Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 88—96

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.55+517.96

Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений *

Т. И. Некрасова
Сибирский федеральный университет

Аннотация. В работе исследуются разностные уравнения (рекуррентные соотношения) в рациональных конусах целочисленной решетки. Найдено соотношение между производящими функциями начальных данных и производящими функциями решения задачи Коши для многомерного разностного уравнения. Доказано, что условие алгебраичности (рациональности) производящей функции начальных данных является достаточным для алгебраичности (рациональности) производящей функции решения.

Ключевые слова: многомерные разностные уравнения, задача Коши, производящая функция.

1. Введение

При изучении комбинаторных объектов в перечислительном анализе важную роль играет их классификация по некоторым признакам. В случае применения метода производящих функций естественной представляется классификация в зависимости от класса, которому принадлежит производящая функция. В иерархии, предложенной Стенли [4], производящие функции (ряды) выстроены в следующую цепочку:

$$\{\text{рациональные}\}\subset\{\text{алгебраические}\}\subset\{\text{D-финитные}\}.$$

Теория разностных (рекуррентных) уравнений является традиционной частью комбинаторного анализа, поэтому естественным образом возникает задача о принадлежности производящих функций решений разностного уравнения к одному из указанных выше классов (см., например, [5]) .

* Работа выполнена при финансовой поддержке МО и науки РФ, грант 1.34.11.

Для линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами одной переменной известно (см.[3], [6]), что производящая функция всякого решения является рациональной.

В многомерном случае ситуация значительно сложнее. Так, производящий ряд решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами в общем случае является расходящимся. Например, решением разностного уравнения

$$f(x_1+1, x_2+1) - f(x_1+1, x_2) - f(x_1, x_2+1) + f(x_1, x_2) = 0$$

является функция вида $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$, где φ и ψ — произвольные функции целочисленного аргумента, а соответствующий производящий ряд будет, вообще говоря, расходящимся. Для разностных уравнений в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ в [5] приведен пример, показывающий, что если производящая функция начальных данных рациональна, то производящая функция соответствующего решения может быть не рациональной и даже не D-финитной. В работе [1] приведены некоторые достаточные условия рациональности производящей функции решения.

В отличие от [5] и [1], в данной работе рассматриваются разностные уравнения в рациональных конусах целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$. В теореме 1 приведено соотношение между производящими функциями начальных данных и производящими функциями решения задачи Коши, а в теореме 2 доказано, что условие алгебраичности (рациональности) производящей функции начальных данных является достаточным для алгебраичности (рациональности) производящей функции решения.

2. Об алгебраичности производящих функций решений разностных уравнений в рациональных конусах целочисленной решетки

Введем необходимые обозначения и определения.

Определение 1. *Рациональным конусом в $\mathbb{Z}^n$ будем называть множество K точек n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, представимых линейной комбинацией s векторов $a^1, \ldots, a^s \in \mathbb{Z}^n$:*

$$K = \{x : x = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_s a^s,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \ldots, s\},$$

где $\mathbb{Z}_+$ — целые неотрицательные числа.

Ограничимся случаем *симплициальных конусов*, т. е. таких, в которых каждый элемент выражается через образующие $a^1, \ldots, a^s$ *единственным* образом. В частности, это означает, что векторы $a^1, \ldots, a^s$ линейно независимы и их число $s \leq n$.

Обозначим $A = \{\alpha\}$ — некоторое фиксированое конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки, $A \subset K$ и рассмотрим однородное разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha f(x+\alpha) = 0,\ x \in K, \tag{2.1}$$

где $c_\alpha-$коэффициенты (постоянные) уравнения.

Определение 2. *Характеристическим многочленом уравнения 2.1 называется многочлен Лорана* $P(z) = \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha z^\alpha$.

Ниже нас будут интересовать разложения в ряд функции $\frac{1}{P(z)}$. Как и в одномерном случае, рациональная функция разлагается в ряд Лорана многими способами. Для $n > 1$ для описания этих разложений удобно использовать понятия многогранника Ньютона многочлена и амебы алгебраической поверхности (см. [7]).

Определение 3. *Многогранником Ньютона* N_P *многочлена* P *называется выпуклая оболочка в* $\mathbb{R}^n$ *элементов множества* A.

Определение 4. *Амебой* $\mathcal{A}_V$ *алгебраической поверхности* V *называется образ множества нулей* V *многочлена* $P(z)$ *при отображении*

$$Log\ :\ z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\log(|z_1|), \ldots, \log(|z_n|)) = Log|z|.$$

Всякой вершине многогранника Ньютона N_P многочлена Лорана $P(z)$ соответствует непустая связная компонента E_m дополнения амебы $\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{A}_V$, при этом в $Log^{-1}E_m$ функция $\frac{1}{P(z)}$ разлагается в ряд Лорана

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x\in m+\Lambda_m} \frac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}, \tag{2.2}$$

где Λ_m — конус, построенный на векторах $m-\alpha,\ \ \alpha \in A$ и $\mathcal{P}_m(x)$ определяется формулой

$$\mathcal{P}_m(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_m} \frac{z^x}{P(x)} \frac{dz}{z}, \tag{2.3}$$

а $\Gamma_m = Log^{-1}u, u \in E_m$.

Двойственный конус C_m к точке m многогранника N_P определяется следующим образом

$$C_m = \{s \in \mathbb{R}^n : \max_{x\in N_P}\langle s, x\rangle = \langle s, m\rangle\}.$$

Отметим, что он является *асимптотическим*, т. е. вместе с каждой точкой $u \in E_m$ этой компоненте принадлежит и сдвиг двойственного конуса $u + C_m \subset E_m$.

Определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geq}$ между точками m и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. А именно, будем писать $m \underset{K}{\geq} \alpha$, если $m + K \subset \alpha + K$.

Кроме того, будем писать $m \underset{K}{\ngeq} \alpha$, если $m \in K \backslash \{K+\alpha\}$, т. е. отношение $m \underset{K}{\geq} \alpha$ не выполняется.

Далее будем рассматривать уравнения вида 2.1, многогранник Ньютона N_P характеристического многочлена которого удовлетворяет условию

$$\exists m \in A : m \underset{K}{\geq} \alpha, \forall \alpha \in N_P \cap K. \tag{2.4}$$

Отметим, что если такая точка существует, то она единственная. *Зафиксируем такое* $m \in N_P \cap K$ и обозначим $K_m = \{x \in K : x \underset{K}{\ngeq} m\}$.

Задача 1. Найти решение $f(x)$ уравнения 2.1, которое на множестве K_m совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in K_m. \tag{2.5}$$

Задачу 2.1, 2.5 назовем задачей Коши для разностного уравнения 2.1. В [2] доказана разрешимость этой задачи и приведена формула, выражающая ее решение $f(x)$ через фундаментальное решение $\mathcal{P}_m(x)$, т. е. решение уравнения 2.1 с правой частью, равной

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

и нулевыми начальными данными $\varphi(x) = 0, x \in K_m$. Нетрудно видеть, что функция $\mathcal{P}_m(x)$, определяемая формулой 2.3, является фундаментальным решением.

Определение 5. *Производящей функцией (производящим рядом) n-мерной последовательности* $f(x) : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ *назовем ряд Лорана вида* $F(z) = \sum\limits_{x \in \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x}$.

Для рядов Лорана справедлив следующий аналог теоремы Абеля о множестве сходимости степенного ряда.

Носителем ряда Лорана $F(z)$ назовем множество $supp\, F = \{x \in \mathbb{Z}^n : f(x) \neq 0\}$. Если носитель ряда Лорана лежит в симплициальном конусе K и ряд сходится в точке z_0, то он сходится и в точках $z_0 + Log^{-1} C_m$ ([7]).

Если обозначить $K_\alpha = \{x \in K : x \underset{K}{\ngeq} \alpha\}$, то очевидно, что для всех $\alpha \in N_P \cap K$ справедливо вложение $K_\alpha \subset K_m$. Рассмотрим ряды вида

$\Phi_\alpha(z) = \sum\limits_{x\in K_\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^x}$, построенные по начальным данным $\varphi(x)$ задачи Коши. Носители этих рядов K_α принадлежат множеству K_m, на котором заданы начальные данные $\varphi(x)$, поэтому будем называть ряды $\Phi_\alpha(z)$ *производящими функциями начальных данных.*

Теорема 1. *Производящая функция $F(z)$ решения $f(x)$ задачи 2.1,2.5 выражается через производящие функции (ряды) $\Phi_\alpha(z)$ начальных данных следующим образом:*

$$F(z) = \sum_{\alpha\in N_P\cap K} c_\alpha z^\alpha \frac{1}{P(z)} \Phi_\alpha(z),$$

где под $\frac{1}{P(z)}$ понимается разложение этой функции в ряд с носителем в аффинном конусе $m+K$, сходящийся в $Log^{-1}E_m$.

Из теоремы 1 сразу следует основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ решение разностного уравнения 2.1, $\varphi_\alpha(x) = f|_{K_\alpha}$ — его сужение на множество K_α и для всех $\alpha \in N_P \cap K$ производящие функции начальных данных $\Phi_\alpha(z) = \sum\limits_{x\in K_\alpha} \frac{\varphi_\alpha(x)}{z^x}$ алгебраичны (рациональны), тогда и производящая функция решения $F(z) = \sum\limits_{x\in K} \frac{f(x)}{z^x}$ алгебраична (рациональна).*

Замечание 1. В теореме 2 естественным образом предполагается, что производящие ряды начальных данных Φ_α имеют непустую область сходимости D_α. И поскольку для всех α двойственный конус C_m является асимптотическим для $LogD_\alpha$, то $\bigcap\limits_\alpha LogD_\alpha \neq \emptyset$, а поэтому и $\bigcap\limits_\alpha D_\alpha \cap Log^{-1}E_m \neq \emptyset$. Таким образом, у рядов $\frac{1}{P(z)}$ и $\Phi_\alpha(x)$ имеется непустая общая область сходимости.

3. Доказательства и примеры

Докажем теорему 1.

Доказательство. Пусть E_m — компонента дополнения амебы, ассоциированная с вершиной m (см. [7]). В области $Log^{-1}E_m \subset \mathbb{C}^n$ функция $1/P(z)$ разлагается в ряд Лорана вида 2.2. Очевидно, что множество Λ_m в разложении 2.2 является подмножеством конуса K.

В случае, когда m — вершина многогранника N_P, коэффициенты $\mathcal{P}_m(x)$ разложения 2.2 можно получить следующим образом: на первом шаге воспользуемся разложением геометрической прогрессии

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum\limits_{\alpha \neq m} c_\alpha z^\alpha} = \frac{1}{c_m z^m (1 - \sum\limits_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m})} =$$

$$= \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{\alpha \neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha - m})^k,$$

и далее после стандартных преобразований получим разложение вида $\frac{1}{P(z)} = \sum\limits_{x \in m + \Lambda_m} \frac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}$.

Умножим производящую функцию $F(z) = \sum\limits_{x \in K} \frac{f(x)}{z^x}$ решения задачи 2.1,2.5 на характеристический многочлен $P(z)$ и преобразуем полученное произведение с учетом того, что $f(x)$ — решение уравнения 2.1, а $\varphi(x)$ — начальные данные задачи Коши:

$$P(z)F(z) = \left(\sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \right) \left(\sum_{x \in K} \frac{f(x)}{z^x} \right) =$$

$$= \left(\sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \right) \left(\sum_{x \underset{K}{\not\geq} \alpha} \frac{f(x)}{z^x} + \sum_{x \underset{K}{\geq} \alpha} \frac{f(x)}{z^x} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha \in N_p \cap K} c_\alpha z^\alpha \sum_{x \underset{K}{\not\geq} \alpha} \frac{\varphi(x)}{z^x} + \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha \sum_{x \underset{K}{\geq} \alpha} \frac{f(x)}{z^{x - \alpha + I}} =$$

$$= \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \Phi_\alpha(z) + \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha \sum_{x \underset{K}{\geq} 0} \frac{f(x + \alpha)}{z^x} =$$

$$= \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \Phi_\alpha(z) + \sum_{x \underset{K}{\geq} 0} \sum_{\alpha \in N_P \cap K} \frac{c_\alpha f(x + \alpha)}{z^x} = \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \Phi_\alpha(z).$$

Таким образом, $P(z)F(z) = \sum\limits_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \Phi_\alpha(z)$, и после умножения на ряд 2.2 получим утверждение теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 в силу того, что ряды $\Phi_\alpha(z)$ и 2.2 имеют непустую общую область сходимости, а линейная комбинация с рациональными коэффициентами $\frac{c_\alpha z^\alpha}{P(z)}$ алгебраических (рациональных) функций $\Phi_\alpha(z)$ является функцией алгебраической (рациональной).

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим задачу об обобщенных путях Дика. Пусть даны набор L шагов

$h^1,\dots,h^s\in\mathbb{Z}^n$ и заостренный конус K. Обозначим $f(x)$ — число решеточных путей, которыми можно попасть из начала координат в точку x, используя только шаги из L и оставаясь в конусе K. В случае, когда $K=\mathbb{Z}^n_+$, данная задача рассматривалась в [5].

Пример 1. Возьмем $n=2$ и $s=2$, шаги $h_1=(1,1)$, $h_2=(1,-1)$ и конус K, порожденный этими векторами $K=\{x\in\mathbb{Z}^2 : x=\lambda_1h_1+\lambda_2h_2,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{Z}^2_+\}$. Очевидно, что конус K — симплициальный. Для искомого числа путей $f(x_1,x_2)$ разностное уравнение имеет вид $f(x+h_1+h_2)=$ $=f(x+h_1)+f(x+h_2), x\in K$ или

$$f(x_1+2,x_2)-f(x_1+1,x_2+1)-f(x_1+1,x_2-1)=0. \tag{3.1}$$

Очевидно, что попасть в точки (k,k), $(k,-k)$ $k=0,1,2,\dots$, лежащие на "границе"конуса K можно только одним способом. Это означает, что нужно найти решение уравнения 3.1, удовлетворяющее начальным данным

$$\begin{aligned} f(k,k) &= 1,\ k=0,1,2,\dots, \\ f(k,-k) &= 1,\ k=0,1,2,\dots. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Найдем производящую функцию $F(z,w)$ решения задачи 3.1,3.2, используя теорему 1. Для этого нужно найти производящие функции начальных данных $\Phi_{(1,1)}$, $\Phi_{(1,-1)}$, $\Phi_{(2,0)}$. Имеем

$$K_{(1,1)}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 : x_1=k, x_2=-k, k=0,1,2,\dots\},$$

$$K_{(1,-1)}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 : x_1=k, x_2=k, k=0,1,2,\dots\},$$

$$K_{(2,0)}=K_{(1,1)}\cup K_{(1,-1)}.$$

Вычислим Φ_α:

$$\Phi_{(1,1)}=\sum_{x\underset{K}{\not\geq}(1,1)}\frac{1}{z^{x_1}w^{x_2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{zw^{-1}}\right)^k=\frac{z}{z-w},$$

$$\Phi_{(1,-1)}=\sum_{x\underset{K}{\not\geq}(1,-1)}\frac{1}{z^{x_1}w^{x_2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{zw}\right)^k=\frac{zw}{zw-1},$$

$$\Phi_{(2,0)}=\sum_{x\underset{K}{\not\geq}(2,0)}\frac{1}{z^{x_1}w^{x_2}}=\frac{zw}{zw-1}+\frac{z}{z-w}-1.$$

По теореме 1 имеем:

$$F(z,w) = \frac{z^2}{z^2 - zw - zw^{-1}} \left(\frac{zw}{zw-1} + \frac{z}{z-w} - 1 \right) -$$

$$- \frac{zw}{z^2 - zw - zw^{-1}} \left(\frac{z}{z-w} \right) - \frac{zw^{-1}}{z^2 - zw - zw^{-1}} \left(\frac{zw}{zw-1} \right) =$$

$$= \frac{zw}{zw - 1 - w^2}.$$

Разлагая полученную функцию в ряд Лорана с носителем в конусе K

$$F(z,w) = \frac{1}{1 - \frac{1}{zw} - \frac{w}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{zw} + \frac{w}{z} \right)^k = \sum_{(x_1,x_2)\in K} \frac{x_1!}{(\frac{x_1-x_2}{2})!(\frac{x_1+x_2}{2})!} \frac{1}{z^{x_1} w^{x_2}},$$

получим искомое число путей

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1!}{(\frac{x_1-x_2}{2})!(\frac{x_1+x_2}{2})!}.$$

Замечание 2. Классическая постановка задачи о путях Дика (см. [5]) состоит в том, чтобы найти число $g(x_1,x_2)$ решеточных путей, выходящих из начала координат, которыми можно попасть в точку $(x_1,x_2) \in \mathbb{Z}^2_+$, используя шаги $(1,1)$, $(1,-1)$ и *не пересекая горизонтальную ось с момента выхода из* $(0,0)$.

По смыслу задачи число путей $g(x_1,x_2)$ неотрицательно. Любопытно, что решение этой задачи можно получить, если в примере 1 разрешить числу путей $f(x_1,x_2)$ принимать отрицательные значения. Поскольку нельзя пересекать ось OX, то на ней должно быть $f(k,0) = 0$, $k = 1,2,\dots$ и если взять на «луче» $(k,-k)$ начальные данные $f(k,-k) = -1$, то на горизонтальной оси получим $f(k,0) = 0, k = 1,2,\dots$.

Нетрудно видеть, что при этом производящие функции начальных данных будут равны $\Phi_{(1,1)} = \frac{z-2w}{z-w}$, $\Phi_{(1,-1)} = \frac{zw}{zw-1}$, $\Phi_{(2,0)} = \frac{zw}{zw-1} + \frac{z-2w}{z-w} - 1$, а производящая функция решения равна

$$F(z,w) = \frac{zw - 2w^2}{zw - 1 - w^2}.$$

Разлагая ее в ряд с носителем в конусе K, получим решение уравнения 3.1

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_2(x_1-1)!}{(\frac{x_1-x_2}{2})!(\frac{x_1+x_2}{2})!},\ (x_1,x_2) \in K.$$

Очевидно, что для всех точек из $K_{(2,0)}$, кроме точки $(0,0)$, выполнены начальные условия. В точке $(0,0)$ имеем $f(0,0) = 0(-1)! = 0 \cdot \Gamma(0) =$

$= \Gamma(1) = 1$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Здесь мы воспользовались формулой $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.

Искомое число путей $g(x_1, x_2)$ в классическом варианте задачи Дика равно сужению f на положительный октант Z^2_+: $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ для $(x_1, x_2) \in K \cap \mathbb{Z}^2_+$.

Список литературы

1. Лейнартас Е. К. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов / Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин // Журн. Сиб. федер. ун-та. – 2009. – Т. 2, вып. 4. – С. 449–455.
2. Некрасова Т. И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Журн. Сиб. федер. ун-та. – 2012. – Т. 5, вып. 4. – С. 576–580.
3. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика / Р. Стенли. – М. : Мир, 1990. – 440 с.
4. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции / Р. Стенли. – М. : Мир, 2009. – 767 с.
5. Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol. 225. – P. 51–75.
6. Moivre A. de De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus / A. de Moivre // Philosophical transactions. 32 (1722/3) 1724, P. 176.
7. Forsberg M. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas / M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh // Advances in Math. – 2000. – Vol. 151. – P. 45–70.

T. I. Nekrasova

Sufficient conditions of algebraicity of generating functions of the solutions of multidimensional difference equations

Abstract. In this paper we study difference equations (recurrence relations) in rational lattice cones. It is found the relation between generating functions of the initial data and generating functions of the solutions of Cauchy problem for multidimensional difference equations. It is proved that condition of algebraicity (rationality) of generating functions of the initial data is sufficient condition of algebraicity (rationality) of generating functions of the solution.

Keywords: multidimensional difference equations; Cauchy problem; generating function.

Некрасова Татьяна Игоревна, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79 тел.: +79232759272
(t.neckrasova@gmail.com)

Nekrasova Tatiana, Siberian Federal University, 79 Svobodny Prospect, Krasnoyarsk, 660041 Ph.D 1 year, Phone: +79232759272
(t.neckrasova@gmail.com)