Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 3. С. 60—71

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.7

Критерий бесконечной надструктуры некоторых классов монотонных k-значных функций *

В. Б. Ларионов
ООО „Атес Медика Софт“

Аннотация. В работе автором продолжается исследование строения надструктуры замкнутых классов монотонных функций. Разработан критерий наличия бесконечной надструктуры для некоторого семейства классов монотонных функций.

Ключевые слова: многозначные логики; решетка замкнутых классов; монотонные функции.

1. Введение

Данная работа посвящена известной задаче описания решетки замкнутых классов функций многозначной логики.

Обозначим через E_k множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение 1. *Функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется функцией k-значной логики ($k \geqslant 2$), если она определена на E_k^n и все ее значения принадлежат E_k.*

Рассматриваются замкнутые относительно операции суперпозиции классы функций. Решетка указанных классов в случае булевых функций (т.е. при $k = 2$) была целиком описана Постом в [9]. Однако в работе [8] было показано, что множество замкнутых классов функций k-значной логики для любого $k \geqslant 3$ континуально. Данный факт делает практически невозможным описание решетки при $k \geqslant 3$, поэтому впоследствии изучались лишь ее фрагменты. К указанному направлению и принадлежит данная работа.

Пусть на E_k задано некоторое отношение частичного порядка r. Возьмем два произвольных набора $\tilde{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ из

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00684-а.

E_k^n. Будем говорить, что $\tilde{a}$ не превосходит $\tilde{b}$ относительно частичного порядка r и записывать $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, если для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство $a_i \leqslant_r b_i$.

Определение 2. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонной относительно частичного порядка r, если для любых двух наборов $\tilde{a}, \tilde{b} \in E_k^n$ таких, что $\tilde{a} \leqslant_r \tilde{b}$, выполнено $f(\tilde{a}) \leqslant_r f(\tilde{b})$. Множество всех функций из P_k, монотонных относительно r, называется классом монотонных функций M_r.*

Для наглядности везде далее будем задавать частичный порядок r частично упорядоченным множеством (ЧУМ) H из элементов E_k и соответствующий класс обозначать M_H.

Одним из семейств предполных классов функций k-значной логики при $k \geqslant 3$ (везде далее рассматриваются только такие k) является некоторое подмножество всех классов монотонных функций [10]. Класс M_H является предполным тогда и только тогда, когда ЧУМ H обладает в точности одним максимальным и одним минимальным элементом [4]. Возникает вопрос, какое положение в решетке занимают классы монотонных функций, не являющиеся предполными.

Принципиальная возможность существования замкнутых классов монотонных функций многозначной логики с бесконечной *надструктурой* (то есть множеством содержащих их классов) была доказана автором в статье [3]. Как было показано в работе того же автора [2], минимальной логикой с такими классами функций является четырехзначная логика P_4. В [1] был получен критерий наличия бесконечной надструктуры классов монотонных функций, сохраняющих ЧУМ с одним минимальным и двумя максимальными, двумя минимальными и одним максимальным, двумя минимальными и двумя максимальными элементами. В данной работе развивается техника, разработанная ранее автором, с целью получить критерий наличия бесконечной надструктуры классов монотонных функций, сохраняющих ЧУМ с одним минимальным и тремя максимальными элементами.

2. Основные понятия

В данной работе используется «предикатный» подход к изучению замкнутых классов функций.

Определение 3. *Пусть $p(x_1, \ldots, x_m)$ – некоторый предикат, определенный на E_k^m, $f(y_1, \ldots, y_n)$ – функция из P_k. Говорят, что функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ сохраняет предикат $p(x_1, \ldots, x_m)$, если для любых n наборов $\tilde{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, удовлетворяющих предикату p, набор $\Big(f(a_{11}, \ldots, a_{n1}), \ldots, f(a_{1m}, \ldots, a_{nm})\Big)$ также удовлетворя-*

ет предикату p. По определению будем считать, что тождественно ложный предикат сохраняет любая функция.

На множестве предикатов вводятся следующие операции: отождествление переменных, конъюнкция и добавление квантора существования по какой-либо переменной (проекция). Для произвольного множества предикатов P через $[P]$ будем обозначать его замыкание относительно указанных операций. Подробное определение этих операций можно найти в [6] и [5].

Будем обозначать через $\mathrm{Pol}(p)$ множество всех функций, сохраняющих предикат p. Класс M_H является замкнутым классом функций, сохраняющих предикат $R(x, y) = \mathrm{TRUE} \iff x \leqslant_r y$ [7]. Везде далее в выражении „монотонный класс задается предикатом R“ подразумевается именно описанный предикат $R(x, y)$.

Лемма 1 (**[6]**). *Если* $p_1 \in [p_2]$, *то* $\mathrm{Pol}(p_2) \subseteq \mathrm{Pol}(p_1)$.

Пусть предикат p задается формулой F над системой $\{R\}$, где R — предикат, задающий класс монотонных функций. Везде далее рассматриваются только формулы с вынесенными вперед кванторами существования. Сопоставим F ориентированный граф G_F по следующему правилу: между множеством вершин G_F и множеством переменных F (учитываем и свободные, и связанные) существует взаимно однозначное соответствие. Вершину, соответствующую переменной x, пометим символом "x если переменная x свободная, и "$\exists x$ если связанная. Данную вершину обозначим v_x. В графе G_F есть ориентированное ребро (v_x, v_y) тогда и только тогда, когда в формуле F содержится запись $R(y, x)$.

Далее нам потребуются некоторые свойства предикатов, доказательства которых содержатся в [1]. Обозначим через $\overline{F}$ множество формул над $\{R\}$, графы которых не имеют ориентированных циклов. Отметим, что для таких формул мы можем считать граф G_F частично упорядоченным множеством. В этом случае будем использовать обозначение L_F.

Лемма 2 (**[1]**). *Пусть R — предикат, задающий класс монотонных функций,* $p_1, p_2 \in [R]$, $\mathrm{Pol}(p_1) \subseteq \mathrm{Pol}(p_2)$, *предикат p_2 реализуется над $\{R\}$ формулой из $\overline{F}$. Тогда* $p_2 \in [p_1]$.

Лемма 3 (**[1]**). *Пусть H — ЧУМ с единственным минимальным элементом, R — соответствующий ему предикат, задающий класс монотонных функций M_H. Пусть p реализуется формулой F над системой $\{R\}$. Тогда:*

1) *Существует предикат $p' \in [R]$, задаваемый формулой $F' \in \overline{F}$, такой что* $\mathrm{Pol}(p') = \mathrm{Pol}(p)$.

2) Можно так преобразовать формулу F, чтобы в ЧУМ L_F соответствующие свободным переменным вершины и только они являлись минимумами, и при этом предикат p не изменится. Если F принадлежит семейству $\overline{F}$, то указанное преобразование можно провести так, чтобы преобразованная формула осталась в семействе $\overline{F}$.

Определение 4. *Предикат $p(x_1, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 2$, назовем невырожденным, если существует набор $\tilde{a} \in E_k^n$ такой, что $p(\tilde{a}) = \mathrm{FALSE}$, но для любого номера $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует элемент $b_i \in E_k$ такой, что $p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \mathrm{TRUE}$. Одноместный предикат невырожден тогда и только тогда, когда он отличен от тождественно истинного и ложного предикатов. В противном случае назовем предикат вырожденным.*

Лемма 4 ([1]). *Если число различных замкнутых классов $\mathrm{Pol}(p)$, где $p \in [R]$ — невырожденный предикат, конечно, то надструктура класса $M_H = \mathrm{Pol}(R)$ конечна.*

Лемма 5 ([1]). *Пусть ЧУМ H имеет единственный минимальный элемент, R — предикат, задающий класс монотонных функций M_H. Пусть $p_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, p_l(x_1, \ldots, x_{n_l}) \in [R]$ — невырожденные предикаты местностей соответственно $n_1, \ldots, n_l$, задаваемые формулами из $\overline{F}$, $n = \max(n_1, \ldots, n_l)$, $\mathrm{Pol}(p_i) \neq \mathrm{Pol}(R)$. Тогда любой невырожденный предикат p' из множества $[p_1, \ldots, p_l]$ имеет местность $r \leqslant n$.*

3. Необходимые и достаточные условия наличия бесконечной надструктуры

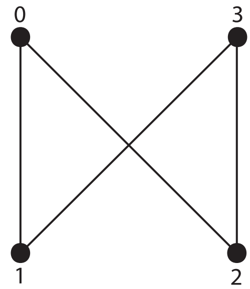
Приведем некоторые результаты из работы [1], необходимые для построения искомого критерия.

Через $L_{i,j}$ будем обозначать множество ЧУМ, имеющих i максимальных элементов и j минимальных.

Рассмотрим произвольное ЧУМ H из элементов множества E_k, принадлежащее множеству $L_{s,1}$. Пусть $T_1, \ldots, T_s$ — все максимальные элементы множества H.

Предположим, что W_i — некоторое непустое подмножество множества $W = \{1, \ldots, s\}$. Обозначим через H_{W_i} ЧУМ, состоящее из элементов $d \in H$ таких, что $d \leqslant T_j$ для любого $j \in W_i$ и $d \nleqslant T_j$, если $j \notin W_i$. Для любых двух элементов $b_1, b_2 \in H_{W_i}$ выполнено $b_1 \leqslant b_2$ тогда и только тогда, когда $b_1 \leqslant b_2$ в H.

Определение 5 ([1]). *Множество $H \in L_{s,1}$ назовем простым, если выполнены следующие условия:*



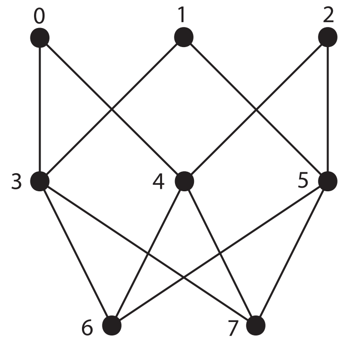


Рис. 1. Множества $\overline{H}_1$ (слева) и $\overline{H}_2$ (справа).

1) *Для любого непустого подмножества W_i множества W множество H_{W_i} непусто.*

2) *Каждое множество H_{W_i} имеет единственный максимальный элемент T_{W_i}.*

3) *Если $W_i \subseteq W_j$, то $T_{W_i} \geqslant T_{W_j}$ для любых подмножеств W_i, W_j множества W.*

Теорема 1 (**[1]**)**.** *Любой класс монотонных функций, сохраняющих простое ЧУМ, имеет конечную надструктуру.*

Обозначим через $\overline{H}_1$ и $\overline{H}_2$ ЧУМ, изображенные на рисунке 1.

Определение 6 (**[1]**)**.** *Пусть L_1 — множество, состоящее из всех ЧУМ H, которые содержат подмножество $\overline{H}_1$. Причем в H не появляются пути из 0 в 3 по вершинам, являющимся максимумами 1 и 2. Уточним это понятие: не существует последовательности элементов $v_1, \ldots, v_m$ в L_1 такой, что $v_1 = 0$, $v_m = 3$, v_i сравнимо с v_{i+1} $(i \in \{1, \ldots, m-1\})$ (то есть либо $v_i \leqslant v_{i+1}$, либо $v_{i+1} \leqslant v_i$), все v_i – максимумы 1 и 2.*

Теорема 2 (**[1]**)**.** *Любой класс монотонных функций M_H, сохраняющих ЧУМ $H \in L_1$, имеет бесконечную надструктуру.*

Определение 7. *Для произвольного $k \geqslant 3$ обозначим через Q_k множество ЧУМ $H \in L_{3,1}$, составленных из элементов E_k, таких, что H содержит подмножество $\overline{H}_2$, причем во множестве H не появляется элемента a такого, что a меньше трех элементов $0, 1, 2$ и больше элементов $6, 7$; элементы $0, 1, 2$ являются максимальными в H, а элементы $3, 4, 5$ — наибольшие из попарных минимумов максимальных элементов множества H.*

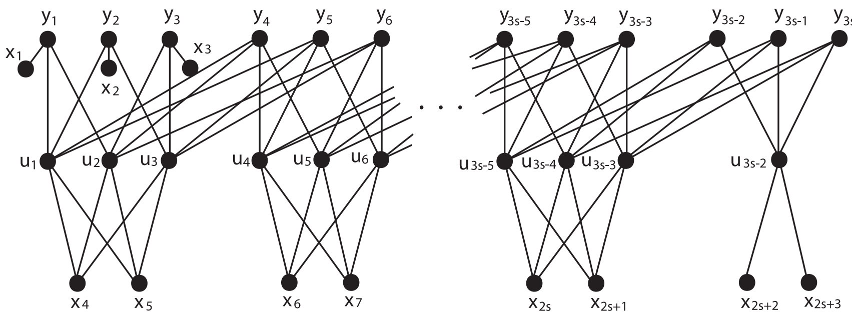


Рис. 2. Предикат p_l.

Обозначим через T_{min} единственный минимальный элемент ЧУМ H. Пусть $H \in Q_k$. Везде далее через $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ мы будем обозначать элементы множества H, которые при вложении образуют множество $\overline{H}_2$.

Теорема 3. *Произвольный класс монотонных функций M_H, где $H \in Q_k$ имеет бесконечную надструктуру.*

Доказательство. Рассмотрим предикаты $p_l \in [R]$, $l > 1$, граф формул (будем их обозначать F_l) которых изображен на рисунке 2. Вершины графа для простоты помечены символами переменных формулы F_l, кванторы опущены. Переменные $x_1, \dots, x_{2l+3}$ (находящиеся на нижнем слое рисунка) являются свободными, остальные - связанными. Подразумевается, что ориентация всех ребер — сверху вниз.

Лемма 6. *Все предикаты p_l являются невырожденными.*

Доказательство. Рассмотрим набор

$$\tilde{a}_l = [0, 1, 2, 6, 7, 6, 7, \dots, 6, 7] \in E_k^{2l+3}.$$

Покажем, что $p_l(\tilde{a}_l) = FALSE$.

Поскольку $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ на наборе $\tilde{a}_l$, то переменные y_1, y_2, y_3 должны принять значения соответственно $0, 1, 2$. Значение переменной u_1 должно быть больше $6, 7$ (поскольку $x_4 = 6$, $x_5 = 7$) и меньше значений переменных y_1, y_2, то есть $0, 1$. Получаем, что значение переменной y_4 не может быть меньше или равно 2, иначе u_1 должна принять значение большее $6, 7$ и меньшее $0, 1, 2$, что противоречит определению множества Q_k. Рассматривая аналогично переменную u_2, получим, что значение y_4 не может быть меньше или равно 1, откуда получаем, что значение y_4 принадлежит множеству $H_{\{0\}}$. Аналогично получаем, что значения переменных y_5, y_6 принадлежат соответственно множеству $H_{\{1\}}$ и $H_{\{2\}}$.

Рассуждая аналогично для следующих троек в формуле F_l, придем к выводу, что значения переменных y_{3s-2}, y_{3s-1} и y_{3s} принадлежат соответственно множествам $H_{\{0\}}$, $H_{\{1\}}$ и $H_{\{2\}}$. Таким образом получаем, что переменной u_{3s-2} нужно присвоить значение большее $6, 7$ и меньшее $0, 1, 2$, которого не существует. Откуда имеем $p_l(\tilde{a}_l) = FALSE$.

Непосредственно проверяется, что для любого $i \in \{1, \ldots, 2l+3\}$ мы можем заменить i-ю компоненту набора $\tilde{a}_l$ так, чтобы $p_l(\tilde{a}_l) = TRUE$. Например, любую компоненту можно менять на минимальный элемент T_{min}. При этом мы сможем корректно присвоить значения из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, T_{min}\}$ всем переменным формулы F_l.

По определению получаем, что p_l — невырожденный предикат. □

Обозначим $A_l = \mathrm{Pol}(p_l)$ и рассмотрим два произвольных класса A_{l_1} и A_{l_2}, где $l_1 \neq l_2$. Поскольку для любого $l > 1$ формулы $F_l \in \overline{F}$, а предикаты $p_l \in [R]$, то по лемме 2 получаем, что в случае равенства $A_{l_1} = A_{l_2}$ должны выполняться соотношения $p_{l_1} \in [p_{l_2}]$ и $p_{l_2} \in [p_{l_1}]$. Но по лемме 5 нельзя реализовать формулой невырожденный предикат большей местности из невырожденного предиката меньшей местности. Получаем, что все классы A_l различны и образуют бесконечную надструктуру класса монотонных функций M_H.

Теорема доказана. □

4. Критерий наличия бесконечной надструктуры

Сведем теперь вместе для рассматриваемых в работе классов монотонных функций описанные в предыдущем разделе необходимые и достаточные условия.

Теорема 4. *Пусть $H \in L_{3,1}$. Надструктура класса M_H бесконечна тогда и только тогда, когда для множества H справедливы условия теоремы 2 или 3.*

Доказательство. Достаточность для бесконечности надструктуры класса M_H условий показана в теоремах 2 и 3. Докажем далее необходимость.

Пусть ЧУМ H не обладает указанными в формулировке свойствами. Снова будем использовать введенные в предыдущем разделе обозначения T_i, H_{W_i} (у нас $W = \{1, 2, 3\}$).

Лемма 7. *Пусть ЧУМ $H \in L_{3,1}$ не удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда если некоторое множество $H_{\{i,j\}}$ непусто, то оно имеет единственный максимальный элемент.*

Доказательство. Предположим, что множество $H_{\{i,j\}}$ непусто и имеет более одного максимального элемента. Пусть c_1, c_2 — два различных максимальных элемента $H_{\{i,j\}}$. Рассмотрим четверку T_i, T_j, c_1, c_2. Поскольку $c_1, c_2 \in H_{\{1,2\}}$, то $c_1, c_2 \leqslant T_i$ и $c_1, c_2 \leqslant T_j$. По определению элементы c_1, c_2 несравнимы, элементы T_i, T_j также несравнимы. Предположим, что в ЧУМ H найдется элемент a такой, что $a \leqslant T_i, T_j$ и $a \geqslant c_1, c_2$. Но тогда $a \in H_{\{i,j\}}$, и получаем противоречие с тем, что c_1, c_2 — максимальные элементы множества $H_{\{i,j\}}$. Итак, мы получаем, что рассматриваемая четверка образует множество $\overline{H}_1$ (с точностью до пометок), и $H \in L_1$, то есть справедливы условия теоремы 2. Полученное противоречие показывает, что множество $H_{\{i,j\}}$ имеет единственный максимальный элемент. □

Отметим, что множество $H_{\{1,2,3\}}$ непусто, поскольку оно по крайней мере содержит единственный минимальный элемент ЧУМ H.

Лемма 8. *Пусть ЧУМ $H \in L_{3,1}$ не удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда все элементы множества $H_{\{1,2,3\}}$ меньше элементов $T_{\{i,j\}}$ для всех непустых $H_{\{i,j\}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $b \in H_{\{1,2,3\}}$ и предположим, что $b \nleqslant T_{\{i,j\}}$ для $H_{\{i,j\}} \neq \emptyset$. Тогда четверка элементов $T_{\{i\}}, T_{\{j\}}, T_{\{i,j\}}, b$ удовлетворяет теореме 2. Получаем, что все элементы множества $H_{\{1,2,3\}}$ меньше элемента $T_{\{i,j\}}$. □

Рассмотрим вначале случай, когда все $H_{\{i,j\}}$ непусты. Пусть T_4, T_5 — два максимальных элемента множества $H_{\{1,2,3\}}$. Но тогда подмножество из элементов $T_1, T_2, T_3, T_{\{1,2\}}, T_{\{2,3\}}, T_{\{1,3\}}, T_4, T_5$ образует во множестве H подмножество $\overline{H}_2$, и справедлива теорема 3. Данное противоречие показывает, что множество $H_{\{1,2,3\}}$ обладает единственным максимальным элементом $T_{\{1,2,3\}}$. По лемме 8 элемент $T_{\{1,2,3\}}$ меньше всех элементов $T_{\{i,j\}}$. По определению получаем, что ЧУМ H — простое и надструктура класса M_H конечна.

Пусть теперь некоторое одно множество $H_{\{i,j\}}$ пусто. Не ограничивая общности, положим $H_{\{1,3\}} = \emptyset$, $H_{\{1,2\}}$ и $H_{\{2,3\}}$ непусты.

Пусть $p \in [R_H]$ — проивольный невырожденный предикат местности $n > 4$ такй, что $\mathrm{Pol}(p) \neq M_H, P_k$. Пусть F — формула, реализующая предикат p над $\{R\}$ из леммы 3, G_F и L_F — граф и ЧУМ формулы F соответственно. Через $v_y \in L_F$ обозначим элемент, соответствующий переменной y формулы F. Обозначим через $\tilde{a}$ набор для предиката p из определения невырожденного предиката.

Далее мы по индукции присвоим всем переменным формулы F на наборе $\tilde{a}$ значения так, чтобы для любых двух переменных z_1, z_2, принявших соответственно значения b_1 и b_2, было справедливо

$$b_1 \leqslant b_2 \quad \text{для всех} \quad v_{z_1} \leqslant v_{z_2}. \tag{4.1}$$

Этим мы докажем, что $p(\tilde{a}) = TRUE$, то есть придем к противоречию.

Итак, присвоим $x_i = a_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим произвольный элемент $v_y \in L_F$, соответствующий некоторой связанной переменной y. Пусть $v_{x_{i_1}}, \ldots, v_{x_{i_r}}$ — все минимальные элементы (то есть соответствующие свободным переменным) такие, что $v_{x_{i_j}} \leqslant v_y$. Если все $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in H_{\{1,2,3\}}$ и имеют общий максимум d (возьмем наибольший из них), то положим $y = d$. Множество таких переменных y обозначим через Y_1.

Множество всех связанных переменных из формулы F обозначим через X, а множество свободных — через Y, $Y_2 = Y \setminus Y_1$.

Проведем первый шаг индукции — присвоим значения переменным, соответствующим максимумам L_F.

Лемма 9. *Пусть v_y — максимальный элемент ЧУМ L_F, $v_{x_{i_1}}, \ldots, v_{x_{i_r}}$ — все минимальные элементы L_F, меньшие v_y. Тогда все значения $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ имеют общий максимум в H*

Доказательство. Предположим противное. Поскольку $H \in Q_k$, то из множества $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ можно выделить подмножество из не более, чем трех элементов, не имеющих общего максимума в H. Пусть это a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}. Но при указанных значениях переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$ справедливо $p(\tilde{a}) = FALSE$ независимо от значений остальных компонент. Получаем противоречие с определением невырожденного предиката. $\square$

Пусть справедивы условия леммы. Если найдется $a_{i_j} \in H_{\{s\}}$ ($s = 1, 2, 3$, $j \in \{1, \ldots, r\}$), то присвоим $y = T_{\{s\}}$, в противном случае присвоим $y = T_{\{2\}}$. Обозначим присвоенное значение через d. В силу леммы 9 данное присвоение корректно, и любое значение a_{i_q} ($q \in \{1, \ldots, r\}$) меньше или равно d. В самом деле, пусть $a_{i_q} \nleqslant d$. Если $a_{i_q} \in H_{\{i\}}$ или $a_{i_q} \in H_{\{i,j\}}$ для некоторых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, то мы получаем пару значений a_{i_q}, a_{i_j}, не имеющих максимума в H, что противоерчит лемме 9. Во всех остальных случаях $a_q \leqslant d$.

Осуществим теперь индукционный переход. Пусть для некоторого элемента v_y для всех элементов $v_{y'_i}$ ($i \in \{1, \ldots, s\}$) таких, что $v_y \leqslant v_{y'_i}$, мы уже присвоили значения $A_1, \ldots, A_s$ переменным $y'_1, \ldots, y'_s$. Предположим, что для каждой переменной y'_i значение A_i превосходит значения всех свободных переменных, элементы соответствующие которым в ЧУМ L_F меньше, чем v_y. Присвоим переменной y максимальное значение из множества $\overline{M} = \{T_{\{1\}}, T_{\{2\}}, T_{\{3\}}, T_{\{12\}}, T_{\{23\}}\}$, меньшее всех $A_1, \ldots, A_s$.

Пусть снова $v_{x_{i_1}}, \ldots, v_{x_{i_r}}$ — все минимальные элементы L_F, меньшие v_y.

Лемма 10. *В результате описанной процедуры присвоения значение для переменной y найдется (обозначим его d), и для всех $j \in \{1, \ldots, r\}$ будет справедливо $a_{i_j} \leqslant d$.*

Доказательство. Предположим, что указанного значения для переменной y не найдется. Получаем, что элементы $A_1, \ldots, A_s$ не имеют в H минимума, входящего во множество $\overline{M}$. Отметим, что ниже любого элемента v_{y_1}, где $y_1 \in Y_1$, не может находится элемента, соответствующего связанной переменной из множества $Y \setminus Y_1$ (все такие переменные также должны попасть в множество Y_1). Получаем, что все $y_i \in Y_2$. Поскольку в ходе индукции мы присваивали переменным значения из множества $\overline{M}$, то все $A_i \in \overline{M}$. Это означает, что среди $A_1, \ldots, A_s$ найдется одна из следующих пар: $(T_{\{1\}}, T_{\{3\}})$,$(T_{\{1,2\}}, T_{\{3\}})$, $(T_{\{1\}}, T_{\{2,3\}})$, $(T_{\{1,2\}}, T_{\{2,3\}})$. Отсюда следует, что существуют два максимальные элемента $v_{y'}$, $v_{y''}$ такие, что связанные переменные y' и y'' приняли значения соответственно $T_{\{1\}}$ и $T_{\{3\}}$. Это в свою очередь влечет существование свободных переменных x_1, x_2 (нумерацией мы не ограничиваем общность рассуждений) таких, что $a_1 \in H_{\{1\}}$, $a_2 \in H_{\{2\}}$. Отметим, что, поскольку переменная y не попала в множество Y_1, то также найдутся две свободные переменные x_3, x_4 такие, что a_3, a_4 не имеют общего максимума в $H_{\{1,2,3\}}$. Получаем, что справедливо $p(\tilde{a}) = FALSE$ независимо от значений переменных, кроме x_1, x_2, x_3, x_4. Опять приходим к противоречию с определением невырожденного предиката.

Предположим теперь, что $a_{i_q} \nleqslant d$ для некоторого $q \in \{1, \ldots, r\}$. По предположению индукции все $A_i \geqslant a_{i_q}$ $(i \in \{1, \ldots, s\})$ и все $A_i \in \overline{M}$. Обозначим через W' подмножество множества W такое, что $d = T_{W'}$. По нашему построению отсюда следует, что среди присвоенных на первом шаге значений переменным, соответствующим максимальным элементам L_F, которые больше v_y, найдутся все $T_{\{j\}}$ для каждого $j \in W'$. Получаем, что $a_{i_q} \in H_{W''}$, где $W' \subseteq W''$, то есть $a_{i_q} \leqslant T_{W''}$. Но в нашем случае для любых непустых $W', W'' \subset W$, таких что $W' \subseteq W''$, справедливо $T_{W''} \leqslant T_{W'}$. Получаем, что $a_{i_q} \leqslant T_{W''} \leqslant T_{W'} = d$. Итак, значение d, присвоенное переменной y больше или равно всех $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. □

Проделаем указанное присвоение для всех связанных переменных формулы F, значения которым еще не присвоены. Для доказательства (4.1) нам остается рассмотреть случай, когда $z_1, z_2 \in Y_1$, $z_1 \in X$, $z_2 \in Y_1$ и z_1, z_2 принадлежат разным Y_1, Y_2. В первом случае значения переменных z_1 и z_2 будут равны, поскольку мы берем наибольший максимум для элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Во втором случае (4.1) выполняется согласно процедуре присвоения значений переменным из Y_1. В третьем случае по определению множеств Y_1, Y_2 может быть только $z_1 \in Y_1$, $z_2 \in Y_2$. В этом случае справедливость (4.1) следует из леммы 8.

Итак, получаем, что не существует рассмотренного выше невырожденного предиката $p \in [R]$ местности больше четырех. По лемме 4 получаем, что в рассматриваемом случае надструктура класса M_H конечна.

Рассмотрим теперь случаи, когда либо два множества вида H_{ij} пусты, либо все три. Не ограничивая общности, предположим, что $H_{23} = \emptyset$ и $H_{13} = \emptyset$. По лемме 7 если множество $H_{\{1,2\}}$ непусто, оно обладает единственным максимальным элементом $T_{\{1,2\}}$. Предположим, что множество $H_{\{1,2,3\}}$ имеет более одного максимального элемента. Тогда $T_{\{1\}}$,$T_{\{3\}}$ и два различных максимальных элемента из множества $H_{\{1,2,3\}}$ образуют четверку, удовлетворяющую теореме 2. Из указанного противоречия получаем, что множество $H_{\{1,2,3\}}$ имеет единственный максимальный элемент $T_{\{1,2,3\}}$. Если множество $H_{\{1,2\}}$ непусто, то по лемме 8 выполнено $T_{\{1,2,3\}} \leqslant T_{\{1,2\}}$.

Изменим процедуру присвоения следующим образом: для максимального элемента v_y присвоим переменной y значение $T_{\{j\}}$, если найдется элемент $v_{x_{i_q}} \leqslant v_y$ такой, что свободная переменная x_{i_q} на наборе $\tilde{a}$ принимает значение $a_{i_q} \in H_{\{j\}}$. В случае $H_{\{1,2\}} \neq \emptyset$ остальным максимальным элементам присвоим значение $T_{/1,2/}$, иначе — $T_{\{1,2,3\}}$. Далее, как в предыдущем случае будем присваивать значения из множества $\overline{M}_1 = \{T_{\{1\}}, T_{\{2\}}, T_{\{3\}}, T_{\{1,2\}}, T_{\{1,2,3\}}\}$ по индукции (если $H_{\{1,2\}} = \emptyset$, то в множестве $\overline{M}$ следует вычеркнуть значение $T_{\{1,2\}}$).

Дальнейшее доказательство абсолютно аналогично предыдущему случаю.

Теорема доказана. □

Итак, применением открытых ранее автором необходимых и достаточных условий был найден критерий наличия бесконечной надструктуры у классов монотонных функций, порожденных ЧУМ с тремя максимальными элементами и одним минимальным. Используя [4] (надструктура класса монотонных функций не меняется при инвертировании порождающего его ЧУМ), можно получить критерий наличия бесконечной надструктуры у классов монотонных функций, порожденных ЧУМ с тремя минимальными элементами и одним максимальным элементом.

Отметим, что остается открытым вопрос об общем критерии бесконечной надструктуры для всех классов монотонных функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-00684-а.

Список литературы

1. Ларионов В. Б. Замкнутые классы k-значной логики, содержащие классы монотонных или самодвойственных функций : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Б. Ларионов. – 2009. – 157 с.
2. Ларионов В. Б. О монотонных замкнутых классах функций многозначной логики с бесконечной надструктурой / В. Б. Ларионов // Материалы VII молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям, 18–23 мая 2009 г. – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2009. — С. 7–12.
3. Ларионов В. Б. О положении некоторых классов монотонных k-значных функций в решетке замкнутых классов / В. Б. Ларионов // Дискретная математика. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 111–116.
4. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов функций в многозначных логиках / В. В. Мартынюк // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1960. – Вып. 3. – С. 49–61.
5. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций / С. С. Марченков. – М. : Физматлит, 2000. – 128 с.
6. Теория Галуа для алгебр Поста / В. Г. Боднарчук, В. А. Калужнин, В. Н. Котов, Б. А. Ромов // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10. – № 5. – С. 1–9.
7. Яблонский С. В. Предполные классы в многозначных логиках / С. В. Яблонский, Г. П. Гаврилов, А. А. Набебин. – М. : Изд. дом МЭИ, 1997. – 144 с.
8. Янов Ю. И. О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса / Ю. И. Янов, А. А. Мучник // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127, № 1. – С. 44–46.
9. Post E. L. Two valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. Vol. 5. – Princeton : Princeton Univ. Press, 1941. – 122 p.
10. Rosenberg I. G. La structure des fonctions de plusiers variables sur un ensemble fini / I. G. Rosenberg // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. – 1965. – Vol. 260. – P. 3817–3819.

V. B. Larionov

Criterion of existance of infinite substructure for some classes of monotone k-valued functions

Abstract. This paper continues author's investigation of substructure for classes of monotone functions. Criterion of existance of infinite substructure for some family of classes of monotone functions.

Keywords: multivalued logic; lattice of closed classes; monotone functions.

Ларионов Виталий Борисович, кандидат физико-математических наук, ООО „Атес Медика Софт“ (vitalyblarionov@yandex.ru)

Larionov Vitaly, Ates Medica Soft (vitalyblarionov@yandex.ru)