Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 25—37

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 512.644

Исследование устойчивости простейших квазитеплицевых трехдиагональных систем с неограниченной размерностью *

А. Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Т. А. Батагаева
НИ Иркутский государственный технический университет

Аннотация. Проведено исследование квазитеплицевых трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений в случае, когда их размерность неограниченно возрастает. Доказана теорема об устойчивости рассматриваемых систем, не совпадающая с ранее известными. Приведен пример, который показывает, что полученные достаточные условия устойчивости близки к необходимым.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений; трехдиагональная матрица; квазитеплицева матрица; устойчивость.

1. Введение

Трехдиагональные системы линейных алгебраических уравнений (далее СЛАУ) являются одним из классических объектов линейной алгебры [3, 6] и, казалось бы, достаточно хорошо изучены. Однако многообразие приложений (от построения кубических сплайнов до краевых задач математической физики) приводит к тому, что работы, посвященные их исследованию, появляются по сей день.

Традиционно для решения трехдиагональных СЛАУ используют метод прогонки (алгоритм Томаса) и его разнообразные модификации [1, 5]. Достоинством этих алгоритмов является то, что они максимально используют структуру системы, однако являются рекуррентными и поэтому способны лавинообразно накапливать погрешности. В этой связи

* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проекты № 11–07–00245, 12–07–33045

разработка методов исследования устойчивости трехдиагональных систем весьма актуальна. Для установления однозначной разрешимости и устойчивости трехдиагональных СЛАУ обычно используют условие диагонального преобладания, которое заключается в том, что модуль диагонального элемента не меньше суммы модулей соседних наддиагонального и поддиагонального элементов, при этом хотя бы в одном случае неравенство должно быть строгим. При всем своем очевидном удобстве, это условие имеет существенные недостатки. Во-первых, оно является достаточным, но не является необходимым, и в приложениях встречаются задачи (в том числе, имеющие единственное устойчивое решение), в которых данное условие не выполняется (см., например, [9], раздел "Нелинейная фильтрация"). А во-вторых, как будет показано ниже, при неограниченном возрастании размерности системы оно не всегда обеспечивает устойчивость решения: матрица, для которой такое условие выполнено, может быть плохо обусловленной. В этой связи предпринимались усилия с целью ослабить и уточнить условие диагонального преобладания [5].

В последние годы в отечественной литературе появляется достаточно мало работ, посвященных аналитическому исследованию свойств трехдиагональных СЛАУ (за исключением работ по распараллеливанию метода прогонки и решению прикладных задач), одно из немногих исключений — статья [4]. Зато за это время вышло в свет значительное количество статей и монографий зарубежных авторов по указанной тематике. Некоторые из них представлены в библиографическом списке. Особо хотелось бы отметить подробный обзор работ, выполненных к началу 90-х [16], в котором, в числе прочих, упомянуты и работы отечественных авторов [2]. Особенно популярными в качестве объекта исследования являются Теплицевы [16], k-Теплицевы матрицы [10, 13] и "квазитеплицевы"[12, 18]. Однако обычно в работах делается либо акцент на численные методы решения СЛАУ [11, 17], либо на обращение матрицы [2, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18] и поиск собственных значений [4, 10]. Результатов, улучшающих критерии устойчивости из [5], авторам обнаружить не удалось.

В данной статье исследуются вопросы устойчивости (относительно коэффициентов системы и относительно правых частей) квазитеплицевых трехдиагональных систем при неограниченном возрастании размерности n. Такие системы возникают при построении решений некоторых краевых задач математической физики в классе аналитических функций (т. е. в виде степенных рядов) [7]. Получено новое достаточное условие, обеспечивающее однозначную разрешимость и устойчивость рассмотренных СЛАУ, не совпадающее с условием диагонального преобладания и другими известными критериями [5]. Приведен пример, который показывает, что невыполнение данного условия может привести к потере устойчивости (неограниченному возрастанию числа обусловленности), т. е. полученные достаточные условия близки к необходимым.

2. Постановка задачи

Рассмотрим СЛАУ

$$A_n\vec{u} = \vec{d}. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{d}$=$(d_1, d_2,\dots,d_n)^T$– вектор свободных членов, $\vec{u}$=$(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$– вектор искомых величин, A_n– квазитеплицева трехдиагональная матрица размерности n,

$$A_n = \begin{pmatrix} xb & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & a & b & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где x, a, b, c — действительные числа, при чем $x \neq 0, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Замечание 1. При $x = 1$ имеем случай теплицевой трехдиагональной матрицы.

Будем рассматривать СЛАУ (2.1) при неограниченном возрастании размерности n. Пусть $\Delta_n(x)$– определитель матрицы A_n. Тогда справедливы равенства [6]:

$$\Delta_0(x) = 1,\ \Delta_1(x) = xb,\ \Delta_{n+1}(x) = b\Delta_n(x) - ac\Delta_{n-1}(x),\ n = 1, 2\dots$$

Замечание 2. Не теряя общности рассмотрения, можно считать, что $|a| = |c|$, поскольку в противном случае с помощью замены $x'_i = \epsilon^i x_i$ (или замены $x'_i = \epsilon^{n-i}x_i$) за счет выбора ϵ можно добиться выполнения этого равенства.

Условие $\Delta_n(x) \neq 0$, очевидно, является необходимым и достаточным для однозначной разрешимости (2.1). Далее устанавливаются условия выполнения этого неравенства при всех натуральных n. Для этого заменим рассмотрение последовательности $\Delta_n(x)$, исследованием последовательности $\lambda_n(x)$, в которой каждый следующий член зависит только от одного предыдущего, воспользовавшись следующим утверждением:

Лемма 1. *Пусть $\Theta = ac/b^2$, тогда последовательность $\lambda_n(x)$, определяемая соотношениями*

$$\lambda_0(x) = \frac{xb}{b} = x,\ \lambda_n(x) = 1 - \frac{\Theta}{\lambda_{n-1}(x)},\ n = 1, 2, \dots \tag{2.3}$$

обладает свойством

$$\lambda_n(x) = \frac{\Delta_{n+1}(x)}{b \cdot \Delta_n(x)}.$$

Доказательство леммы 1 проводится индукцией по n. Здесь оно не приводится, поскольку носит технический характер.

Лемма 2. $\lambda_n(x) \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_n(x) \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Доказательство леммы 2 очевидно, ее справедливость прямо следует из леммы 1.

Рекуррентная последовательность $\lambda_n(x)$ будет являться в дальнейшем основным объектом исследования.

Замечание 3. С помощью стандартных методов дискретной математики [8], индукцией по n несложно показать, что справедливы равенства

$$\Delta_n(x) = b^n(\beta_+\lambda_+^n + \beta_-\lambda_-^n), \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

где

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \beta_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{2x-1}{2\sqrt{D}}, \ D = 1 - 4\Theta \neq 0.$$

Однако использовать последовательность λ_n оказалось удобнее, чем непосредственно исследовать свойства определителей, особенно в случае, когда $D < 0$ и значения $\lambda_\pm$ являются комплексно-сопряженными.

3. Основная теорема

Ниже следующие леммы представляют собой свойства последовательности λ_n. В дальнейшем на этих утверждениях будет основываться доказательство основной теоремы.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\eta_n(y)$ *определяется соотношениями*

$$\eta_0(y) = y, \ \eta_n(y) = \frac{\Theta}{1 - \eta_{n-1}(y)}, \ n = 1, 2\ldots, \tag{3.1}$$

тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $\lambda_{n-1}(x)\eta_n(1-x) = \Theta$, $\lambda_n(x) + \eta_n(1-x) = 1$.

Доказательство леммы 3 проводится индукцией по n.

Лемма 4. *Разность между двумя членами последовательности* $\lambda_n(x)$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $k = 1, 2, \ldots$ *определяется по формуле*

$$\lambda_{n+k}(x) - \lambda_n(x) = \frac{-\lambda_n^2(x) + \lambda_n(x) - \Theta}{\lambda_n(x) - \eta_{k-1}(0)} = \frac{-\lambda_n^2(x) + \lambda_n(x) - \Theta}{\lambda_n(x) + \lambda_{k-1}(1) - 1}. \tag{3.2}$$

Доказательство (3.2) проводится индукцией по n и k с использованием леммы 3.

Лемма 5. *Если $\Theta \le 1/4$, то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda_\infty$.

Доказательство. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda_\infty$, то он удовлетворяет «характеристическому» уравнению $\lambda_\infty = 1 - \Theta/\lambda_\infty$, которое, в свою очередь, сводится к квадратному $\lambda_\infty^2 - \lambda_\infty + \Theta = 0$, дискриминант которого равен $D = 1 - 4\Theta$. Можно видеть, что при $\Theta > 1/4$ дискриминант отрицателен, т. е. предел последовательности $\lambda_n(x)$ не существует; при $\Theta = 1/4$ имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda_\infty = 1/2$; наконец, при $\Theta < 1/4$ существуют две стационарные точки λ_- и λ_+. Предел λ_∞ будет равен одному из указанных значений.

□

Лемма 6. *Пусть $\Theta < 1/4$. Тогда, если $\lambda_0(x) \neq \lambda_-$ и $\lambda_n(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(x) = \lambda_+$; если же $\lambda_0(x) = \lambda_-$, то $\lambda_n(x) = \lambda_-$ при всех n.*

Доказательство. Для ответа на вопрос о том, какому именно из двух стационарных значений $\lambda_\pm$ будет равен предел $\lambda_\infty(x)$ (см. доказательство предыдущей леммы) проведем исследование λ_n на устойчивость в этих точках. Пусть $\Phi(z) = 1 - \Theta/z$. Если взять производную от функции $\Phi(z)$ в стационарных точках, то легко убедиться, что $|\Phi'(\lambda_+)| < 1$, $|\Phi'(\lambda_-)| > 1$ (напомним, предполагается, что $\Theta < 1/4$). Отсюда получаем, что стационарная точка λ_+ устойчивая, а λ_- — неустойчивая, и последовательность $\lambda_n(x)$ сходится к λ_- только тогда, когда $\lambda_0(x) = \lambda_1(x) = \ldots = \lambda_-$. Во всех остальных случаях $\lambda_\infty = \lambda_+$.

□

Лемма 7. *Если $x = \eta_k(0)$, где $k = 0, 1, \ldots$, то $\lambda_k(x) = 0$. Если же $x \neq \eta_k(0)$ и $\Theta \le 1/4$, то последовательность $\lambda_n(x)$ отделена от нуля.*

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы 7 следует из (2.3) и (3.1). Справедливость второго — из лемм 5 и 6. □

Лемма 8. *Пусть $\Theta < 1/4$, $x \neq \lambda_-$ и $x \neq \eta_k(0)$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\Delta_i(1)\Delta_j(x)a^k}{\Delta_{i+j+k+1}(x)}\right| < Mq^k, \quad \left|\frac{\Delta_i(x)\Delta_j(1)c^k}{\Delta_{i+j+k+1}(x)}\right| < Mq^k, \quad M > 1, 0 < q < 1, \tag{3.3}$$

Доказательство. Доказательство опирается на следующие соотношения:

$$\Delta_{i+j}(x) = \Delta_i(1)\Delta_j(x) - ac\Delta_{i-1}(1)\Delta_{j-1}(x), \ i, j \ge 1; \tag{3.4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\Theta|}}{\lambda_n(x)}=\frac{\sqrt{|\Theta|}}{1/2+\sqrt{1/4-\Theta}}=q_*<1. \tag{3.5}$$

Справедливость (3.4) доказывается индукцией по $n=i+j$, справедливость (3.5) следует из лемм 5, 6 и условия $\Theta<1/4$.

Как уже отмечалось, не теряя общности рассмотрения, можно считать, что $|a|=|c|$, следовательно, $\sqrt{|\Theta|}=|a/b|$. Из леммы 7 следует, что $\Delta_n(x)\neq 0,\ n=0,1,\ldots$ Отсюда, с учетом (2.3) (лемма 1), имеем, что

$$\left|\frac{\Delta_i(1)\Delta_j a^k}{\Delta_{i+j+k+1}}\right|=\left|\frac{\Delta_i(1)\Delta_j}{\Delta_{i+j}}\right|\cdot\left|\frac{a^k}{b^k\lambda_{i+j}\ldots\lambda_{i+j+k}}\right|=\left|\frac{\Delta_i(1)\Delta_j}{\Delta_{i+j}}\right|\cdot\left|\frac{\sqrt{|\Theta|}^k}{\lambda_{i+j}\ldots\lambda_{i+j+k}}\right|,$$

где $\lambda_i=\lambda_i(x),\Delta_j=\Delta_j(x)$.

Из (3.5) следует, что для любого $q,\ q_*<q<1$ найдется константа $M_1>0$ такая, что

$$\left|\frac{\sqrt{|\Theta|}^k}{\lambda_{i+j}(x)\ldots\lambda_{i+j+k}(x)}\right|<M_1q^k. \tag{3.6}$$

Используя (3.4), после несложных преобразований получаем, что

$$\left|\frac{\Delta_i(1)\Delta_j(x)}{\Delta_{i+j}(x)}\right|\le M_2. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) следует справедливость утверждения леммы 8. Причем, если коэффициенты x,a,b,c испытывают возмущения, при которых условия леммы не нарушаются, оценка (3.3) остается верной. □

Лемма 9. *Если $\Theta>1/4$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется номер n такой, что $|\lambda_n(1)|<\varepsilon$, т. е. либо за конечное число шагов итерационная процедура приходит в нуль, либо последовательность расходится, причем найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(1)$, сходящаяся к нулю.*

Доказательство. Докажем основное утверждение леммы в случае, когда $\lambda_n(1)$ не обращаются в нуль. Для этого используем следующие соотношения:

$$\lambda_n(1)\eta_{n+1}(0)=\Theta,\ n=1,2,\ldots, \tag{3.8}$$

$$\lambda_n^2(1)-\lambda_n(1)+\Theta\ge\Theta-\frac{1}{4}>0, \tag{3.9}$$

(3.8) следует из леммы 3; (3.9) следует из того, что $\Theta>1/4$.

Предположим противное: пусть найдется $\varepsilon>0$ такое, что $|\lambda_n(1)|\ge\varepsilon$. Будем для определенности считать, что $\varepsilon<1$. Тогда из (2.3) и (3.8) имеем, что

$$\varepsilon\le|\lambda_n(1)|\le 1+\frac{\Theta}{\varepsilon},\ \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\Theta}\le|\eta_n(0)|\le\frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.10}$$

Из (3.2) и (3.9) получаем, что справедлива оценка

$$|\lambda_{n+k}(1) - \lambda_n(1)| = \frac{|-\lambda_n^2(1) + \lambda_n(1) - \Theta|}{|\lambda_n(1) - \eta_{k-1}(0)|} \geq \frac{\Theta - \frac{1}{4}}{|\lambda_n(1) - \eta_{k-1}(0)|}. \quad (3.11)$$

Теперь воспользуемся неравенствами (3.10) для того, чтобы оценить в (3.11) знаменатель

$$|\lambda_n(1) - \eta_{k-1}(0)| \leq |\lambda_n(1)| + |\eta_{k-1}(0)| \leq 1 + \frac{\Theta}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon + \Theta + 1}{\varepsilon}.$$

Окончательно устанавливаем оценку для разности двух членов последовательности $\lambda_n(1)$:

$$|\lambda_{n+k}(1) - \lambda_n(1)| \geq \frac{\varepsilon\left(\Theta - \frac{1}{4}\right)}{\varepsilon + \Theta + 1} > 0. \quad (3.12)$$

Оценка (3.12) не зависит от n и k, т. е. все значения ограниченной (см. (3.10)) последовательности $\lambda_n(1)$ являются различными и изолированными. Таким образом, получено противоречие с теоремой Больцано-Вейерштрасса (всякая ограниченная числовая последовательность имеет предельную точку), которое и доказывает справедливость второго утверждения леммы. □

Лемма 10. *Пусть z– предельная точка множества $\Lambda(1)$ значений, которые принимает последовательность $\lambda_n(1)$. Тогда все значения $\lambda_n(z)$, $\eta_n(z)$ также являются предельными точками множества $\Lambda(1)$.*

Доказательство. По условию леммы найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(1)$, которая сходится к z. Но тогда подпоследовательность $\lambda_{n_k+1}(1)$ сходится к $1 - \theta/z = \lambda_1(z)$, подпоследовательность $\lambda_{n_k-1}(1)$ сходится к $\theta/(1-z) = \eta_1(z)$ и так далее — индукцией по l можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{n_k+l}(1) = \lambda_l(z), \ \lim_{n\to\infty} \lambda_{n_k-l}(1) = \eta_l(z).$$

□

Лемма 11. *При $\Theta > 1/4$ множество $\Lambda(1)$ является неограниченным сверху и снизу.*

Доказательство. Из леммы 9 следует неограниченность множества $\Lambda(1)$, по крайней мере, с одной стороны. Пусть (для определенности) множество неограниченно сверху. Тогда найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(1)$ стремящаяся к $+\infty$. Легко убедиться (см. лемму 3), что в этом случае подпоследовательность $\eta_{n_k+2}(1) = \eta_{n_k}(0)$ будет стремиться к $-\infty$. Из (3.2) и леммы 9 следует, что все элементы $\Lambda(1)$ являются предельными точками своего множества, а, значит, из леммы 10 имеем, что все члены последовательности $\eta_n(1)$ являются предельными точками множества $\Lambda(1)$. Таким образом, множество $\Lambda(1)$ неограниченно также и снизу. Второй возможный случай рассматривается аналогично. □

Лемма 12. *Если $\Theta > 1/4$, все предельные точки множества $\Lambda(1)$ являются двусторонними.*

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы воспользуемся равенством

$$\lambda_{n+k}(z) - \lambda_n(z) = \frac{\lambda_n^2(z) - \lambda_n(z) + \Theta}{\eta_{k-1}(0) - \lambda_n(z)} = \frac{\lambda_n^2(z) - \lambda_n(z) + \Theta}{1 - \lambda_n(z) - \lambda_{k-1}(1)}, \qquad (3.13)$$

которое является очевидным следствием (3.2). Из (3.13), лемм 10 и 11 следует справедливость утверждения леммы 12. □

Лемма 13. *Множество $\Lambda(1)$ является всюду плотным в $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Рассмотрим замыкание $\overline{\Lambda(1)}$ множества $\Lambda(1)$. Все элементы $\overline{\Lambda(1)}$ являются для него двусторонними предельными точкам (лемма 12), что возможно только в том случае, если $\overline{\Lambda(1)} = \mathbb{R}$. □

Лемма 14. *Пусть $\Theta > 1/4$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $|\lambda_n(x)| < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$, т. е. либо за конечное число шагов получаем нулевое значение, либо найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(x)$, которая сходится к нулю.*

Доказательство. При $x = 1$ лемма уже доказана. Пусть $x \neq 0$. Если найдется такое k, при котором $\lambda_k(x) = 0$, то лемма, очевидно, справедлива. Пусть теперь $\lambda_n(x) \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливость утверждения леммы 14 следует из лемм 4 и 13. В самом деле, из (3.2) имеем, что найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(x)$, сходящаяся к единице, что возможно в том и только в том случае, если подпоследовательность $\lambda_{n_k-2}(x)$ сходится к нулю. □

Теорема 1. *СЛАУ обладает следующими свойствами:*

1) *Если $\Theta < 1/4$ и $x \neq \eta_-$, $x \neq \eta_k(0)$, $k = 1, 2, \dots$, то СЛАУ (2.1) коэффициентно устойчива и устойчива по правой части.*

2) *Если $\Theta \geq 1/4$, то при неограниченном возрастании n СЛАУ (2.1) будет неустойчивой (неограниченно растет число обусловленности).*

Доказательство. Решение СЛАУ (2.1) определяется как

$$
\begin{gathered}
u_1 = \tfrac{1}{\Delta_n(x)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{n-i}(1)(-c)^{i-1} d_i, \\
u_k = \tfrac{1}{\Delta_n(x)} [\Delta_{n-k}(1) \sum_{i=1}^{k-1} \Delta_{i-1}(x)\,(-a)^{k-i}\, d_i + \Delta_{n-k}(1)\Delta_{k-1}(x) d_k + \\
+\Delta_{k-1}(x) \sum_{i=k+1}^{n} \Delta_{n-i}(1)\,(-c)^{i-k}\, d_i],\ k = 2, \dots n-1 \\
u_n = \tfrac{1}{\Delta_n(x)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{i-1}(x)(-a)^{n-i} d_i,
\end{gathered} \tag{3.14}
$$

где $\Delta_n(x)$ — определитель матрицы (2.2) размерностью n, в которой первый диагональный элемент равен bx. Условие леммы $x \neq \eta_k(0),\ k = 1, 2, \dots$ обеспечивает отличие от нуля $\Delta_{k+1}(x),\ k = 1, 2, \dots, n$.

Обратная матрица A_n^{-1} имеет вид

$$
A_n^{-1} = \frac{1}{\Delta_n} C_n^T,
$$

где C_n– матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A_n:

$$
C_n = \begin{pmatrix}
\Delta_{n-1}(1)(-c)^0 & \dots & \Delta_{n-k}(1)(-a)^{k-1} & \dots & \Delta_0(1)(-a)^{n-1} \\
\Delta_{n-2}(1)(-c) & \dots & \Delta_{n-k}(1)\Delta_1(x)(-a)^{k-2} & \dots & \Delta_1(x)(-a)^{n-2} \\
\Delta_{n-3}(1)(-c)^2 & \dots & \Delta_{n-k}(1)\Delta_2(x)(-a)^{k-3} & \dots & \Delta_2(x)(-a)^{n-3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Delta_{n-k}(1)(-c)^{k-1} & \dots & \Delta_{n-k}(1)\Delta_{k-1}(x) & \dots & \Delta_{k-1}(x)(-a)^{n-k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Delta_0(x)(-c)^{n-1} & \dots & \Delta_{k-1}(x)\Delta_0(-c)^{n-k} & \dots & \Delta_{n-1}(x)(-a)^0
\end{pmatrix}. \tag{3.15}
$$

Вывод формул (3.14) и (3.15) выполнен с использованием стандартных методов теории матриц [3]; промежуточные выкладки довольно громоздки и здесь не приводятся.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $\Theta < 1/4$. Воспользуемся леммой 8. Из (3.14) и (3.3) имеем, что справедлива оценка

$$
||u|| < 2M(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})||d|| < \frac{2M}{1-q}||d||, \tag{3.16}
$$

где $||d|| = \max|d_i|, ||u|| = \max|u_i|,\ i = 1, \dots, n$. Неравенство (3.16) обеспечивает устойчивость исследуемой СЛАУ в рассматриваемом случае.

Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть сначала $\Theta > 1/4$. В качестве характеристики устойчивости (и неустойчивости) будем рассматривать число обусловленности $\mu = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$, где $\|A\|$ и $\left\|A^{-1}\right\|$ — первые нормы матриц. Первая норма представляет из себя максимальное из чисел, полученных при сложении всех элементов каждого столбца, взятых по модулю.

Легко убедиться, что $\|A\| = \max\{|a| + |bx|; |a| + |b| + |c|; |b| + |c|\} > 0$ и от n не зависит, а норма матрицы A^{-1} удовлетворяет неравенству

$$\|A^{-1}\| > \frac{|\Delta_{n-1}(x)|}{|\Delta_n(x)|} = \frac{1}{|b\lambda_{n-1}(x)|}. \tag{3.17}$$

Поскольку в рассматриваемом случае либо при некотором конечном n $\lambda_n(x)$ обращается в нуль, либо найдется подпоследовательность $\lambda_{n_k}(x)$, которая сходится к нулю (лемма 8), то оценка (3.17) указывает на потерю устойчивости СЛАУ (2.1) при возрастании n.

Случай $\Theta = 1/4$ требует отдельного рассмотрения. В данном случае $a = |c| = |b|/2$ (см. замечание 2) и норма матрицы A вычисляется, как $||A|| = \max\{|a|+|b|; |a|+|b|+|c|; |b|+|c|\} = |2b|$. Пусть для определенности $a > 0, b > 0, c > 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Будем предполагать, что $\lambda_n \neq 0$. Индукцией по n устанавливается, что с ростом размерности системы число обусловленности растет пропорционально квадрату n, что, в свою очередь, указывает на потерю устойчивости системы при больших n (даже в том случае, если при всех n матрицы A_n невырождены).

Теорема доказана. □

Замечание 4. При $|a| = |c|$, $\Theta = 1/4$, $x = 1$ условие диагонального преобладания выполнено, но, как показано выше, при неограниченном возрастании размерности СЛАУ будут плохо обусловленными.

Пример 1. Пусть $b = 1$, $a = c = \sqrt{\Theta}$, $0 < \Theta < 1/4$, $x = \lambda_-$. Тогда число обусловленности системы (2.1) при возрастании n стремится к бесконечности.

Доказательство. Можно убедиться, что в данном случае справедливо равенство $\det(A_n) = \Delta_n(\lambda_-) = (\lambda_-)^n$. С другой стороны, из (3.15) следует, что $||A_n^{-1}|| > |a|^{n-1}/|\Delta_n(x)|$. Таким образом, имеем, что

$$\mu_n > \left(\frac{\sqrt{\Theta}}{1/2 - \sqrt{1/4 - \Theta}}\right)^n = K^n.$$

Легко видеть, что $K > 1$, т. е. μ_n стремится к бесконечности со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем больше единицы. □

Замечание 5. Пример показывает, что невыполнение дополнительных условий, наложенных на x в условии теоремы, приводит к тому, что СЛАУ становятся плохо обусловленными, т. е. условия теоремы близки к необходимым.

4. Графическая интерпретация условий теоремы

Для того, чтобы доказанной теоремой было удобнее пользоваться, сформулируем ее условия в терминах множеств на плоскости переменных x, Θ. На рис. 1 изображены области устойчивости и неустойчивости системы (2.1)

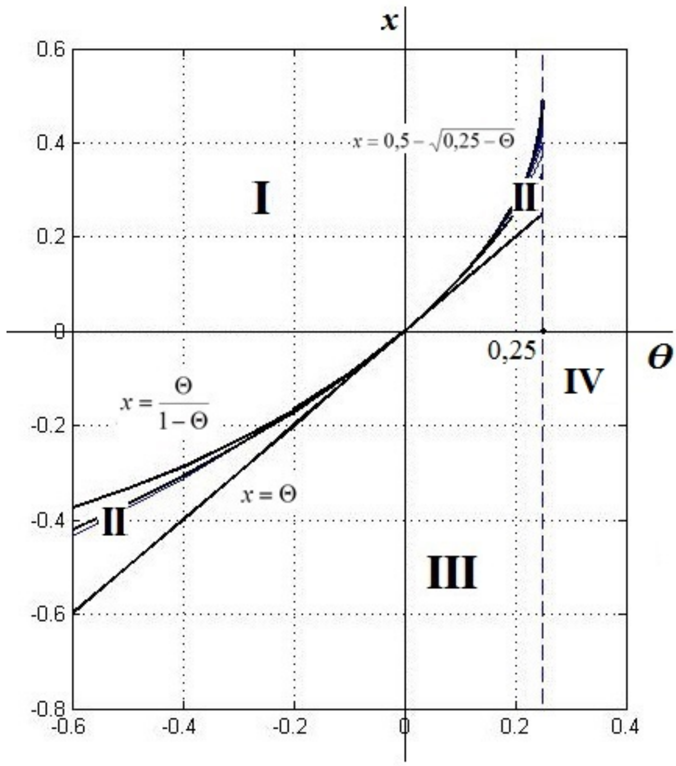

Рис. 1. Разделение плоскости $O\Theta x$ на области устойчивости

Прямая $\Theta = 1/4$ делит $O\Theta x$ на две полуплоскости. Левая полуплоскость, в свою очередь, делится на три части линиями l_1 и l_2, которые имеют уравнения

$$(l_1)\ \begin{cases} x = \Theta/(1-\Theta),\ \Theta < 0, \\ x = 1/2 - \sqrt{1/4 - \Theta},\ 0 \le \Theta < 1/4 \end{cases} ; \quad (l_2)\ x = \Theta.$$

В области I, которая лежит выше кривой l_1 и левее прямой $\Theta = 1/4$ выполнены условия первой части теоремы 1 (кроме прямой $x = 0$). Таким же свойством обладает область III, ограниченная прямыми $x = \Theta$ и $\Theta = 1/4$. В области II, лежащей между кривой l_1 и прямыми $x = \Theta$ и $\Theta = 1/4$ (включая границы) имеется набор линий, которые которые задаются уравнениями $x_1 = \Theta, x_2 = \Theta/(1-\Theta), \dots, x_n = \eta_n(0), \dots$ При попадании на кривую с номером n определитель матрицы A_n, первый диагональный элемент которой равен bx, обращается в нуль. Если же точка, лежащая в области II, не попадает ни на одну из указанных кривых, то в ней также выполнены условия первой части теоремы 1. При этом, как следует из (2.4), для любой точки за конечное количество шагов условие попадания (непопадания) проверяется, причем можно без труда получить верхнюю оценку этого количества.

Наконец, в области IV, которая определяется неравенством $\Theta \geq 1/4$ (правая полуплоскость), выполнены условия второй части теоремы 1.

Отметим, что условия "строгого"диагонального преобладания в рассматриваемом случае имеют вид: $|\Theta| < 1/4$ при $|x| \geq 1$; $|\Theta| < x^2/4$ при $|x| \leq 1$. Можно легко убедиться в том, что данное множество целиком лежит в объединении областей I и III.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином : Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.
2. Бухбергер Б. Методы обращения трехдиагональных матриц / Б. Бухбергер, Г. А. Емельяненко // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – Т. 13, № 3. – С. 546–554.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.
4. Годунов С. К. О специальном базисе из приближенных собственных векторов с локализованными носителями для изолированного узкого кластера собственных значений симметричной трехдиагональной матрицы / С. К. Годунов, А. Н. Малышев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, № 7. – С. 1156–1166.
5. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенький. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
6. Ильин В. П. Трехдиагональные матрицы и их приложения / В. П. Ильин, Ю. И. Кузнецов. – М. : Наука, 1985. – 208 с.
7. Казаков А. Л. Аналитическое и численное исследование обобщенных задач Коши, возникающих в газовой динамике / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, № 3. – С. 30–40.
8. Ландо К. С. Лекции о производящих функциях / С. К. Ландо. – М. : МЦНМО, 2002. – 144 с.
9. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика / А. Ф. Сидоров. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.
10. Alvarez-Nodarse R. Spectral properties of certain tridiagonal matrices / R. Alvarez-Nodarse, J. Petronilho, N. R. Quintero // Linear Algebra and its Applications. – 2012. – Vol. 436. – P. 682-698.
11. Bunch J. R. A pivoting strategy for symmetric tridiagonal matrices / J. R. Bunch, R. F. Marcia // Numerical Linear Algebra with Applications. – 2006. – Vol. 13. – P. 865–867.

12. El-Shehawey M. A. Analytical inversion of general periodic tridiagonal matrices / M. A. El-Shehawey, Gh. A. El-Shreef, A. Sh. Al-Henawy // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 345. – P. 123–134.
13. Da Fonseca C. M. Explicit inverse of a tridiagonal k-Toeplitz matrix / C. M. Da Fonseca, J. Petronilho // Numerische Mathematik. – 2005. – Vol. 100. – P. 457–482.
14. Da Fonseca C. M. Explicit inverses of some tridiagonal matrices / C. M. Da Fonseca, J. Petronilho // Linear Algebra and its Applications. – 2001. – Vol. 325. – P. 7–21.
15. Huang Y. Analytical inversion of general tridiagonal matrices / Y. Huang, W. F. McColl // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 1997. – P. 7919–7933.
16. Meurant G. A. Review on inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices / G. A. Meurant // The SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1992. – Vol. 13, N 1. – P. 707–728.
17. Vandebril R. Matrix Computations and Semiseparable Matrices / R. Vandebril, M. V. Barel, N. Mastronardi. – 2008. – Vol. 2. – 498 p.
18. Yueh W. Ch. Explicit Inverses Of Several Tridiagonal Matrices / W. Ch. Yueh // Applied Mathematics E-Notes. – 2006. – Vol. 6. – P. 74–83.

A. L. Kazakov, T. A. Batagaeva

Investigation of the stability of simple quasi-Toeplitz tridiagonal systems with unlimited dimension

Abstract. Investigation of quasi-Toeplitz tridiagonal systems of linear algebraic equations in the case where the dimension of unlimited increases. Proved theorem on the stability of the systems, which does not coincide with previously known conditions. Is an example that shows that the obtained sufficient conditions for stability are close to being necessary.

Keywords: systems of linear algebraic equations; tridiagonal matrix; quasi-Toeplitz matrix; stability.

Казаков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, доцент, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453033 (kazakov@icc.ru)

Батагаева Татьяна Антоновна, аспирант, Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, тел.: 8(9086)679109 (tanya.cyberbat@gmail.com)

Kazakov Alexandr, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov St., Irkutsk, 664033, Chief researcher, Phone: (3952) 453033 (kazakov@icc.ru)

Batagaeva Tatiana, National Research Irkutsk State Technical University, 83, Lermontov St., Irkutsk, 664074 graduate student, Phone: 8(9086)679109 (tanya.cyberbat@gmail.com)