Серия «Математика»
2014. Т. 10. С. 44—61

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.938

# Устойчивость систем обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными начальными данными

Д. Я. Киселевич
*Иркутский государственный университет*

Г. А. Рудых
*Иркутский государственный университет*

**Аннотация.** В работе рассматривается нелинейная неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и соответствующее ей уравнение Лиувилля. Начальные данные системы ОДУ случайны и лежат в заданной области с известным начальным законом распределения. Для нелинейной неавтономной системы ОДУ вводится понятие $\varepsilon$-статистической устойчивости решения, которое позволяет исследовать поведение решения системы ОДУ с недетерменированными начальными данными. Такое исследование проводится с использованием функции плотности вероятности распределения ансамбля изображающих точек системы ОДУ. Понятие $\varepsilon$-статистической устойчивости решения позволяет оперировать сразу с множеством траекторий движения системы ОДУ, начальные значения которой лежат в заданной области, а также для проверки критерия $\varepsilon$-статистической устойчивости достаточно одной функции плотности вероятности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ, которая хоть и удовлетворяет уравнению в частных производных, но это уравнение линейное, а кроме того ищется не общее решение, а решение задачи Коши. Для введения понятия $\varepsilon$-статистической устойчивости решения необходимо, чтобы нелинейная система ОДУ имела решение в целом, т. е. чтобы траектории системы не уходили в бесконечность за конечное время. В общем случае $\varepsilon$-статистическая устойчивость не эквивалентна асимптотической устойчивости решения по Ляпунову. Однако между этими понятиями имеется тесная связь, позволяющая сформулировать необходимое и достаточное условие $\varepsilon$-статистической устойчивости решения для линейной автономной системы ОДУ и достаточное условие для линейной неавтономной системы ОДУ (для однородного и неоднородного случаев). В процессе исследования дисперсии нелинейной неавтономной системы ОДУ было получено необходимое и достаточное условие $\varepsilon$-статистической устойчивости решения системы ОДУ. Все полученные результаты проиллюстрированы на содержательных примерах.

**Ключевые слова:** нелинейная система ОДУ, уравнение Лиувилля, ансамбль Гиббса, функция плотности вероятности распределения, статистическая устойчивость решения.

## 1. Введение

Рассмотрим неавтономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = X(x,t), x(t)|_{t=t_0} = x_0, \tag{1.1}$$

и соответствующее ей уравнение Лиувилля [6]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = Lf(x,t), \quad f(x,t)|_{t=t_0} = f_0(x). \tag{1.2}$$

Здесь

$$L\cdot = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[X_i(x,t)\cdot] = -\nabla \cdot [X(x,t)\cdot] - \tag{1.3}$$

оператор Лиувилля, действующий по формуле

$$L : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n); \tag{1.4}$$

$x, X(x,t)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$; $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — открытое множество, причем $G = \Omega \times I; I = \{t : t_0 \leq t < +\infty\}; \Omega$ — проекция $G$ в $\mathbb{R}^n$, $f_0(x) = f(x,t_0)$ — начальная функция плотности вероятности распределения, удовлетворяющая условиям

$$f_0(x) \geq 0, \quad f_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx = 1; \tag{1.5}$$

$\chi(x,t) = \nabla \cdot X(x,t)$ — дивергенция векторного поля системы (1.1); $X(x,t) \in C^1(G \to \mathbb{R}^n)$; $\chi(x(x_0,t_0,t),t)$ — дивергенция векторного поля системы ОДУ (1.1), вычисленная вдоль ее решения $x(t) = x(x_0,t_0,t)$.

Ансамблем Гиббса [1] назовем множество идентичных систем вида (1.1) с одинаковыми правыми частями и отличающимися друг от друга лишь начальными состояниями. Итак, если систему ОДУ (1.1) трактовать как закон движения изображающей точки $x$ в $\mathbb{R}^n$, то ансамблю Гиббса системы (1.1) будет соответствовать в $\mathbb{R}^n$ ансамбль изображающих точек. Пусть $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ — компактное множество положительной меры Лебега $mes\Omega_{t_0} > 0$, занимаемое ансамблем изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в начальный момент времени $t = t_0$. Каждая из изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$, двигаясь по траекториям системы ОДУ (1.1), переместится за время от $t_0$ до $t$ в новое состояние

$x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 \in \Omega_t \subset \Omega$, где $T(t, t_0)$ — оператор сдвига [3] по траекториям системы ОДУ (1.1); $\Omega_t = \{x(x_0, t_0, t) = T(t, t_0)x_0 : x_0 \in \Omega_{t_0}\}$ — образ множества $\Omega_{t_0}$ в силу системы ОДУ (1.1); $\Omega_t = T(t, t_0)\Omega_{t_0}$. Функцию $f_0(x)$, обладающую свойствами (1.5) будем трактовать как плотность вероятности распределения ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в множестве $\Omega_{t_0}$. Текущее значение функции плотности вероятности распределения $f(x, t) \geq 0$ определяется из решения задачи Коши (1.2) и характеризует состояние ансамбля изображающих точек Гиббса системы ОДУ (1.1) в образе $\Omega_t$ множества $\Omega_{t_0}$. Будем говорить, что для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение А, если $X_i(x, t) \in C^{(1,1)}_{xt}(G)$, решения последней продолжимы до бесконечности и остаются в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ при их продолжении как вправо, так и влево по $t$. Ниже будем использовать следующий результат.

**Теорема 1.** [5] *Если для системы ОДУ (1.1) выполняется предположение А, причем ансамбль изображающих точек Гиббса последней характеризуется в множестве $\Omega_{t_0} \subset \Omega$ плотностью распределения $f_0(x)$ со свойствами (1.5), то для всех $t \in I$ существует единственное классическое решение задачи Коши (1.2)–(1.4), обладающее свойствами*

$$f(x, t) \geq 0, f(x, t) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x, t)dx = 1,$$

$$f(x(x_0, t_0, t), t) = f(x(t_0), t_0) \cdot exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(x_0, t_0, \tau), \tau)d\tau\Big\},$$

$$f(x, t) = f_0(p(x, t, t_0)) \cdot exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} \chi(x(p(x, t, t_0), t_0, \tau), \tau)d\tau\Big\}, \qquad (1.6)$$

*где $p(x, t, t_0) \triangleq T^{-1}(t, t_0)x = x_0$.*

Будем говорить, что система ОДУ (1.1) имеет решение в целом для $t \geq t_0$, если для почти всех изображающих точек $x_0 \in \Omega_{t_0}$ (т. е. за исключением точек некоторого множества нулевой меры Лебега) решение и $x(t) = x(x_0, t_0, t)$ системы ОДУ (1.1) нелокально продолжимо [3] на $I$. Тем самым, каждая точка $x_0 \in \Omega_{t_0}$ кроме точек некоторого множества нулевой меры Лебега не уходит в бесконечность за конечное время. С использованием соотношений (1.6) введем понятие $\varepsilon$-статистической устойчивости решения $x(x_0, t_0, t)$ системы ОДУ (1.1)

**Определение 1.** *Решение $x(t) = x(x_0, t_0, t)$ системы ОДУ (1.1) назовем $\varepsilon$-статистически устойчивым, если для нее существует решение* *в целом и для произвольного $\varepsilon \geq 0$ текущее значение функции плотности вероятности распределения $f(x,t)$, удовлетворяющее уравнению Лиувилля, обладает предельными свойствами:*

$$\lim_{t\to\infty} f(\hat{x}(t),t) = \infty, \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t),t) = 0; \quad |\hat{x}(t) - x_\varepsilon(t)| = \varepsilon, \forall t \in I, \tag{1.8}$$

*где* $\hat{x}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x \cdot f(x,t)dx$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ *и хотя бы одно* $\varepsilon_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Начальное распределение $f(x,t_0) = f_0(x)$ считается фиксированным с начальным условием $x(t)\Big|_{t=t_0} = x_0$, причем

$$x_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x \cdot f(x,t_0)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x \cdot f_0(x)dx.$$

**Пример 1.** Рассмотрим нелинейную систему ОДУ

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -3x_1^2 - x_2, \quad x_1(t)|_{t=0} = x_1^0, \quad x_2(t)|_{t=0} = x_2^0, \tag{1.9}$$

с начальным законом распределения $f_0(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi} exp(-(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2)$. Покажем, что система (1.9) обладает $\varepsilon$-статистически устойчивым решением. Для этого воспользуемся определением и проверим справедливость формул (1.7),(1.8). Итак, построим функцию плотности вероятности распределения для системы (1.9) и вычислим соответствующие пределы этой функции.

Текущее значение функции плотности вероятности распределения $f(x_1,x_2,t)$ имеет вид

$$f(x_1,x_2,t) = 1/\pi \cdot exp\{2t - (x_1e^t - x_1^0)^2 - (x_2e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - x_2^0)^2\}.$$

Для нахождения предела (1.7) необходимо вычислить $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ для системы ОДУ (1.9). Итак, имеем

$$\hat{x}_1(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 exp\{2t - (x_1e^t - x_1^0)^2 - (x_2e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - \\ - x_2^0)^2\}dx_1dx_2 = x_1^0 e^{-t},$$

$$\hat{x}_2(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 exp\{2t - (x_1e^t - x_1^0)^2 - (x_2e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - \\ - x_2^0)^2\}dx_1dx_2 = e^{-t}(x_2^0 - 3/2 - 3(x_1^0)^2) + 3/2e^{-2t}(1 + (x_1^0)^2).$$

Получим следующее выражение

$$\lim_{t\to\infty} f(\hat{x_1}, \hat{x_2}, t) = \lim_{t\to\infty} 1/\pi \cdot exp\left(2t - 9/4\left(e^{-t} - 1 - e^{-t}(x_1^0)^2\right)^2\right) = \infty,$$

Далее, полагая, что $|\hat{x_1}(t) - x_1(t)| = \varepsilon_1$ и $|\hat{x_2}(t) - x_2(t)| = \varepsilon_2$, получим

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t), t) = \lim_{t\to\infty} 1/\pi \cdot exp\Bigg(2t - {\varepsilon_1}^2 e^{2t} - \Big(\varepsilon_2 e^t - 3/2 - 6\varepsilon_1 x_1^0 +$$

$$+3/2e^{-t}(1 - (x_1^0)^2) + e^t(6\varepsilon_1 x_1^0 - 3\varepsilon_1^2) + 3\varepsilon_1^2 e^{2t})\Big)^2\Bigg) = 0.$$

Для обоснования целесообразности введения понятия $\varepsilon$-статистической устойчивости решения системы ОДУ можно сказать следующее. Во-первых, это понятие носит явный вероятностный смысл, поэтому позволяет оперировать сразу с множеством траекторий движения системы ОДУ, начальные значения которой лежат в заданной области. Во-вторых, для проверки критерия $\varepsilon$-статистической устойчивости достаточно одной функции $f(x, t)$, которая хоть и удовлетворяет уравнению в частных производных, но это уравнение линейное, а кроме того ищется не общее решение, а решение задачи Коши. В общем случае $\varepsilon$-устойчивость не эквивалентна асимптотической устойчивости по Ляпунову. Однако между этими понятиями имеется тесная связь, позволяющая сформулировать необходимое и достаточное условие $\varepsilon$-устойчивости решения системы ОДУ (1.1).

Важными частными случаями для различных приложений являются линейная автономная система ОДУ, линейная неавтономная система однородный и неоднородный случаи. Далее они будут рассматриваться подробно.

## 2. Статистическая устойчивость линейной автономной системы

Рассмотрим линейную автономную систему ОДУ:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t)|_{t=0} = x^0, \tag{2.1}$$

и соответствующее ей уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) + \nabla \cdot [Ax \cdot f(x, t)] = 0,$$

$$f(x, t)|_{t=0} = (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\{-1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\}, \tag{2.2}$$

где $x^0, x \in \mathbb{R}^n$. Решением задачи Коши (2.2) будет функция плотности вероятности распределения $f(x,t)$ вида

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\Big\{ -1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot e^{-2At} - SpA \cdot t \Big\}. \qquad (2.3)$$

Здесь $e^{At} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \frac{(At)^p}{p!}$ — экспоненциал матрицы $At$ [2]. Для системы ОДУ (2.1) предельное свойство (1.7) запишется в виде

$$\lim_{t\to\infty} f(\hat{x}(t),t) = \lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\Big\{ -1/2 \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i{}^2 \cdot e^{-2At} \Big\} \cdot exp\Big\{ -SpA \cdot t \Big\} = \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} 1/2 \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i{}^2 \cdot e^{-2At} + \lim_{t\to\infty} SpA \cdot t = -\infty.$$

В полученном соотношении первый из пределов равен нулю как произведение величины ограниченной и величины бесконечно малой. Таким образом, окончательно получим

$$\lim_{t\to\infty} SpA \cdot t = -\infty. \qquad (2.4)$$

Для нахождения предела (1.8) преобразуем функцию плотности вероятности распределения $f(x,t)$, учитывая что $dete^{At} = e^{t \cdot SpA} \neq 0$

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{dete^{At}} \cdot exp\Big\{ \frac{1}{2} \frac{1}{det\Big(e^{At}\Big)^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t) x_i(t) x_j(t) \Big\},$$

где $e^{-At} = \frac{1}{dete^{At}} \cdot \mathbb{C}$, а матрица $\mathbb{C}$ такая, что $\mathbb{C}^2 = \{c_{ij}(t)\}$, коэффициентами которой являются сходящиеся степенные ряды. Обозначим также $\frac{1}{dete^{At}} = \gamma(t)$, тогда имеем

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \gamma(t) \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \gamma(t)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t) x_i(t) x_j(t) \Big\}. \qquad (2.5)$$

Таким образом, предел (1.8) для системы ОДУ (2.1) будет иметь вид

$$\lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \gamma(t) \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \gamma(t)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t) (\hat{x}_i(t) + \varepsilon_i)(\hat{x}_j(t) + \varepsilon_j) \Big\} = 0. \qquad (2.6)$$

Итак, решение линейной автономной системы ОДУ (2.1) называется $\varepsilon$-статистически устойчивым, если для нее существует решение в целом и для произвольного $\varepsilon \geq 0$ текущее значение функции плотности вероятности распределения (2.5) удовлетворяет задаче Коши (2.2) и обладает предельными свойствами (2.4) и (2.6).

**Пример 2.** Рассмотрим линейную систему ОДУ

$$\dot{x}_1(t) = 2x_2,\ \dot{x}_2(t) = -x_2,\ x_1(t)|_{t=0} = \tau_1,\ x_2(t)|_{t=0} = \tau_2, \tag{2.7}$$

с начальной плотностью распределения $f_0(x_1, x_2) = 1/\pi e^{-x_1{}^2 - x_2{}^2}$. Покажем, что данная линейная система является $\varepsilon$-устойчивой.

Найдем решение системы (2.7) и разрешим его относительно начальных состояний

$$x_1(t) = -2\tau_2 e^{-t} + \tau_1 + 2\tau_2, x_2(t) = \tau_2 e^{-t},$$

$$\tau_1 = x_1(t) + 2x_2(t)(1 - e^t), \tau_2 = x_2(t)e^t.$$

Таким образом, текущая функция плотности вероятности распределения может быть записана

$$f(x_1, x_2, t) = 1/\pi exp(t - (x_1 + 2x_2(1 - e^t))^2 - x_2{}^2 e^{2t}).$$

Предельное свойство (2.4) для системы ОДУ (2.7) выполнено:

$$\lim_{t\to\infty}(-t) = -\infty.$$

Остается найти средние и предел (2.6).

$$\hat{x}_1(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^t \cdot x_1 \cdot e^{-(x_1+2x_2(1-e^t))^2 - x_2{}^2 e^{2t}} dx_1 dx_2 =$$

$$= 1/\pi e^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot e^{-(x_1+2x_2(1-e^t))^2} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_2{}^2 e^{2t}} dx_2 =$$

$$= 2/\sqrt{\pi} e^t (e^t - 1) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot e^{-x_2{}^2 e^{2t}} dx_2 = 0.$$

$$\hat{x}_2(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^t \cdot x_2 \cdot e^{-(x_1+2x_2(1-e^t))^2 - x_2{}^2 e^{2t}} dx_1 dx_2 =$$

$$= 1/\pi e^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1+2x_2(1-e^t))^2} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot e^{-x_2{}^2 e^{2t}} dx_2 = 0.$$

Таким образом, $x_1(t) = \hat{x}_1(t) + \varepsilon_1 = \varepsilon_1$, и $x_2(t) = \hat{x}_2(t) + \varepsilon_2 = \varepsilon_2$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, t) = 1/\pi \lim_{t\to\infty} e^t \cdot e^{-(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2(1-e^t))^2 - \varepsilon_2{}^2 e^{2t}} = 0.$$

Итак, решение линейной системы ОДУ (2.7) $\varepsilon$-статистически устойчиво.

**Теорема 2.** *Решение линейной автономной системы ОДУ (2.1) $\varepsilon$-статистически устойчиво тогда и только тогда, когда*

$$\chi(x,t) \le r < 0.$$

*Доказательство.* Необходимость. Если линейная автономная система ОДУ (2.1) $\varepsilon$-статистически устойчива, то выполнено условие (2.6)

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot SpA = -\infty,$$

откуда следует, что $SpA < 0$, а поскольку дивергенцией линейной системы ОДУ (2.1) является функция $\chi(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = SpA$, то $\chi(x,t) < 0$.

Достаточность. Если дивергенция системы ОДУ (2.1) отрицательно определена, $\chi(x,t) \le r < 0$, то отсюда сразу следует справедливость формулы (2.4). Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость соотношения (2.6).

Рассмотрим предел функции плотности вероятности распределения (2.5):

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = \lim_{t\to\infty} f_0(x) \cdot e^{-\int\limits_0^t SpAdt} = +\infty,$$

так как $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t\cdot SpA} = +\infty$, следовательно

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = +\infty. \tag{2.8}$$

Используя полученное соотношение, вычислим $\lim\limits_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t), t)$ для линейной системы ОДУ (2.1).

$$\lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \gamma(t) \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2}\gamma(t)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)(\hat{x}_i(t)+\varepsilon_i)(\hat{x}_j(t)+\varepsilon_j)\Big\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(2\pi)^{-n/2}\cdot\gamma(t)}{exp\Big\{ -\frac{1}{2}\gamma(t)^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}(t)(\hat{x}_i(t)+\varepsilon_i)(\hat{x}_j(t)+\varepsilon_j)\Big\}}.$$

Применяя правило Лопиталя и учитывая, что $\gamma'(t) = -\gamma(t) \cdot SpA$, получим

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t), t) = \lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \gamma(t) \cdot exp\Big\{\frac{1}{2}\gamma(t)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(t)(\hat{x}_i(t) + \\ +\varepsilon_i)(\hat{x}_j(t) + \varepsilon_j)\Big\} = 0.$$

□

**Следствие 1.** *Решение линейной автономной системы ОДУ (2.1) является $\varepsilon$-статистически устойчивым тогда и только тогда, когда оно является асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

## 3. Статистическая устойчивость линейной неавтономной системы ОДУ

Рассмотрим линейную неавтономную систему ОДУ

$$\dot{x}(t) = A(t)x, \quad x(t)|_{t=0} = x^0, \tag{3.1}$$

и соответствующее ей уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot [A(t)x \cdot f(x,t)] = 0, \tag{3.2}$$

$$f(x,t)|_{t=0} = f_0(x) = (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\},$$

где $x^0, x \in \mathbb{R}^n$. Решением задачи Коши (3.2) будет функция плотности вероятности распределения $f(x,t)$ вида

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot \Big(\Phi^{-1}(t)\Big)^2 - \int_0^t SpA(\tau)d\tau\Big\} = \\ = (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{W(t)^2}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2(t)\Psi^2(t)\Big\}, \tag{3.3}$$

где $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы ОДУ (3.1), $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{W(t)} \cdot \Psi(t)$, $W(t) \neq 0$ — определитель Вронского для системы (3.1).

Решение линейной неавтономной системы ОДУ (3.1) называется $\varepsilon$-статистически устойчивым, если для системы (3.1) существует решение в целом и для произвольного $\varepsilon \geq 0$ текущее значение функции плотности вероятности распределения обладает предельными свойствами

$$\lim_{t\to\infty} f(\hat{x}(t),t) = \lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{W(t)^2} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i)^2(t)\Psi^2(t) \Big\} = \\ = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t),t) = \lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{W(t)^2} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i(t) + \\ +\varepsilon_i)^2\Psi^2(t) \Big\} = 0.$$

Рассмотрев предел функции плотности вероятности распределения, вычисленный на средних, можно прийти к следующему выводу:

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} exp\Big\{ \int_0^t SpA(\tau)d\tau \Big\} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_0^t SpA(\tau)d\tau = -\infty. \tag{3.4}$$

**Теорема 3.** *Для того чтобы решение линейной неавтономной (однородной) системы ОДУ было $\varepsilon$-статистически устойчивым, достаточно, чтобы дивергенция системы ОДУ была отрицательно определена: $\chi(x,t) \leq r < 0$.*

*Доказательство.* Если дивергенция является отрицательно определенной функцией, то сразу следует выполнение первого предельного равенства для функции плотности вероятности

$$\chi(x,t) = SpA(t) < 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_0^t SpA(\tau)d\tau = -\infty.$$

Теперь покажем справедливость второго предельного равенства, учитывая, что $\frac{d}{dt}W(t) = W(t) \cdot SpA(t)$.

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t),t) = \lim_{t\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{W(t)^2} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i(t) + \\ +\varepsilon_i)^2\Psi^2(t) \Big\} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{d}{dt}\Big( (2\pi)^{-n/2} \cdot 1/W(t) \Big)}{\frac{d}{dt}\Big( exp\Big\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{W(t)^2} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i(t) + \varepsilon_i)^2\Psi^2(t) \Big\} \Big)} = 0.$$

$\square$

Тем самым, асимптотическая устойчивость по Ляпунову является достаточным условием $\varepsilon$-статистической устойчивости для линейной однородной системы ОДУ.

Теперь рассмотрим линейную неавтономную систему ОДУ:

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \quad x(t)|_{t=0} = x^0. \tag{3.5}$$

Система (3.5) имеет известное решение, с помощью которого находим текущую функцию плотности вероятности распределения:

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot exp\Big\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Big\{\Phi^{-1}(t)\Big\}^2 \cdot$$
$$\cdot\Big(x_i(t) - \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)h(s)ds\Big)^2 - \int\limits_0^t SpA(s)ds\Big\}.$$

В полученном соотношении нужно учесть, что $\Phi^{-1}(t) = \frac{1}{W(t)} \cdot \Psi(t)$, $W(t) = \int\limits_0^t SpA(s)ds \neq 0$, тогда окончательный вид функции плотности вероятности распределения будет следующий

$$f(x,t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot \frac{1}{W(t)} \cdot exp\Bigg\{ -\frac{1}{2W^2(t)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Psi^2(t)\Big(x_i(t) -$$
$$-\Phi(t)\int\limits_0^t \Psi(s) \cdot W^{-1}(s)h(s)ds\Big)^2\Bigg\}.$$

Решение системы (3.5) называется $\varepsilon$-статистически устойчивым, если система имеет решение в целом и для $\forall\varepsilon \geq 0$ текущее значение функции плотности вероятности распределения обладает предельными свойствами:

$$\lim_{t\to\infty} f(\hat{x}(t),t) = \lim_{t\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\frac{1}{W(t)}exp\Bigg\{\frac{-1}{2W^2(t)} \cdot \sum_{i=1}^{n}\Psi^2(t) \cdot$$
$$\cdot\Big(\hat{x_i}(t) - \Phi(t)\int\limits_0^t \Psi(s) \cdot W^{-1}(s)h(s)ds\Big)^2\Bigg\} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t SpA(s)ds = -\infty, \tag{3.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon(t),t) = \lim_{t\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\frac{1}{W(t)}exp\Bigg\{-\frac{1}{2W^2(t)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Psi^2(t)\cdot$$
$$\cdot\Big(\hat{x}_i(t)+\varepsilon_i-\Phi(t)\int\limits_0^t\Psi(s)\cdot W^{-1}(s)h(s)ds\Big)^2\Bigg\}. \quad (3.7)$$

**Пример 3.** Рассмотрим линейную неоднородную систему ОДУ

$$\dot{x}_1(t) = t\cdot x_1(t)+t, \quad \dot{x}_2(t) = -2t\cdot x_2(t)+t, \quad (3.8)$$
$$x_1(t)|_{t=0}=0, \quad x_2(t)|_{t=0}=0, \quad (3.9)$$

с начальной функцией плотности вероятности распределения

$$f_0(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-1/2{x_1}^2-1/2{x_2}^2}$$

и покажем, что она обладает $\varepsilon$-статистической устойчивым решением.

Решением системы (3.9) будут функции

$$x_1(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}-1, \;\; x_2(t)=\frac{1}{2}\Big(1-e^{-t^2}\Big),$$

а текущее значение функции плотности вероятности распределения запишется следующим образом

$$f(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\cdot exp\Bigg(\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\Big(x_1e^{-\frac{1}{2}t^2}+e^{-\frac{1}{2}t^2}-1\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(x_2e^{t^2}-\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{1}{2}\Big)^2\Bigg).$$

Проверим предельное равенство (3.6) для системы (3.9).

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t SpA(s)ds=\lim_{t\to\infty}\int\limits_0^t(-s)ds=\lim_{t\to\infty}\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)=-\infty.$$

Для проверки следующего предельного равенства вычислим средние значения.

$$\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot exp\Bigg( -\frac{1}{2}\Big(x_1 e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1\Big)^2 - \\ -\frac{1}{2}\Big(x_2 e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2\Bigg) dx_1 dx_2 = \\ = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot exp\Big( -\frac{1}{2}\Big(x_1 e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1\Big)^2\Big) dx_1 \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp\Big( -\frac{1}{2}\Big(e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2\Big) dx_2 = e^{\frac{1}{2}t^2} - 1,$$

$$\hat{x}_2(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot exp\Bigg( -\frac{1}{2}\Big(x_1 e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1\Big)^2 - \\ -\frac{1}{2}\Big(x_2 e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2\Bigg) dx_1 dx_2 = \\ = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2}t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} exp\Bigg( -\frac{1}{2}\Big(x_1 e^{-\frac{1}{2}t^2} + e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1\Big)^2\Bigg) dx_1 \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 exp\Bigg( -\frac{1}{2}\Big(x_2 e^{t^2} - \frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2\Bigg) dx_2 = \frac{1}{2}\Big(1 - e^{-t^2}\Big).$$

Таким образом, $x_1(t) = \hat{x}_1(t)$ и $x_2(t) = \hat{x}_2(t)$, следовательно, $|x_1(t) - \hat{x}_1(t)| = 0$ и $|x_2(t) - \hat{x}_2(t)| = 0$. Теперь проверим предельное равенство (3.7).

$$\lim_{t\to\infty} f(0,0,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{t\to\infty} exp\Bigg(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{1}{2}t^2} - 1\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}\Big)^2\Bigg) = 0.$$

**Теорема 4.** *Для того чтобы решение линейной неавтономной (неоднородной) системы ОДУ (3.5) было $\varepsilon$-статистически устойчивым, достаточно, чтобы дивергенция системы (3.5) была отрицательно определенной функцией*

Доказательство теоремы (4) аналогично доказательству теоремы (3)

Таким образом, асимптотическая устойчивость по Ляпунову является достаточным условием $\varepsilon$-статистической устойчивости и в случае неоднородной линейной системы ОДУ.

## 4. Необходимые и достаточные условия $\varepsilon$-статистической устойчивости решения системы ОДУ

Рассмотрим дисперсию системы ОДУ (1.1)

$$D_{x_i}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_i(t) - \hat{x}_i(t))^2 f(x,t)dx. \tag{4.1}$$

**Теорема 5.** *Для того чтобы решение системы ОДУ (1.1) было $\varepsilon$-статистически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to\infty} D_{x_i}(t) = 0. \tag{4.2}$$

*Доказательство.* Если система (1.1) обладает $\varepsilon$-статистической устойчивостью решения, то выполняются предельные равенства (1.7),(1.8). Рассмотрим предел дисперсии системы (1.1)

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_i(t) - \hat{x}_i(t))^2 f(x,t)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} {\varepsilon_i}^2 \cdot f(x_\varepsilon, t)dx =$$

$$= {\varepsilon_i}^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to\infty} f(x_\varepsilon, t)dx = 0.$$

Таким образом, необходимость доказана. Предположим, что нелинейная система ОДУ (1.1) не обладает $\varepsilon$-статистической устойчивостью решения, но предел ее дисперсии равен нулю, т. е. равенство (4.2) справедливо. Тогда из предположения следует, что расстояние между $x_i(t)$ и $\hat{x}_i(t)$ не является фиксированным, т. е. $|\hat{x}_i(t) - x_i(t)| > \varepsilon_i$, следовательно, $|\hat{x}_i(t) - x_i(t)| = \xi_i(t)$, причем $\lim\limits_{t\to\infty} \xi_i(t) = +\infty$.

Теперь вычислим предел дисперсии, учитывая предположение

$$\lim_{t\to\infty} D_{x_i}(t) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_i(t) - \hat{x}_i(t))^2 f(x,t)dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i(t)^2 f(x,t)dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \xi_i(t)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = \lim_{t\to\infty} \xi_i(t)^2 \cdot 1 = +\infty.$$

Получаем противоречие, поскольку предел дисперсии должен быть равен нулю. □

**Пример 4.** Рассмотрим нелинейную систему ОДУ 1.9

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -3x_1^2 - x_2, \quad x_1(t)|_{t=0} = x_1^0, \quad x_2(t)|_{t=0} = x_2^0,$$

с начальным законом распределения $f_0(x_1, x_2) = 1/\pi \cdot exp(-(x_1 - x_1^0)^2 - (x_2 - x_2^0)^2)$ Покажем, что система (1.9) обладает $\varepsilon$-статистически устойчивым решением, используя условие (4.2). Текущее значение функции плотности вероятности распределения найдено в виде

$$f(x_1, x_2, t) = 1/\pi \cdot exp\{2t - (x_1 e^t - x_1^0)^2 - (x_2 e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - x_2^0)^2\}.$$

Вычислим дисперсии системы ОДУ (1.9):

$$D_{x_1}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 exp\{2t - (x_1 e^t - x_1^0)^2 - (x_2 e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - \\ - x_2^0)^2\} dx_1 dx_2 - (x_1^0 e^{-t})^2 = 1/2e^{-2t},$$

$$D_{x_2}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2^2 exp\{2t - (x_1 e^t - x_1^0)^2 - (x_2 e^t + 3x_1^2(e^{2t} - e^t) - \\ - x_2^0)^2\} dx_1 dx_2 - \Big(e^{-t}(x_2^0 - 3/2 - 3(x_1^0)^2) + 3/2e^{-2t}(1 + (x_1^0)^2\Big) = \\ = e^{-2t}\phi_1 + e^{-3t}\phi_2 + e^{-4t}\phi_3,$$

где

$$\phi_1 = (1 + 3x_1^0)^2 + 3(3/2 - 2x_1^0)^2 - 9/4 - 6x_1^0 x_2^0 (x_1^0 - 1) - (x_2^0)^2 (x_2^0 + 1),$$

$$\phi_2 = -9(1 + x_1^0)^2 - 3(x_1^0)^2 (15/2 - x_2^0),$$

$$\phi_3 = 9/2 + 45/2(x_1^0)^2 + 27/4(x_1^0)^4.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{t\to\infty} D_{x_1}(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} D_{x_2}(t) = 0$. Таким образом, для нелинейной системы ОДУ (1.9) справедлива теорема (5), т.е. система (1.9) обладает $\varepsilon$-статистически устойчивым решением.

Для системы ОДУ (1.9), используя результат работы [5], можно показать, что текущее значение функции плотности вероятности распределения достигает своего максимума на решении системы.

**Пример 5.** Рассмотрим систему ОДУ (Эффект Перрона) [4]

$$\dot{x_1} = -x_2, \quad \dot{x_2} = x_2(sin(lnt) - cos(lnt) - 2),$$

$$x_1|_{t=1} = x_1^0, \quad x_2|_{t=1} = x_2^0. \tag{4.3}$$

Для системы (4.3) в работе [5] было показано, что максимум текущего значения функции плотности вероятности $f(x_1, x_2, t)$ достигается на решении системы. Покажем, что для системы (4.3) выполняется теорема (5) и последняя обладает $\varepsilon$-статистически устойчивым решением.

Текущее значение функции плотности вероятности распределения системы (4.3) задается в виде

$$f(x_1, x_2, t) = 1/\pi exp\Big( -(x_1 e^{t-1} - x_1^0)^2 - (x_2 exp(2(t-1) - tsin(lnt)) - \\ - x_2^0)^2\Big) \cdot exp\Big(3(t-1) - tsin(lnt)\Big).$$

Вычислим средние значения и соответствующие дисперсии:

$$\hat{x_1}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_1 exp\Big( -(x_1 e^{t-1} - x_1^0)^2 - (x_2 exp(2(t-1) - \\ -tsin(lnt)) - x_2^0)^2\Big) \cdot exp\Big(3(t-1) - tsin(lnt)\Big) dx_1 dx_2 = x_1^0 \cdot e^{1-t}$$

$$\hat{x_2}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_2 exp\Big( -(x_1 e^{t-1} - x_1^0)^2 - (x_2 exp(2(t-1) - t\cdot \\ \cdot sin(lnt)) - x_2^0)^2\Big) \cdot exp\Big(3(t-1) - tsin(lnt)\Big) dx_1 dx_2 = x_2^0 \cdot e^{-(2(t-1) - t\cdot sin(lnt))},$$

$$D_{x_1}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} {x_1}^2 exp\Big( -(x_1 e^{t-1} - x_1^0)^2 - (x_2 exp(2(t-1) - \\ -t\cdot sin(lnt)) - x_2^0)^2\Big) \cdot exp\Big(3(t-1) - tsin(lnt)\Big) dx_1 dx_2 - \Big(x_1^0 \cdot e^{-(t-1)}\Big)^2 = \\ = 1/2 e^{-2(t-1)},$$

$$D_{x_2}(t) = 1/\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} {x_2}^2 exp\Big( -(x_1 e^{t-1} - x_1^0)^2 - (x_2 exp(2(t-1) - tsin(lnt)) - \\ - x_2^0)^2\Big) \cdot exp\Big(3(t-1) - t\cdot sin(lnt)\Big) dx_1 dx_2 - \Big(x_2^0 \cdot e^{-(2(t-1) - t\cdot sin(lnt))}\Big)^2 = \\ = 1/2 e^{-2(t(2-sin(lnt))-2)}.$$

Легко проверить, что $\lim\limits_{t\to\infty} D_{x_1}(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} D_{x_2}(t) = 0$, следовательно, согласно теореме (5) решение системы ОДУ (4.3) $\varepsilon$-статистически устойчиво.

## Список литературы

1. Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики / Дж. В. Гиббс. – М. : Л. : Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1946. – 203 с.

2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – 2-е изд. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 480 с.
3. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 331 с.
4. Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения / Г. А. Леонов. – СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2004. – 144 с.
5. Рудых Г. А. Свойства интегральной кривой и решения неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Г. А. Рудых, Д. Я. Киселевич // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, 2012. – № 2. – С. 7–17. – (Физико-математические науки).
6. Steeb W.H Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles / W. H. Steeb // Physica. – 1979. – Vol. 95. – P. 181–190.

**Киселевич Дарья Яковлевна**, аспирант, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210
(e-mail: `dariakis@mail.ru`)

**Рудых Геннадий Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210

---

**D. J. Kiselevich, G. A. Rudykh**

## Stability of Systems with Random Initial Data

**Abstract**. In this paper we consider a nonlinear non-autonomous system ordinary differential equations (ODE) and the corresponding Liouville equation. Initial data of the ODE system is random and lie in a given region with a known initial distribution law. For non-linear non-autonomous ODE system introduces the concept of $\varepsilon$ is a statistical stability of the solution, which allows us to study the behavior of solutions of the system of ODE's with nondeterministic initial data. Such a study is carried out using the probability density function of distribution of the ensemble of data points in the ODE system. The notion of $\varepsilon$ is a statistical stability of the solution allows to operate directly from the set of trajectories movement of the ODE system, the initial values ??of which lie in a given area, as well as to test the criterion $\varepsilon$ is a statistical stability rather a function of the probability density distribution of the ensemble of data points in the Gibbs ODE system, which, while satisfying partial differential equation, but it is a linear equation, and moreover sought not the total solution, and the solution of the Cauchy problem. To introduce the notion of $\varepsilon$ is a statistical stability of the solution requires that the nonlinear ODE system has a solution as a whole, ie that the trajectories of the system does not go to infinity in finite time. In the general case, $\varepsilon$ is a statistical stability is not equivalent to the asymptotic Lyapunov stability of solutions. However, between these concepts has close relationship allows us to formulate the necessary and sufficient condition $\varepsilon$ is a statistical stability of the solution for a linear autonomous system of ODE and sufficient condition for the linear non-autonomous system of ODE (for homogeneous and inhomogeneous cases). The study of the dispersion of the nonlinear non-autonomous system of ODE was obtained A necessary and sufficient condition for $\varepsilon$ is a statistical stability of the solution of the ODE system. All the results are illustrated in the examples of content.

Известия Иркутского государственного университета.
2014. Т. 10. Серия «Математика». С. 44–61

**Keywords:** nonlinear ODE system, the Liouville equation, Gibbs ensemble, probability density function of the distribution, the statistical stability of the solution.

## References

1. Gibbs J.V. Basic principles of statistical mechanics (in Russian). M.-L., State. Publ. tech. theory. lit., 1946. 203 p.
2. Demidovich B.P. Lectures on the mathematical theory of stability (in Russian). 2nd ed. M., Izd. University Press, 1998. 480 p.
3. Krasnosel'skii M.A. Translation operator of the differential equations(in Russian). M., Nauka, 1966. 331 p.
4. Leonov G.A. Strange attractors and classical theory Stability of Motion (in Russian). St. Petersburg, Publ. St. Petersburg State University, 2004. 144 p.
5. Rudykh G.A., Kiselevich D.J. Properties integral curve and solutions nonautonomous system of ordinary differential equations (in Russian). *Bulletin of the Samara State Technical University*, 2012, no. 2, pp. 7-17. (Physics and Mathematics).
6. Steeb W.H Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles. *Physica*, 1979, vol. 95A, pp.181-190.

**Kiselevich Darya Yakovlevna**, Postgraduate, Institute of Mathematics, Economics and Informatics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210 (e-mail: dariakis@mail.ru)

**Rudykh Gennady Alekseevich**, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics, Economics and Informatics, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210