиса мощности 1 есть только один тип — функция из базиса не принадлежит ни одному из предполных множеств. Для базиса мощности 2 имеется 23 различных типа, для базиса мощности 3 имеется 11 различных типов.

Ключевые слова: замыкание, предикат равенства, гиперфункция, замкнутое множество, суперпозиция; критерий полноты.

1. Введение

В рамках дискретных функций одним из важнейших объектов исследований являются функциональные системы — пары (P, Q), где P — множество функций, Q – множество операторов, заданных на P.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: проекты № 12-01-00351, № 13-01-00621

Наряду с классическими функциональными системами, в которых множествами являются множество булевых функций или множество функций k-значной логики, достаточно давно изучаются и функциональные системы, где рассматриваются обобщения функций k-значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A относительно оператора суперпозиции (см, например, [2; 3; 12–15]).

При этом, кроме оператора суперпозиции используются операторы замыкания, которые существенно сильнее оператора суперпозиции. Одним из таких операторов является оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства. Исследование действия оператора замыкания на множестве булевых функций, частичных булевых функций и на множестве функций многозначной логики можно посмотреть в работах [4–6].

В статье исследуется действие оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций. В терминах E-предполных классов устанавливается критерий E-полноты. Дается классификация гиперфункций по принадлежности E-предполным классам, с использованием приведенного разбиения подсчитывается число различных типов базисов одинаковой мощности.

Пусть $E_2 = \{0,1\}$ и $\alpha_i \in E_2$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, тогда выражение $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ называется двоичным набором или просто набором и обозначается $\tilde{\alpha}$, а число n называется длиной этого набора. Если длина набора $\tilde{\alpha}$ явно не указана, она определяется по контексту. Набор $\tilde{\beta}$ назовем противоположным набору $\tilde{\alpha}$, если длины этих наборов совпадают и $\beta_i = \overline{\alpha}_i$ для всех $i \in \{1,\ldots,n\}$. Набор $(0,\ldots,0)$ называется нулевым и будет обозначаться через $\tilde{0}$, а набор $(1,\ldots,1)$ — единичным и обозначаться через $\tilde{1}$.

Пусть $|A|$ — мощность множества A, тогда 2^A — множество всех подмножеств множества A. Определим P_2 — множество всех функций и P_2^- — множество всех гиперфункций ранга 2 следующим образом:

$$P_{2,n}^- = \left\{f \mid f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\right\},\ P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-,$$

$$P_{2,n} = \left\{f \mid f \in P_{2,n}^- \text{ и } |f(\tilde{\alpha})| = 1 \text{ для всех } \tilde{\alpha} \in E_2^n\right\},\ P_2 = \bigcup_n P_{2,n}.$$

При дальнейшем изложении мы не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение $-$ (прочерк).

Одноместную гиперфункцию f из P_2^- иногда будем записывать в виде вектора $(f(0)\,f(1))$. Например, вектором $(-\,0)$ обозначим такую гиперфункцию $f(x)$, что $f(0) = -$ и $f(1) = 0$. Некоторые гиперфунк-

Известия Иркутского государственного университета.
2014. Т. 10. Серия «Математика». С. 93–105

ции f, зависящие от n переменных, будем записывать в виде вектора $(\alpha_{\tilde{0}}, \ldots, \alpha_{\tilde{1}})$ длины 2^n, где каждый элемент $\alpha_{\tilde{\sigma}} = f(\tilde{\sigma})$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)$ — гиперфункции. Определим суперпозицию гиперфункций

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Если набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{1.1}$$

Пусть $Q \subseteq P_2^-$. Замыканием множества Q называется множество всех гиперфункций из P_2^-, которые можно получить из Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных и суперпозиции. Множество называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием. Замкнутые множества также будем называть замкнутыми классами.

Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n)$ — гиперфункции. Будем говорить, что гиперфункция $g(x_1, \ldots, x_n)$ получается из гиперфункций f_1, f_2 с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Определим E-замыкание множества $Q \subseteq P_2^-$ как множество всех гиперфункций из P_2^-, которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, суперпозиции и разветвления по предикату равенства. Множество гиперфункций, которое совпадает со своим E-замыканием называется E-замкнутым классом. Будем говорить, что множество $R \subseteq Q$ E-порождает E-замкнутый класс Q (E-полно в классе Q), если E-замыкание множества R совпадает с классом Q.

Обозначим через T_0^- множество всех гиперфункций из P_2^-, которые на нулевом наборе принимают значение 0 или $-$. Двойственным образом определим множество T_1^-.

Через S^- обозначим множество всех гиперфункции из P_2^-, которые на любой паре противоположных наборов из E_2^n принимают значения, отличные от $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

В [7] показана замкнутость классов T_0^-, T_1^-, S^- относительно суперпозиции (1.1).

Утверждение 1. *Класс T_0^- является E-замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим гиперфункции $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ из класса T_0^-. Пусть гиперфункция $g(\tilde{x})$ получена из f_1, f_2 применением оператора разветвления по предикату равенства (1.2). В силу этого определения $g(0,\ldots,0) = f_1(0,\ldots,0)$. Тогда $g(0,\ldots,0) \in \{0,-\}$, следовательно, $g(\tilde{x}) \in T_0^-$. □

Аналогичным утверждением можно показать, что класс T_1^- также является E-замкнутым.

Утверждение 2. *Класс S^- является E-замкнутым.*

Доказательство. Рассмотрим гиперфункции $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ из класса S^-. Пусть гиперфункция $g(\tilde{x})$ получена из f_1, f_2 применением оператора разветвления по предикату равенства. Рассмотрим значения $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)$. Согласно определению (1.2) рассмотрим компоненты наборов с номерами i и j:

1) Если $\alpha_i = \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n) = f_1(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)$.

2) Если $\alpha_i \neq \alpha_j$, то $\overline{\alpha}_i \neq \overline{\alpha}_j$. Тогда $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = f_2(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и $g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n) = f_2(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n)$.

Таким образом, значения гиперфункции $g(\tilde{x})$ на противоположных наборах совпадают с соответствующими значениями гиперфункции $f_1(\tilde{x})$ или гиперфункции $f_2(\tilde{x})$, следовательно, $g(\tilde{x}) \in S^-$. □

2. Критерий E-полноты в классе P_2^-

В [4] показано, что система функций $\{0,1\}$ E-полна в классе P_2.

Лемма 1. *Система гиперфункций $\{0,1,-\}$ E-полна в классе P_2^-.*

Доказательство. Поскольку система $\{0,1\}$ E-полна в классе P_2, то для дальнейших рассуждений можно воспользоваться содержащейся в P_2 тождественной функцией. На основе операции разветвления по предикату равенства определим гиперфункцию g такую, что

$$g(x,y,z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ -, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $f(\tilde{x})$ — произвольная гиперфункция из P_2^-. Выберем $f_1(\tilde{x})$ и $f_2(\tilde{x})$ из P_2 такие, что для любого набора $\tilde{\alpha}$ выполняется условие $f_1(\tilde{\alpha}) = f_2(\tilde{\alpha})$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\alpha}) \neq -$.

Пусть $f_3(\tilde{x}) \in P_2$ такая, что для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ справедливо

$$f_3(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \text{если } f(\tilde{\alpha}) = -, \\ f(\tilde{\alpha}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда гиперфункцию $f(\tilde{x})$ можно представить как суперпозицию следующего вида:

$$f(\tilde{x}) = g(f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), f_3(\tilde{x})).$$

□

Следствие 1. *Класс P_2 является E-предполным в классе P_2^-.*

Лемма 2. *Класс T_0^- является E-предполным в классе P_2^-.*

Доказательство. Рассмотрим гиперфункцию $g(\tilde{x})$ такую, что она не принадлежит классу T_0^-. Тогда на нулевом наборе гиперфункция $g(\tilde{x})$ будет принимать значение 1. Очевидно, что гиперфункции 0 и $-$ принадлежат T_0^-. Суперпозиция гиперфункции $g(\tilde{x})$ и константы 0 даст константу 1.

Таким образом, получили множество гиперфункций $\{0, 1, -\}$, которое по лемме 1 образует в P_2^- E-полную систему гиперфункций. □

Аналогичным образом можно показать, что класс T_1^- E-предполон в классе P_2^-.

Лемма 3. *Класс S^- является E-предполным в классе P_2^-.*

Доказательство. Рассмотрим гиперфункцию $g(\tilde{x})$ такую, что она не принадлежит классу S^-. Тогда существует пара противоположных наборов, на которых значения гиперфункции $g(\tilde{x})$ равны 0 или 1. Предположим, что существует набор $\tilde{\alpha}$ из E_2^n такой, что

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n) = 0.$$

Далее воспользуемся содержащимися в классе S^- гиперфункциями x, $\overline{x}$ и $-$. С помощью операции разветвления по предикату равенства определим гиперфункцию $h(x, y)$ такую, что

$$h(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ g(\tilde{\beta}), & \text{иначе.} \end{cases},$$

где каждый элемент β_i набора $\tilde{\beta}$ формируется следующим образом:

$$\beta_i = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ y, & \text{иначе.} \end{cases}.$$

Тогда гиперфункция $h(x,y)$ представляет собой конъюнкцию (0001). Подставим тождественную функцию и функцию отрицания в $h(x,y)$ и получим $h(x,\overline{x}) \equiv 0$. Гиперфункция $\overline{x}$ и константа 0 позволяют получить константу 1.

Таким образом, был получен набор функций $\{0,1,-\}$, который по лемме 1 образует в P_2^- E-полную систему функций.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = g(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_n) = 1.$$

Построенная по такому же принципу гиперфункция $h(x,y)$ в этом случае будет представлять дизъюнкцию (0111), которая при подстановке в нее тождественной функции и функции отрицания даст константу 1. □

Теорема 1. *Система гиперфункций из P_2^- E-полна в классе P_2^- тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов P_2, T_0^-, T_1^-, S^-.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что классы P_2, T_0^-, T_1^-, S^- E-замкнуты и отличны от класса P_2^-.

Покажем достаточность. Пусть f_1, f_2, f_3, f_4 — гиперфункции, которые не входят соответственно в P_2, T_0^-, T_1^-, S^-. Покажем, что эта система функций E-полна в классе P_2^-.

Отождествлением переменных гиперфункций f_2, f_3, f_4 можно получить гиперфункции $g_2(x)$, $g_3(x), g_4(x,y)$ такие, что

$$g_2(0) = 1, \;\; g_3(1) = 0, \;\; g_4(0,1) = g_4(1,0) \neq -.$$

Для гиперфункции f_1 отождествлением переменных можно получить такую гиперфункцию $g_1(x,y)$, для которой найдется набор $(\alpha_1,\alpha_2) \in E_2^2$, что $g_1(\alpha_1,\alpha_2) = -$.

Для доказательства теоремы рассмотрим все возможные варианты гиперфункции $g_4(x,y)$, представленные в табл. 1.

Случай 1. $g_4(x,y) = g_4^1(x,y) = 0$ или $g_4(x,y) = g_4^2(x,y) = 1$.

Здесь гиперфункция g_4 представляет собой константу. Другую константу можно получить подстановкой g_4 в гиперфункцию g_2 или g_3. С помощью обеих констант и гиперфункции g_1 получаем гиперфункцию $-$. По лемме 1 система гиперфункций, состоящая из констант и гиперфункции $-$, является E-полной в P_2^-.

Случай 2. $g_4(x,y) = g_4^3(x,y) = (0001)$.

Обозначим через $h_{3,1}(x)$ суперпозицию $g_4(g_3(x), g_3(x))$. Рассмотрим значения полученной гиперфункции:

1) $h_{3,1}(x) \equiv 0$, тогда доказательство сводится к рассмотренному ранее случаю 1;

2) $h_{3,1}(x) = (1\,0)$, множество функций $\{(0001), (10)\}$ является полным в P_2, что возвращает нас к случаю 1;

3) $h_{3,1}(x) = (-\,0)$, тогда вычислим $h_{3,2}(x) = h_{3,1}(g_2(x))$. Полученная гиперфункция $h_{3,2}(x)$ может быть константой 0 или гиперфункцией $(0\,-)$.

Таблица 1

Возможные варианты гиперфункции $g_4(x, y)$

$g_4^1(x,y) = (0000)$	$g_4^7(x,y) = (1000)$	$g_4^{13}(x,y) = (0110)$
$g_4^2(x,y) = (1111)$	$g_4^8(x,y) = (1001)$	$g_4^{14}(x,y) = (011\,-)$
$g_4^3(x,y) = (0001)$	$g_4^9(x,y) = (100\,-)$	$g_4^{15}(x,y) = (1110)$
$g_4^4(x,y) = (0111)$	$g_4^{10}(x,y) = (-\,000)$	$g_4^{16}(x,y) = (111\,-)$
$g_4^5(x,y) = (-\,111)$	$g_4^{11}(x,y) = (-\,001)$	$g_4^{17}(x,y) = (-\,110)$
$g_4^6(x,y) = (000\,-)$	$g_4^{12}(x,y) = (-\,00\,-)$	$g_4^{18}(x,y) = (-\,11\,-)$

Интерес представляет вариант, когда $h_{3,2}(x) = (0\,-)$. Вычислим суперпозицию

$$g_4(h_{3,1}(x), h_{3,2}(x)) = (00).$$

Таким образом, была получена константа 0, что опять же позволяет вернуться к случаю 1.

Случай 3. $g_4(x, y) = g_4^4(x, y) = (0111)$. Этот случай является двойственным к случаю 2.

Обозначим через $h_{4,1}(x)$ суперпозицию $g_4(g_2(x), g_2(x))$ и рассмотрим значения полученной гиперфункции:

1) $h_{4,1}(x) \equiv 1$, тогда доказательство сводится к случаю 1;

2) $h_{4,1}(x) = (1\,0)$, множество функций $\{(0111), (10)\}$ является полным в P_2, что позволяет вернуться к случаю 1;

3) $h_{4,1}(x) = (1\,-)$, тогда вычислим $h_{4,2}(x) = h_{4,1}(g_3(x))$. Полученная гиперфункция $h_{4,2}(x)$ может быть константой 1 или гиперфункцией $(-\,1)$.

Если $h_{4,2}(x) = (-\,1)$, то

$$g_4(h_{4,1}(x), h_{4,2}(x)) = (11).$$

Таким образом, была получена константа 1, что позволяет вернуться к случаю 1.

Случай 4. $g_4(x,y) = g_4^5(x,y) = (-\,111)$.

Рассмотрим суперпозицию $h_{5,1}(x)$ гиперфункций g_2, g_3 и гиперфункции g_4 такую, что $h_{5,1}(x) = g_4(g_2(x), g_3(x))$. Тогда $h_{5,1}(x)$ есть либо константа 1, либо гиперфункция $(1\,-)$.

Рассмотрим вариант, когда $h_{5,1}(x) = (1\,-)$, и вычислим суперпозицию $h_{5,2}(x) = h_{5,1}(g_3(x))$. Гиперфункция $h_{5,2}(x)$ может быть либо константой 1, либо гиперфункцией $(-\,1)$. Для варианта, когда $h_{5,2}(x) = (-\,1)$, построим суперпозицию

$$g_4(h_{5,1}(x), h_{5,2}(x)) = (11).$$

Случай 5. $g_4(x,y) = g_4^6(x,y) = (000\,-)$.

Суперпозиция гиперфункций g_2, g_3 и гиперфункции g_4 позволяет получить либо константу 0, либо гиперфункцию $(-\,0)$. Положим $h_{6,1}(x) = (-\,0)$. Вычислим суперпозицию $h_{6,2}(x) = h_{6,1}(g_2(x))$. Гиперфункция $h_{6,2}(x)$ может быть либо константой 0, либо гиперфункцией $(0\,-)$. Для варианта, когда $h_{6,2}(x) = (0\,-)$, построим суперпозицию

$$g_4(h_{6,1}(x), h_{6,2}(x)) = (00),$$

что возвращает рассуждения к случаю 1.

Случай 6. Пусть гиперфункция $g_4 \in \{g_4^7, \ldots, g_4^{12}\}$ (второй столбец в табл. 1).

Определим гиперфункцию $g_{3,2}(x)$ как суперпозицию гиперфункций $g_3(g_2(x))$. Тогда гиперфункция $g_{3,2} \in \{(0\,0), (0\,1), (0\,-)\}$. На основе оператора разветвления по предикату равенства определим $v(x,y)$ такую, что

$$v(x,y) = \begin{cases} g_{3,2}(x), & \text{если } x = y, \\ g_4(x,y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда гиперфункция $v \in \{(00\,00), (0001), (00\,0\,-)\}$, что возвращает рассуждения к случаям 1, 2 и 5 соответственно.

Случай 7. Пусть гиперфункция $g_4 \in \{g_4^{13}, \ldots, g_4^{18}\}$ (третий столбец в табл. 1).

Определим гиперфункцию $g_{2,3}(x)$ как суперпозицию гиперфункций $g_2(g_3(x))$. Тогда гиперфункция $g_{2,3} \in \{(1\,1), (0\,1), (-\,1)\}$. Положим, что

$$u(x,y) = \begin{cases} g_{2,3}(x), & \text{если } x = y, \\ g_4(x,y), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда гиперфункция $u \in \{(1111), (0111), (-\,111)\}$, что возвращает рассуждения к случаям 1, 3 и 4 соответственно. Теорема доказана. □

3. Базисы гиперфункций

На множестве гиперфункций введем бинарное отношение, соответствующее принадлежности E-предполным классам.

Каждой гиперфункции из P_2^- однозначным образом определим вектор принадлежности четырем E-предполным классам P_2, T_0^-, T_1^- и S^-. Длина такого вектора равна 4 и элемент вектора равен 0, если гиперфункция принадлежит соответствующему классу, и 1 — в противном случае.

Две гиперфункции находятся в заданном отношении тогда и только тогда, когда у них совпадают векторы принадлежности E-предполным классам. Очевидно, что введенное отношение является отношением эквивалентности.

Критерий полноты позволяет утверждать, что множество всех гиперфункций ранга 2 может быть разбито не более чем на 16 классов эквивалентности. Следующие два утверждения показывают, что число классов эквивалентности не превышает 14.

Утверждение 3. *Если гиперфункция $f(\tilde{x})$ принадлежит классам P_2, T_0^-, S^-, то она принадлежит классу T_1^-.*

Доказательство. Предположим, что гиперфункция $f(\tilde{x})$ не принадлежит классу T_1^-, тогда $f(\tilde{1}) = 0$. В силу того, что $f(\tilde{x}) \in S^-$, на нулевом наборе $f(\tilde{x})$ принимает значение либо 1, либо $-$. Но $f(\tilde{x}) \in P_2$, следовательно, $f(\tilde{0}) = 1$.

С другой стороны, гиперфункция $f(\tilde{x})$ принадлежит классам T_0^- и P_2, тогда на нулевом наборе она принимает значение 0. Иными словами, $f(\tilde{0}) = 0$. Получили противоречие. $\square$

Справедливо и аналогичное утверждение.

Утверждение 4. *Если гиперфункция $f(\tilde{x})$ принадлежит классам P_2, T_1^-, S^-, то она принадлежит классу T_0^-.*

Представленные утверждения показывают, что не существует гиперфункций, у которых вектор принадлежности есть 0010 или 0100.

В табл. 2 приведены все возможные классы эквивалентности, для каждого класса указан представитель — гиперфункция от трех переменных, при этом класс задается вектором принадлежности, а гиперфункция — вектором своих значений.

Будем говорить, что множество гиперфункций называется базисом, если оно является E-полным множеством, но при удалении хотя бы одной гиперфункции это свойство нарушается.

На основе приведенного разбиения по классам эквивалентности можно оценить мощности всех возможных базисов и подсчитать число различных типов базисов одинаковой мощности. При этом два базиса будем считать разными по типу, если хотя бы для одной гиперфункции некоторого базиса не найдется эквивалентной в другом базисе.

Таблица 2

Классы эквивалентности гиперфункций

Класс	**Представитель**	**Класс**	**Представитель**
0000	(00001111)	1001	(−−−11−−−)
0001	(01111111)	1010	(−−−−−−−0)
0011	(01111110)	1011	(0−−−−−−0)
0101	(11111111)	1100	(1−−−−−−−)
0110	(10001110)	1101	(1−−11−−−)
0111	(11111110)	1110	(1−−−−−−0)
1000	(−−−−−−−−)	1111	(1−−11−−0)

Гиперфункции из класса, соответствующего вектору 1111, образуют базис мощности 1. Очевидно, что других типов базисов мощности 1 не существует.

Полный перебор показал, что существует 23 типа базисов мощности 2 и 11 различных типов базисов мощности 3.

В табл. 3 и 4 приведены все возможные типы базисов мощности 2 и мощности 3. При этом запись {[0001], [1110]} означает, что мощность базиса равна 2 и он может быть сформирован любой гиперфункцией из класса, соответствующего вектору 0001, и любой гиперфункцией из класса, соответствующего вектору 1110.

Классификация гиперфункций только относительно суперпозиции проводилась в [1]. В этом случае множество всех гиперфункций разбивается на 119 классов эквивалентности, и базисы имеют мощности от 1 до 7.

В работах [8–11] можно посмотреть соответствующие классификации и типы базисов для булевых функций и функций k-значной логики.

Список литературы

1. Казимиров А. С. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 / А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев, Л. В. Токарева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 61–78.
2. Ло Джукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики / Ло Джукай // Кибернетический сборник. Новая серия. – М. : Мир, 1988. – Вып. 25. – С. 131–141.
3. Ло Джукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики / Ло Джукай // Кибернетический сборник. Новая серия. – М. : Мир, 1988. – Вып. 25. С. 142–157.

Таблица 3

Типы базисов гиперфункций мощности 2

№	Базис	№	Базис
1	{[0001], [1110]}	13	{[0111], [1010]}
2	{[0011], [1100]}	14	{[0111], [1011]}
3	{[0011], [1101]}	15	{[0111], [1100]}
4	{[0011], [1110]}	16	{[0111], [1101]}
5	{[0101], [1010]}	17	{[0111], [1110]}
6	{[0101], [1011]}	18	{[1001], [1110]}
7	{[0101], [1110]}	19	{[1010], [1101]}
8	{[0110], [1001]}	20	{[1011], [1100]}
9	{[0110], [1011]}	21	{[1011], [1101]}
10	{[0110], [1101]}	22	{[1011], [1110]}
11	{[0111], [1000]}	23	{[1101], [1110]}
12	{[0111], [1001]}		

Таблица 4

Типы базисов гиперфункций мощности 3

№	Базис	№	Базис
1	{[0001], [0110], [1000]}	7	{[0011], [0110], [1000]}
2	{[0001], [0110], [1010]}	8	{[0011], [0110], [1010]}
3	{[0001], [0110], [1100]}	9	{[0101], [0110], [1000]}
4	{[0001], [1010], [1100]}	10	{[0101], [0110], [1100]}
5	{[0011], [0101], [1000]}	11	{[1001], [1010], [1100]}
6	{[0011], [0101], [1001]}		

4. Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату / С. С. Марченков // Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика и механика. – 2003. – № 6. – С. 37–39.
5. Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций / С. С. Марченков // Дискрет. математика. – 2008. – Т. 20. – Вып. 6. – С. 80–88.
6. Марченков С. С. Оператор E-замыкания на множестве частичных функций многозначной логики /С. С. Марченков // Математические вопросы кибернетики. – М. : Физматлит, 2013. – Т. 19. – С. 227–238.
7. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М. : Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
8. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики / С. В. Яблонский // Мат. сб. – 1952. – Т. 30, № 2(72). – С. 329–348.
9. Classification and basis enumerations in many-valued logics / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. – Boston, 1987. – P. 151–160.

10. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic / L. Krnić // Glasnik matematicko-fizicki i astronomski. Ser 2. – 1965. – Vol. 20. – P. 23–32.
11. Lau D. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$/ D. Lau, M. Miyakawa // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 01, N 02. – P. 255–282.
12. Lau D. Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory. – Berlin : Springer-Verlag. 2006. 668 p.
13. Machida H. Hyperclones on a two-element set // Multiple-Valued Logic. An International Journal. – 2002. – N 8(4). – P. 495–501.
14. Machida H. On maximal hyperclones on $\{0, 1\}$ – a new approach / H. Machida, J. Pantovic // Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008). – 2008. – P. 32–37.
15. Romov B. A. Hyperclones on a finite set / B. A. Romov / Multiple-Valued Logic. An International Journal. – 1998. – Vol. 3, N 2. – P. 285–300.

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 200567
(e-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`)

Рябец Леонид Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Иркутский государственный университет, 664011, Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 200567
(e-mail: `l.riabets@gmail.com`)

V. I. Panteleyev, L. V. Ryabets

The Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Hyperfunctions on Two-Element Set

Abstract. In this work we consider the closure operator with the equality predicate branching (E-operator) on the set of hyperfunctions on two-element set.

With respect to this operator closed classes of hyperfunctions are generated. We show that there are four submaximal classes and prove the criterion of functional completeness.

The relation of equivalence is considered on the set of hyperfunctions obtained by their membership in E-submaximal classes. All hyperfunctions are divided into 14 equivalence classes.

In closed sets the minimal closed subsets named basis are derived. We show that basis of hyperfunctions can have cardinality from 1 to 3 and there is no basis with cardinality more than 3. There is only one kind of basis with cardinality 1. The function from that basis does not belong to any of four E-submaximal classes. We obtain 23 kind of basis with cardinality 2 and 11 with cardinality 3.

Keywords: closure, equality predicate, hyperfunction, closed set, superposition, completeness criterion.

References

1. Kazimirov A.S., Panteleyev V.I., Tokareva L.V. Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set (in Russian). *IIGU Ser. Matematika*, 2014, vol. 7, pp. 61–78.

2. Lo Czu Kai. Maximal closed classes on the Set of Partial Many-valued Logic Functions (in Russian). *Kiberneticheskiy Sbornik*, Moscow, Mir, 1988, vol. 25, pp. 131–141.
3. Lo Czu Kai. Completeness theory on Partial Many-valued Logic Functions (in Russian). *Kiberneticheskiy Sbornik*, Moscow, Mir, 1988, vol. 25, pp. 142–157.
4. Marchenkov S.S. Closure Operators with Predicate Branching (in Russian). *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh*, 2003, no. 6, pp. 37–39.
5. Marchenkov S.S. The Closure Operator With the Equality Predicate Branching on the Set of Partial Boolean Functions (in Russian). *Discrete Mathematics*, 2008, vol. 20, no. 3, pp. 80–88.
6. Marchenkov S.S. The E-closure Operator on the Set of Partial Many-valued Logic Functions (in Russian). *Matematicheskie voprosy kibernetiki*, Moscow, Fizmatlit, 2013, vol. 19, pp. 227–238.
7. Tarasov V.V. Completeness Criterion for Partial Logic Functions (in Russian). *Problemy Kibernetiki*, Moscow, Nauka, 1975, vol. 30, pp. 319–325.
8. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions (in Russian). *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no. 2(72), pp. 329–348.
9. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and Basis Enumerations in Many-Valued Logics. *Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued Logic*, Boston, 1987, pp. 151–160.
10. Krnić L. Types of Bases in the Algebra of Logic. *Glasnik matematicko-fizicki i astronomski*. Ser 2, 1965, vol. 20, pp. 23–32.
11. Lau D., Miyakawa M. Classification and Enumerations of Bases in $P_k(2)$. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 255–282.
12. Lau D. Function algebras on finite sets. A basic course on many-valued logic and clone theory. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 668 p.
13. Machida H. Hyperclones on a Two-Element Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 2002, no. 8(4), pp. 495–501.
14. Machida H., Pantovic J. On Maximal Hyperclones on $\{0,1\}$ — a new approach. *Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple- Valued Logic (ISMVL 2008)*, 2008, pp. 32–37.
15. Romov B. A. Hyperclones on a Finite Set. *Multiple-Valued Logic. An International Journal*, 1998, vol.3(2), pp. 285–300.

Panteleyev Vladimir Innokent'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952) 200567 (e-mail: vl.panteleyev@gmail.com)

Ryabets Leonid Vladimirovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952) 200567 (e-mail: l.riabets@gmail.com)