Серия «Математика»
2014. Т. 10. С. 76—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.968.22

О порядке сингулярности обобщенного решения интегрального уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах *

С. С. Орлов
Иркутский государственный университет

Аннотация. При изучении интегральных уравнений Вольтерра сверточного типа на полуоси с фредгольмовым оператором в главной части и операторнозначным ядром $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t)$ в банаховых пространствах естественным образом возникает задача построения обобщенного $\mathcal{K}(t)$-жорданова набора. Исследование таких уравнений в условии полноты жордановой структуры впервые выполнено в работах Н. А. Сидорова, в которых решена проблема разрешимости рассматриваемых задач в классе непрерывных функций. Вопросам существования и единственности обобщенного решения (в классе распределений с ограниченным слева носителем) посвящен цикл работ М. В. Фалалеева. В них предложен подход, связанный с конструкцией фундаментальной оператор-функции — аналогом классического понятия фундаментального решения. Однако, применение техники указанных работ становится весьма затруднительным, когда ядро интегрального уравнения имеет нуль какого-либо порядка в точке $t = 0$. В этом случае неясно каким образом выстраивается обобщенная жорданова структура. Аналогичная проблема возникает при исследовании вырожденных линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с дифференциальной частью высокого порядка, в которой отсутствует хотя бы одно слагаемое наивысшего порядка группы младших производных. Таким образом, вопрос о разрешимости вырожденных интегральных уравнений типа свертки с ядром, обладающим такой особенностью, остается открытым. Между тем к ним допускают редукцию краевые задачи, возникающие, например, в физике плазмы. Поэтому интерес к подобным математическим объектам вызван также их прикладной значимостью. В данной работе на примере интегрального уравнения специального вида исследован описанный феномен. Показано, что наличие в точке $t = 0$ нуля у ядра интегрального уравнения приводит к увеличению порядка сингулярности обобщенного решения. Установлена связь между кратностью нуля ядра в начальной точке и порядком сингулярности решения в классе распределений с ограниченным слева носителем. Доказана теорема о виде фундаментальной оператор-функции соответствующего интегрального оператора. На этой основе получены достаточные условия существования и единственности обобщенного решения. Приведены примеры, иллюстрирующие абстрактные результаты.

Ключевые слова: уравнение типа свертки, банахово пространство, фредгольмов оператор, жорданов набор, распределение, фундаментальная оператор-функция.

1. Постановка задачи

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, $u = u(t)$, $f = f(t)$ — неизвестная и заданная функции неотрицательного вещественного аргумента t со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Bu(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f(t),\ t \geq 0. \tag{1}$$

Здесь B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$ и $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, ядро $g(t)$ — числовая функция. Предполагается, что оператор B фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$, а функция $g(t)$ аналитическая в точке $t = 0$ и имеет в этой точке нуль порядка l.

К этому уравнению допускает редукцию следующая краевая задача:

$$(\Delta - \alpha)\varphi(t,\bar{x}) + \int_0^t (t-\tau)\beta\varphi_{x_N^2}(\tau,\bar{x})d\tau = f(t,\bar{x}),\ t > 0,\ \bar{x} = (x_1,\ldots,x_N) \in \Omega;$$

$$\varphi(t,\bar{x})|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0,$$

где Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^N$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, α и β — отличные от нуля постоянные. В случае $N = 3$ эта задача моделирует низкочастотные электронные (ионные) магнито-звуковые колебания во внешнем магнитном поле [3].

Впервые класс абстрактных уравнений Вольтерра вида

$$Bu(t) - \int_0^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds = f(t)$$

с фредгольмовым оператором B был рассмотрен в пионерской работе Н. А. Сидорова [7]. Здесь B и $\mathcal{K}(t)$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, область определения $D(\mathcal{K})$ оператор-функции $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{C}^\infty(t \geq 0)$ не зависит от t, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(\mathcal{K})} = E_1$ и $D(B) \subseteq D(\mathcal{K})$. В работе [6] к этой задаче впервые применен аппарат распределений со значениями в банаховых пространствах. Исследование однозначной разрешимости

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а.

с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции проводилось в [8; 10]. Во всех этих работах естественным образом возникала задача о построении обобщенного жорданова набора относительно оператор-функции $\mathcal{K}(t)$. Применение разработанных методов является затруднительным, если $\mathcal{K}(t)$ имеет в точке $t = 0$ нуль кратности l, т. е. $\mathcal{K}(0) = \mathcal{K}'(0) = \ldots = \mathcal{K}^{(l-1)}(0) = \mathbb{O}$ и $\mathcal{K}^{(l)}(0) \neq \mathbb{O}$. Здесь и далее $\mathbb{O}$ — нулевой оператор из E_1 и E_2. В этом случае неизвестно каким образом выстраивается обобщенный $\mathcal{K}(t)$-жорданов набор оператора B. Как отмечено автором в [4, с. 112], аналогичная проблема возникает при исследовании вырожденных линейных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с дифференциальной частью высокого порядка, в которой отсутствует хотя бы одно слагаемое наивысшего порядка в группе младших производных. Тем самым вопрос существования и единственности решений абстрактных уравнений с такими особенностями остается открытым. В настоящей работе предпринята попытка изучить указанный феномен: выяснить какое влияние наличие нуля у ядра интегрального оператора в начальной точке оказывает на решение уравнения.

2. Жордановы наборы фредгольмовых операторов

Пусть $E_1,\ E_2$ — вещественные банаховы пространства, B — замкнутый линейный плотно определенный фредгольмов оператор, действующий из E_1 в E_2.

Обозначим n — размерность $N(B)$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ — базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ соответственно, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \subset E_1^*$ и $\{z_i\}_{i=1}^n \subset E_2$ — биортогональные им системы элементов, т. е.

$$\langle \varphi_i,\ \gamma_j\rangle = \langle z_i,\ \psi_j\rangle = \delta_{ij},\ i,\ j = 1, \ldots, n.$$

Введем проекторы $P:\ E_1 \to N(B),\ Q:\ E_2 \to \operatorname{span}\{z_i\}_{i=1}^n$, действия которых задаются формулами

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i\rangle \varphi_i,\ Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \psi_i\rangle z_i,$$

и ограниченный оператор $\Gamma:\ E_2 \to D(B)$,

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^n \langle \cdot,\ \gamma_i\rangle z_i\right)^{-1},$$

называемый оператором Треногина – Шмидта [1]. Справедливы равенства $\Gamma z_i = \varphi_i,\ \Gamma^*\gamma_i = \psi_i,\ \Gamma B = \mathbb{I}_1 - P,\ B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q$. Здесь и далее в работе $\mathbb{I}_1,\ \mathbb{I}_2$ — тождественные операторы в пространствах E_1 и E_2.

Пусть A — замкнутый линейный оператор из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} = E_1$. Будем называть *A-жордановой цепочкой* длины $p_i \in \mathbb{N}$ базисного вектора $\varphi_i \in N(B)$ конечный набор элементов $\left\{\varphi_i^{(1)},\ \varphi_i^{(2)}, \ldots,\ \varphi_i^{(p_i)}\right\} \subset E_1$, удовлетворяющих уравнениям

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k+1)} = A\varphi_i^{(k)},\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

которые, в соответствии с альтернативой Фредгольма [1], разрешимы, если $\left\langle A\varphi_i^{(k)},\ \psi_j \right\rangle = 0$, $j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1$. Вектор $\varphi_i^{(k+1)}$ принято называть *A-присоединенным элементом k-го порядка* к элементу φ_i, причем справедлива формула $\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma A\varphi_i^{(k)}$. Условие обрыва цепочки присоединенных элементов на p_i-м шаге состоит в том, что не все числа $\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_j \right\rangle$ равны нулю. Построив по описанному правилу для каждого $\varphi_i \in N(B)$ свою A-жорданову цепочку, получим систему элементов

$$\left\{\varphi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i\right\} \subset E_1,$$

называемую *A-жордановым набором* фредгольмова оператора B и являющуюся *полной*, если $\det\left\|\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_j \right\rangle\right\| \neq 0$. Базис в $N(B^*)$ можно выбрать таким, что условие полноты A-жорданова набора эквивалентно соотношению $\left\langle A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_j \right\rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$, тогда $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$.

Известно, что, если оператор B имеет полный A-жорданов набор, то существует *полный A^*-жорданов набор* оператора B^*, который строится по тем же правилам, причем базисы в $N(B)$ и $N(B^*)$ можно выбрать так, что элементы φ_i и ψ_i с одинаковыми номерами имеют обобщенные жордановы цепочки одинаковой длины. В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что все указанные перестройки базисов уже выполнены.

Полным A^*-жордановым набором оператора B^* называется система элементов $\psi_i^{(k)} \in E_2^*,\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i$, которые удовлетворяют уравнениям

$$B^*\psi_i^{(1)} = 0,\ B^*\psi_i^{(k+1)} = A^*\psi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

условиям разрешимости

$$\left\langle \varphi_i,\ A^*\psi_j^{(k)} \right\rangle = 0,\ i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_j - 1,$$

и полноты

$$\left\langle \varphi_i,\ A^*\psi_j^{(p_j)} \right\rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n,$$

Для восстановления A^*-присоединенных элементов справедливы формулы

$$\psi_i^{(k+1)} = \Gamma^* A^*\psi_i^{(k)},\ i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_i - 1,$$

а из последнего соотношения следует, что $\gamma_i = A^* \psi_i^{(p_i)},\ i = 1, \dots, n$.

Условия разрешимости уравнений для определения A- и A^*-присоединенных элементов могут быть записаны в следующем эквивалентном виде:

$$\left\langle \varphi_i^{(k+1)},\ \gamma_j \right\rangle = \left\langle z_j,\ \psi_i^{(k+1)} \right\rangle = 0,\ i, j = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, p_i - 1,$$

и справедливо свойство *цикличности* A- и A^*-жордановых наборов, выражаемое следующими равенствами

$$\varphi_i^{(k+1)} = (\Gamma A)^{qp_i + k} \varphi_i^{(1)},\ \psi_i^{(k+1)} = (\Gamma^* A^*)^{qp_i + k} \psi_i^{(1)},$$

$$\forall\ q \in \{0\} \cup \mathbb{N},\ k = 1, \dots, p_i - 1.$$

3. Обобщенные функции в банаховых пространствах

Пусть E — вещественное банахово пространство, E^* — сопряженное к нему банахово пространство. Отнесем к множеству $K(E^*)$ *основных функций* все финитные бесконечно дифференцируемые функции $s(t)$ со значениями в E^*. *Носителем* $\operatorname{supp} s(t)$ основной функции $s(t)$ называется замыкание в $\mathbb{R}$ множества значений t, при которых $s(t) \neq 0$. Сходимость в $K(E^*)$, которая вводится следующим образом: говорят, что последовательность функций $\{s_n(t)\}$ сходится к $s(t)$ в $K(E^*)$, если

а) $\exists\ R > 0$ такое, что $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \operatorname{supp} s_n(t) \subset [-R,\ R]$;

б) $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}$ выполняется $\sup\limits_{t \in [-R,\ R]} \left\| s_n^{(\alpha)}(t) - s^{(\alpha)}(t) \right\|_{E^*} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$;

наделяет векторное пространство $K(E^*)$ топологической структурой. *Обобщенной функцией (распределением)* $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E называется всякий линейный непрерывный функционал $(f, s(t))$, заданный на $K(E^*)$. Обозначим $K'(E)$ множество всех обобщенных функций со значениями в E, которое относительно введенной в нем слабой сходимости: $\{f_n\} \subset K'(E)$ сходится к $f \in K'(E)$, если $(f_n, s(t)) \xrightarrow{n \to +\infty} (f, s(t)),\ \forall\ s(t) \in K(E^*)$; является полным векторным пространством и называется *пространством обобщенных функций*. Понятия нулевого множества и носителя распределения, равенства двух обобщенных функций, операции сложения, умножения на бесконечно дифференцируемую числовую функцию, дифференцирования (последние две непрерывны из $K'(E)$ в $K'(E)$) определяются так же, как и для классических обобщенных функций Соболева – Шварца, множество которых, следуя монографии В. С. Владимирова [2], будем обозначать $\mathscr{D}'$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $f(t)$ со значениями в E порождает распределение

$$(f(t), s(t)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t), s(t)\rangle\, dt,\ \ s(t) \in K(E^*).$$

Все обобщенные функции, которые можно задать по приведенному правилу, принято называть *регулярными*, остальные — *сингулярными*. Примеры регулярной и сингулярной обобщенных функций из $K'(E)$ доставляют аналоги функции Хевисайда и дельта-функции Дирака

$$(a\theta(t-t_0), s(t)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} \langle a, s(t)\rangle\, dt,\ \ (a\delta(t-t_0), s(t)) = \langle a, s(t_0)\rangle\,,$$

соответственно, где $a \in E$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $s(t) \in K(E^*)$. При этом легко показать, что $(a\theta(t-t_0))' = a\delta(t-t_0)$.

Следуя [9, с. 123], будем говорить, что обобщенная функция f имеет *порядок сингулярности* $s(f) \le p$, если она представима в виде

$$(f,\, s(t)) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\langle f_k(t), s^{(k)}(t)\right\rangle dt,\ s(t) \in K(E^*),$$

где $f_k(t)$, $k = 0, \dots, p$ — локально интегрируемые по Бохнеру функции со значениями в E. Если при этом представление в такой форме невозможно с меньшим p, то f *имеет порядок сингулярности ровно* p, т. е. $s(f) = p$. Согласно этому определению, очевидно, что всякая регулярная обобщенная функция имеет нулевой порядок сингулярности (для них также можно ввести понятие *отрицательного порядка сингулярности* по аналогии с [9, с. 124]). Отметим также, что дельта-функции Дирака и ее k-я производная являются распределениями, имеющими порядки сингулярности 1 и $k+1$ соответственно.

Через $K'_+(E)$, $K'_+(E) \subset K'(E)$, будем обозначать *пространство распределений с ограниченным слева носителем.*

Пусть $\mathcal{K}(t)$ — сильно непрерывная оператор-функция со значениями в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, $h(t) \in \mathscr{D}'$, тогда произведение $\mathcal{K}(t)h(t)$ (формальное выражение) назовем *обобщенной оператор-функцией.* Далее интегральному оператору вида

$$\mathcal{I}(u(t)) = Bu(t) - \int\limits_0^t g(t-s)Au(s)ds$$

поставим в соответствие следующую обобщенную оператор-функцию:

$$\mathcal{I}(\delta(t)) = B\delta(t) - Ag(t)\theta(t).$$

Пусть $f(t) \in K'_+(E_1)$, $h(t) \in \mathscr{D}'_+$, тогда *сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)h(t)$ и обобщенной функции $f(t)$ называется распределение $\mathcal{K}(t)h(t) * f(t) \in K'_+(E_2)$ определяемое равенством

$$(\mathcal{K}(t)h(t) * f(t),\ s(t)) = (h(t),\ (f(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau)))\,,\ \forall\ s(t) \in K(E_2^*).$$

Корректность этого определения гарантируется ограниченностью слева носителей функций $h(t) \in \mathscr{D}'_+$ и $f(t) \in K'_+(E_1)$ и доказывается по схеме, аналогичной применяемой в [2] при доказательстве существования свертки в алгебре $\mathscr{D}'_+$.

Далее введем ключевое понятие. *Фундаментальной оператор-функцией* интегрального оператора $\mathcal{I}(\delta(t))$ назовем обобщенную оператор-функцию $\mathcal{E}(t)$, удовлетворяющую равенствам

$$\mathcal{E}(t) * \mathcal{I}(\delta(t)) * v(t) = v(t),\ \forall\ v(t) \in K'_+(E_1),$$

$$\mathcal{I}(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * w(t) = w(t),\ \forall\ w(t) \in K'_+(E_2).$$

Смысл этой конструкции состоит в следующем: если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ интегрального оператора $\mathcal{I}(\delta(t))$, то уравнение вида $\mathcal{I}(\delta(t)) * u(t) = f(t)$, где $f(t) \in K'_+(E_2)$, в силу второго равенства, имеет решением $u(t) = \mathcal{E}(t) * f(t) \in K'_+(E_1)$, и это решение единственно. Пусть существует обобщенная функция $v(t) \in K'_+(E_1)$ такая, что $v(t) \neq u(t)$ и $\mathcal{I}(\delta(t)) * v(t) = f(t)$, тогда, с учетом первого равенства из определения фундаментальной оператор-функции, получим

$$v(t) = \mathcal{E}(t) * \mathcal{I}(\delta(t)) * v(t) = \mathcal{E}(t) * f(t) = u(t),$$

противоречие, доказывающее единственность решения $u(t) = \mathcal{E}(t) * f(t)$ исходного сверточного уравнения в классе $K'_+(E_1)$.

4. Обобщенное решение: условия существования и единственности, порядок сингулярности

Определение 1. *Классическим решением уравнения (1) будем называть функцию $u(t)$ класса $\mathcal{C}(t \geq 0; E_1)$, обращающую в тождество это уравнение.*

Уравнение (1) в обобщенных функциях принимает вид:

$$(B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \tilde{u}(t) = \tilde{f}(t), \tag{2}$$

где $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t) \in K'_+(E_2)$.

Определение 2. *Решение уравнения (2) в классе $K'_+(E_1)$ называется обобщенным решением исходного интегрального уравнения (1).*

Далее приведем некоторые вспомогательные утверждения, подробные доказательства которых изложены в [5].

Лемма 1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда справедливо равенство*

$$Q_q(A\Gamma)^k Q_i = \begin{cases} \mathbb{O}_2, & k = \alpha p_i,\ i \neq q, \\ Q_q, & k = \alpha p_i,\ i = q, \\ \mathbb{O}_2, & k \neq \alpha p_i; \end{cases}$$

$q, i = 1, \ldots, n,\ \ k, \alpha \in \mathbb{N}$.

Введем в рассмотрение оператор

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}.$$

Справедлива следующая

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, тогда*

$$Q(A\Gamma)^k(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Последнее равенство справедливо и при $k = 0$, т. е.

$$Q(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{O}_2.$$

Кроме того, отсюда следует еще одно полезное равенство

$$(\mathbb{I}_2 - Q)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) = \mathbb{I}_2 - \tilde{Q}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, тогда*

$$P + \Gamma\tilde{Q}B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)}.$$

Замечание 2. Из леммы 3 следует

$$\tilde{Q}A - A\Gamma\tilde{Q}B = AP. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть B, A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $D(B) \subseteq D(A)$, ядро $g(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, тогда интегральный оператор $B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)$ имеет* *на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^{k-1} (A\Gamma)^{k-1} (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^k(t) \right],$$

где Γ *— оператор Треногина – Шмидта,* $\tilde{Q} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, $\left\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ *— A-жорданов набор оператора B,* $\left\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\right\}$ *— A^*-жорданов набор оператора B^*,* $\gamma(t)$ *— обратный к $g(t)\theta(t)$ элемент в алгебре $\mathscr{D}'_+$, под степенью k обобщенных функций $g(t)\theta(t)$, $\gamma(t) \in \mathcal{D}'_+$ понимается их повторная k-кратная свертка, т. е.* $(g(t)\theta(t))^k = \underbrace{g(t)\theta(t) * \cdots * g(t)\theta(t)}_{k\ \text{раз}}$, *причем* $(g(t)\theta(t))^0 = \delta(t)$.

Доказательство. Согласно определению фундаментальной оператор-функции, требуется проверить два сверточных равенства

$$(B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}(t) = \mathbb{I}_2\delta(t),$$

$$\mathcal{E}(t) * (B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = \mathbb{I}_1\delta(t).$$

Так как $B\Gamma = \mathbb{I}_2 - Q$, $B\varphi_i^{(1)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$; $g(t)\theta(t) * \gamma^k(t) = \gamma^{k-1}(t)$, то в первом равенстве имеем

$$(B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}(t) = (\mathbb{I}_2 - Q)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\delta(t) + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k (\mathbb{I}_2 - Q)(A\Gamma)^k (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) - \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k (A\Gamma)^k (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^k(t) \right] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \delta(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=2}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^{k-1}(t) \right].$$

Далее учтем равенство (3), результат леммы 2, вид оператора $\tilde{Q}$ и $B\varphi_i^{(j+1)} = A\varphi_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$ (см. п. 2).

$$\begin{gathered}(B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) * \mathcal{E}(t) = (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})\delta(t) - \\ - \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k Q(A\Gamma)^k (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) + \tilde{Q}\delta(t) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^k(t) \right] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \gamma^k(t) \right] = \mathbb{I}_2\delta(t).\end{gathered}$$

Теперь докажем второе равенство. Так как $B^*\psi_i^{(1)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(t) * (B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = \Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})B\delta(t) + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k \Gamma(A\Gamma)^k (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})B - \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k \Gamma(A\Gamma)^{k-1} (\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})A - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \sum_{j=2}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^k(t) \right] + \\ + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-j+1)} \delta(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=2}^{p_i} \sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ A^*\psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \gamma^{k-1}(t) \right].\end{gathered}$$

Используя равенства $\Gamma B = \mathbb{I}_1 - P$ и (4), результат леммы 3 и уравнения $B^*\psi_i^{(j+1)} = A^*\psi_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p_i - 1$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(t) * (B\delta(t) - Ag(t)\theta(t)) = (\mathbb{I}_1 - P - \Gamma\tilde{Q}B)\delta(t) + \\ + \sum_{k=1}^{+\infty} (g(t)\theta(t))^k \Gamma(A\Gamma)^{k-1} (A - AP - A\Gamma\tilde{Q}B - A + \tilde{Q}A) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{p_i-1} \sum_{j=1}^{p_i-k} \left\langle \cdot,\ B^*\psi_i^{(j+1)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \gamma^k(t) \right] +\end{gathered}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\sum_{j=1}^{p_i-k}\left\langle\cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\gamma^k(t)\right]+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\left\langle\cdot,\ A^*\psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-j+1)}\delta(t)=\mathbb{I}_1\delta(t),$$

что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3. Фундаментальная оператор-функция может быть записана в следующем эквивалентном виде:

$$\mathcal{E}(t)=\Gamma\delta(t)*(\mathbb{I}_2\delta(t)+R(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2-\tilde{Q})-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle\cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\gamma^k(t)\right],$$

где $R(t)$ — резольвента ядра $A\Gamma g(t)$ — операторно-функциональный ряд, сходящийся в топологии $\mathcal{L}(E_2)$ равномерно на любом компакте $[0,\,T]$, причем имеет место оценка

$$\|R(t)\|_{\mathcal{L}(E_2)}\leq C\exp CT,\ \ C=\|A\Gamma\|_{\mathcal{L}(E_2)}\cdot\max_{t\in[0,\,T]}|g(t)|\,.$$

Следующая теорема доставляет способ построения обратного элемента $\gamma(t)$ к $g(t)\theta(t)$ в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$.

Теорема 2. *Пусть $g(t)\in C^{l+1}(t\geq 0)$ является аналитической функцией в точке $t=0$ и имеет в этой точке нуль порядка l, т. е.*

$$g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(l-1)}(0)=0\ \text{и}\ \ g^{(l)}(0)\neq 0,$$

тогда обратным элементом $\gamma(t)$ к $g(t)\theta(t)$ в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$ является следующая обобщенная функция:

$$\gamma(t)=\frac{\delta^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}*\big(\delta(t)+r(t)\theta(t)\big),$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $-\frac{g^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}$.

Доказательство. Резольвента $r(t)$ является функциональным рядом из повторных сверток функции $-\frac{g^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}\in C(t\geq 0)$, который сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $[0,\,T]$, причем справедливо равенство

$$r(t)=-\frac{1}{g^{(l)}(0)}\Big(g^{(l+1)}(t)+\int\limits_0^t g^{(l+1)}(t-s)r(s)ds\Big),$$

которое имеет место и в обобщенном смысле

$$r(t)\theta(t) = -\frac{g^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}\theta(t) * \big(\delta(t) + r(t)\theta(t)\big).$$

Тогда, с его учетом, получим требуемое

$$g(t)\theta(t) * \gamma(t) = g(t)\theta(t) * \frac{\delta^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)} * \big(\delta(t) + r(t)\theta(t)\big) =$$
$$= \Big(\delta(t) + \frac{g^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}\theta(t)\Big) * \big(\delta(t) + r(t)\theta(t)\big) = \delta(t).$$

Отметим, что $\gamma(t)$ определяется единственным образом. □

Замечание 4. В условиях теорем 1 и 2 фудаментальная оператор-функция имеет вид

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma\delta(t) * (\mathbb{I}_2\delta(t) + R(t)\theta(t))(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q}) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)}\right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)} \frac{\delta^{((l+1)k)}(t)}{(g^{(l)}(0))^k} * (\delta(t) + r(t)\theta(t))^k\right].$$

Замечание 5. В соответствии п. 3 единственным обобщенным решением уравнения (1) является распределение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t)$, где $\tilde{f}(t) = f(t)\theta(t) \in K'_+(E_2)$.

Рассмотрим последовательность регулярных обобщенных функций из $K'_+(E_2)$ вида

$$f_k(t)\theta(t) = \frac{1}{(g^{(l)}(0))^k}(\delta(t) + r(t)\theta(t))^k * f(t)\theta(t),\ k \in \mathbb{N},$$

где $r(t)$ — резольвента ядра $-\frac{g^{(l+1)}(t)}{g^{(l)}(0)}$. Справедливо соотношение

$$g(t)\theta(t) * f_k(t)\theta(t) = \frac{t^l}{l!}\theta(t) * f_{k-1}(t)\theta(t),\ k \in \mathbb{N}.$$

Последнее имеет место в классическом смысле, а именно:

$$\int\limits_0^t g(t-s)f_k(s)ds = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^l}{l!}f_{k-1}(s)ds.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теорем 1 и 2, тогда уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение, и, если*

$$g(t) \in C^{(l+1)(p+1)}(t \geq 0),\ f(t) \in \mathcal{C}^{(l+1)p}(t \geq 0;\ E_2),\ p = \max_{i=1,\dots,n} p_i,$$

то оно имеет вид

$$\tilde{u}(t) = \Bigg[\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})f(t) + \int\limits_0^t \Gamma R(t-s)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})f(s)ds -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle f_k^{((l+1)k)}(t),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\Bigg]\theta(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1}\sum_{q=1}^{(l+1)k} \left\langle f_k^{((l+1)k-q)}(0),\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{(q-1)}(t),$$

где используются обозначения замечаний 3, 4, 5.

Доказательство. Если выполняются условия теорем 1 и 2, то известен вид фундаментальной оператор-функции, указанный в замечании 4, поэтому уравнение (1) имеет единственное обобщенное решение. Теперь восстановим его, используя обозначения замечания 5.

$$\mathcal{E}(t) * f(t)\theta(t) =$$
$$= \Bigg[\Gamma(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})f(t) + \int\limits_0^t \Gamma R(s)(\mathbb{I}_2 - \tilde{Q})f(s)d\tau ds\Bigg]\theta(t)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{j=1}^{p_i-k+1} \left\langle \cdot,\ \psi_i^{(j)} \right\rangle \varphi_i^{(p_i-k+2-j)}\delta^{((l+1)k)}(t) * f_k(t)\theta(t).$$

Поскольку выполняются условия гладкости

$$g(t) \in C^{(l+1)(p+1)}(t \geq 0),\ f(t) \in C^{(l+1)p}(t \geq 0;\ E_2),\ p = \max_{i=1,\dots,n} p_i,$$

имеет место равенство

$$\delta^{((l+1)k)}(t) * f_k(t)\theta(t) =$$
$$= f_k^{((l+1)k)}(t)\theta(t) + \sum_{q=1}^{(l+1)k} f_k^{((l+1)k-q)}(0)\delta^{(q-1)}(t),\ k = 1, \dots, p_i.$$

Подставив его, в предыдущее выражение, получим искомую формулу. □

Замечание 6. Условие сильной гладкости порядка $(l+1)p$ функции $f(t)$ в теореме 3 можно ослабить, заменив следующим:

$$\left\langle f(t),\, \psi_i^{(j)} \right\rangle \in C^{(l+1)(p_i+1-j)}(t \geq 0),$$

$$j = 1, \ldots, p_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Замечание 7. Простой анализ формулы обобщенного решения показывает, что оно представляет собой сумму двух составляющих: регулярной и сингулярной. Последняя имеет точечный носитель. Очевидно, что порядок сингулярности этого распределения определяется старшей производной дельта-функции Дирака, а, значит, $s(\tilde{u}) = (l+1)p$. Здесь p — максимальная длина A-жордановой цепочки, l — кратность нуля функции $g(t)$ в точке $t = 0$. Таким образом, увеличение l приводит к кратному p увеличению порядка сингулярности обобщенного решения.

Пример 1. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида

$$\begin{cases} x_1(t) = \displaystyle\int\limits_0^t \sin(t-s)(x_1(s) + x_2(s))ds + f_1(t), \\ \quad 0 = \displaystyle\int\limits_0^t \sin(t-s)x_2(s)ds + f_2(t). \end{cases}$$

Здесь $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g(t) = \sin t$. Очевидно, что

$$\dim N(B) = \dim N(B^*) = 1, \quad \varphi = \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ и } \ l = 1.$$

Заметим также, что $(A\varphi,\, \psi) = 1$, а, значит, φ не имеет A-присоединенных векторов или $p = 1$. В этом случае

$$z = A\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ и } \ \gamma = A^*\psi = {}^tA\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = (\tilde{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbb{I}_2 - \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A\Gamma g(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

Резольвентой ядра $A\Gamma g(t)$ и обратным к $g(t)\theta(t)$ в $\mathscr{D}'_+$ являются

$$R(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \ \text{ и } \ \gamma(t) = \delta''(t) + \delta(t)$$

соответственно. Таким образом, фундаментальная оператор-функция интегрального оператора имеет вид:

$$\mathcal{E}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) + t\theta(t) & -\delta(t) - t\theta(t) \\ 0 & -\delta''(t) - \delta(t) \end{pmatrix}.$$

Обобщенное решение определяется формулой

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}(t) * \tilde{f}(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} f_1(t) - f_2(t) + \int\limits_0^t (t-s)(f_1(s) - f_2(s))ds \\ -f_2(t) - f_2''(t) \end{pmatrix} \theta(t) -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 \\ f_2'(0) \end{pmatrix} \delta(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(0) \end{pmatrix} \delta'(t).$$

Порядок сингулярности этого распределения равен 2. Заметим, что обобщенное решение окажется классическим, если $f_2(t) \in C^2(t \geq 0)$ и будут выполнены условия

$$f_2(0) = 0, \ \dot{f}_2(0) = 0,$$

которые можно получить из второго уравнения исходной системы, не выполняя данного исследования, что позволяет сделать вывод о согласованности представленного подхода с классическими методами решения подобных задач.

Список литературы

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
3. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007. – 736 с.
4. Орлов С. С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах / С. С. Орлов. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. – 149 с.
5. Орлов С. С. О разрешимости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с фредгольмовым оператором в главной части / С. С. Орлов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 3. С. 73–93.
6. Сидоров Н. А. Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах / Н. А. Сидоров, М. В. Фалалеев // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. – Новосибирск : Наука, 1988. – С. 308–318.

7. Сидоров Н. А. Об одном классе уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах / Н. А. Сидоров // Сиб. мат. журн. – 1983. – Т. 21, № 2. – С. 202–203.
8. Фалалеев М. В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Сиб. мат. журн. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 1167–1182.
9. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.
10. Falaleev M. V. Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications / M. V. Falaleev, S. S. Orlov // Russian Mathematics. – 2011. – Vol. 55, N 10. – P. 59–69.

Орлов Сергей Сергеевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521285 (e-mail: orlov_sergey@inbox.ru)

S. S. Orlov

On the Order of Singularity of the Generalized Solution of the Volterra Integral Equation of Convolutional Type in Banach Spaces

Abstract. In the study of Volterra integral equations of convolution type defined on the semi-axis with the Fredholm operator in the main part and the operator-valued kernel $\mathcal{K} = \mathcal{K}(t)$ in Banach spaces we ordinarily solved the problem of constructing a generalized $\mathcal{K}(t)$-Jordan sets. Investigation of such equations was carried out for first time by N. A. Sidorov in the assumption of completeness of Jordan structure. The problem of solvability in the class of continuous functions was solved in his papers. The series of papers of M. V. Falaleev are devoted to the problems of existence and uniqueness of generalized solutions (i. e. solutions in the class of distributions with left-bounded support). There first has been proposed approach associated with the construction of the fundamental operator-function, which is generation of the classical notion of the fundamental solution. However, using all of these methods becomes very difficult when the kernel of integral equation has a null of any order at $t = 0$. In this case, it is unclear how the generalized Jordan structure is built. A similar problem is posed in the study of degenerate linear integro-differential equations in Banach spaces with the differential part of a high order, which does not have at least one term of the highest order of lower derivatives. Thus, the problem of the solvability of degenerate convolution type integral equations with such special kernel remains unresolved. It should be noted that the boundary value problems of plasma physics can be reduced to this abstract integral equations. Therefore, interest in these mathematical objects due to their applied significance. In this paper we investigate described phenomenon in the particular case of special kind integral equation. It is shown that the presence of null of the integral equation kernel at point $t = 0$ leads to an increase of the order of generalized solution singularity. We have ascertained an interdependence between these two characteristics. A theorem on a form of fundamental operator-function of corresponding integral operator is proved. On this basis, we obtained sufficient conditions of the existence and uniqueness of the generalized solution. Also we considered examples illustrating obtained abstract results.

Keywords: convolutional type equation, Banach space, Fredholm operator, Jordan set, distribution, fundamental operator-function.

References

1. Vainberg M. M., Trenogin V. A. Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations (in Russian). Moscow, Nauka, 1969. 528 p.
2. Vladimirov V. S. Generalized Functions in Mathematical Physics (in Russian). Moscow, Nauka, 1979. 320 p.
3. Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Yu. D. Linear and Nonlinear Equations of Sobolev Type (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2007. 736 p.
4. Orlov S. S. Generalized Solutions of Integro-Differential Equations of Higher Orders in Banach Spaces (in Russian). Irkutsk, ISU Publ., 2014. 149 p.
5. Orlov S. S. The Solvability of Volterra Integro-Differential Equations with Fredholm Operator in Main Part (in Russian). *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya «Matematika»*, 2012, vol. 5, no. 3, pp. 73–93.
6. Sidorov N. A., Falaleev M. V. Generalized Solutions of Degenerated Differential and Integral Equations in Banach Spaces (in Russian). *Metod Funkciy Lyapunova v analize dinamiki sistem*, Novosibirsk, Nauka, 1988, pp. 308–318.
7. Sidorov N. A. On the Class of Volterra Equations with Degenerating in Banach Spaces (in Russian). *Sib. Mat. Jurn.*, 1983, vol. 21, no. 2, pp. 202–203.
8. Falaleev M. V. Fundamental Operator-Functions of a Singular Differential Operators in Banach Spaces. *Sib. Mat. Jurn.*, 2000., vol. 41, no. 5, pp. 1167–1182.
9. Shilov G. E. Mathematical Analisys. Second Special Course (in Russian). Moscow, Nauka, 1965. 328 p.
10. Falaleev M. V., Orlov S. S. Degenerate Integro-Differential Operators in Banach Spaces and Their Applications. *Rus. Math.*, 2011, vol. 55, no. 10, pp. 59–69.

Orlov Sergey Sergeevich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)521285 (e-mail: orlov_sergey@inbox.ru)