Серия «Математика»
2018. Т. 24. С. 3—11

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
*Иркутского
государственного
университета*

УДК 519.6
MSC 65K10, 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.24.3

Об оптимизационном подходе при построении поля скоростей в задачах обработки изображений

П. В. Бажанов
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Е. Д. Котина
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Аннотация. Исследуется проблема построения поля скоростей. Данная задача рассматривается в литературе многими авторами в различных постановках. Наиболее известная постановка задачи с использованием понятия оптического потока предполагает постоянство функции плотности распределения (яркости изображений) вдоль траекторий рассматриваемой системы. Также вместо предположения о постоянстве яркости иногда рассматривают предположение о постоянстве ее градиента, Гессиана или Лапласиана. В этой постановке строятся функционалы качества, в которые также дополнительно включаются требования гладкости для искомого поля скоростей. Минимизация построенных функционалов сводится к решению соответствующих уравнений Эйлера – Лагранжа численными методами. Предлагается новая постановка задачи. Предполагается, что плотность вдоль траекторий может изменяться. Поле скоростей задается, как некоторая функция, зависящая от вектора неизвестных параметров. В работе предлагается оптимизационный подход к построению поля скоростей, основанный на исследовании интегрального функционала на ансамбле траекторий. Рассматривается интегральный функционал, выписывается в аналитическом виде вариация функционала и приводится представление градиента, что дает возможность использования градиентных методов для поиска искомых параметров. Рассмотренный подход может использоваться в задачах анализа различных изображений, в частности, при обработке радионуклидных изображений.

Ключевые слова: поле скоростей, ансамбль траекторий, оптимизация, вариация функционала, обработка изображений, радионуклидные изображения.

1. Введение

Разработка новых методов обработки изображений остается актуальной задачей, имеющей множество приложений. Построение поля скоростей, основанное на определении оптического потока, рассматривалось в большом количестве зарубежных статей известных авторов [11–14;20]. В работах [5;8;14;16–19] вопрос построения поля скоростей решается на основе минимизации некоторых функционалов и получения уравнений Эйлера – Лагранжа, с последующим сведением данных уравнений к разреженным линейным системам большого порядка, которые решаются блочными итерационными методами [3]. В работах [1; 15] был предложен оптимизационный алгоритм построения поля скоростей на основе дискретных систем. В данной работе предлагается оптимизационный подход на основе вариации интегрального функционала в задачах управления ансамблями (пучками) траекторий, представленных в работах [5; 6].

2. Постановка задачи

Исследуем систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{2.1}$$

Здесь x — n-вектор пространственных координат, t — время, u — r-вектор параметров, $u \in U \subset R^r$.

Предполагаем, что перемещение осуществляется в силу системы 2.1. Введем функцию плотности распределения $\rho = \rho(t, x)$, которая в различных задачах механики и электродинамики играет роль плотности распределения массы или заряда. В нашей задаче она в дальнейшем будет играть роль количественной характеристики изображения (яркости), зависящей от пространственных координат и времени, или интенсивности распределения радиофармпрепарата (РФП) при обработке данных радионуклидных исследований [4]. Уравнение, которое при заданной вектор-функции $f(t, x, u)$ определяет изменение функции плотности в пространстве с течением времени имеет вид [7; 9]:

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t,x)}{\partial x} f(t,x,u) + \rho(t,x) div_x f(t,x,u) = 0, \tag{2.2}$$

где

$$div_x f(t,x,u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,x,u)}{\partial x_i}.$$

Для решения уравнения 2.2 задается обычно начальное условие

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \tag{2.3}$$

где $\rho_0(x)$ — заданная функция.

Уравнение 2.2 есть уравнение в частных производных первого порядка, называемое уравнением Гамильтона – Якоби, и вопросы его решения рассмотрены во многих учебниках и монографиях [9].

Полагаем, что функция $\rho = \rho(t, x)$ задана, и надо восстановить функцию $f(t, x, u)$, в которой неизвестными считаем параметры $u_1, u_2, \ldots, u_r$, т. е. вектор параметров u.

При обработке изображений вид функции $f(t, x, u)$ неизвестен. Поэтому функцию f можно рассматривать как функцию, представленную отрезком некоторого ряда, например, ряда Тейлора. Коэффициенты ряда и есть искомый вектор параметров u. В частности, на первом этапе построения поля скоростей можно рассматривать функцию f как линейную вектор-функцию, т. е.

$$\dot{x} = Ax + C,$$

где A — квадратная матрица: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, C — вектор: $C = \{c_i\}_{i=1}^n$. Вектор параметров u будет состоять из компонентов матрицы A и вектора C, и иметь вид: $u = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}, c_1, \ldots, c_n)^*$.

Рассмотрим задачу восстановления вектора параметров u, как некоторую оптимизационную задачу. С этой целью воспользуемся методами оптимизации динамики пучков заряженных частиц, представленных в работах Д. А. Овсянникова [6; 7].

Пусть $M_0 \in R^n$ — множество начальных значений для системы 2.1. Предполагаем, что множество M_0 замкнуто и имеет ненулевую Лебегову меру. Обозначим через

$$x(t) = x(t, x_0, u), x_0 \in M \tag{2.4}$$

решения системы 2.1. Множество этих решений назовем пучком траекторий (или просто пучком), исходящих из множества M_0 при заданном векторе параметров u.

Через $M_{t,u}$ обозначим сечение пучка траекторий в момент времени t, при фиксированном векторе u, т. е. множество

$$M_{t,u} = \{x(t) = x(t, x_0, u), x_0 \in M_0\}. \tag{2.5}$$

Пусть $\rho_0(x)$ — известная плотность (яркость) в момент времени $t = 0$, которая определяет некоторое исходное изображение. Предполагаем далее, что нам известна плотность (яркость) $\hat{\rho}(x)$, характеризующая измененное за время Δt исходное изображение. Обозначим момент времени $T = \Delta t$. Задача состоит в нахождении вектора параметров u такого, что в момент времени T плотность, вычисленная в силу уравнения 2.2 с условием 2.3 совпала с плотностью $\hat{\rho}(x)$, т. е.

$$\rho(T, x) = \hat{\rho}(x). \tag{2.6}$$

Заметим, что из уравнения 2.2 следует, что полная производная по времени вдоль траекторий системы 2.1 удовлетворяет уравнению

$$\left.\frac{d\rho}{dt}\right|_{(1)} = -\rho div_x f. \tag{2.7}$$

Решение уравнения 2.7 с условием

$$\rho(0, x_0) = \rho_0(x_0) \tag{2.8}$$

имеет вид

$$\rho(t, x(t, x_0, u)) = \rho_0(x_0) e^{-\int\limits_0^t dix_x f(\tau, x(\tau, x_0, u)) d\tau}.$$

Сформулируем оптимизационную задачу. С этой целью введем функционал

$$J(u) = \int\limits_{M_{T,u}} g(x, \rho(T, x)) dx, \tag{2.9}$$

здесь $M_{T,u}$ — сечение пучка траекторий в момент времени $t = T$, $g(x, \rho)$ — неотрицательная, непрерывно-дифференцируемая по x и ρ функция. В частности, в качестве функции $g(x, \rho(T, x))$ можно взять функцию

$$g(x, \rho) = (\rho(T, x(T, x_0, u)) - \hat{\rho}(x))^2, \tag{2.10}$$

где $\hat{\rho}(x)$ — известная заданная плотность в R^n. Заметим, что момент времени T здесь фиксирован, однако его можно также варьировать.

Сформулируем задачу: найти минимум функционала 2.9 при $u \in U \subset R^r$, U — компактное выпуклое множество в R^r.

Решая задачу минимизации функционала 2.9, и определяя параметры вектора u, мы решаем задачу восстановления функции $f(t, x, u)$, т. е. определяем поле скоростей, задаваемое формулой 2.1.

3. Вариация функционала

Следуя работе [6], представим вариацию функционала 2.9 в виде

$$\delta J = -\int\limits_0^T \int\limits_{M_{t,u}} [\psi^*(t, x_t)\Delta_u f(t, x_t, u) + \lambda(t, x_t)\Delta_u div_x f(t, x_t, u)]\, dx_t dt, \tag{3.1}$$

здесь $\psi(t, x)$ и $\lambda(t, x)$ — вспомогательные функции, удовлетворяющие вдоль траекторий системы 2.1 уравнениям

$$\frac{d\psi}{dt} = -\left(\frac{\partial f(t, x(t), u)}{\partial x} + E div_x f(t, x(t), u)\right)^* \psi - \lambda \left(\frac{\partial div_x f(t, x, u)}{\partial x}\right)^*, \tag{3.2}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda div_x f(t, x(t), u) \tag{3.3}$$

при конечных условиях

$$\psi^*(T, X(T)) = -\frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial x},$$
$$\lambda(T, X(T)) = -g(x(T), \rho(T, x(T))) + \frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial \rho}\rho(T, x(T)). \tag{3.4}$$

При этом

$$\Delta_u f(t, x_t, u) = f(t, x_t, u + \Delta u) - f(t, x_t, u), \tag{3.5}$$

$$\Delta_u div_x f(t, x_t, u) = div_x f(t, x_t, u + \Delta u) - div_x f(t, x_t, u). \tag{3.6}$$

Вывод вариации 3.1 основан на использовании преобразования пучков траекторий по сечениям [6; 7] с использованием уравнений в вариациях для уравнений 2.1, 2.2.

Пусть функция f — дифференцируема по u. Тогда, учитывая выпуклость множества U и используя формулу 3.1, мы получаем выражение для градиента функционала 2.9, а именно,

$$\frac{\partial J}{\partial u} = -\int\limits_0^T \int\limits_{M_{t,u}} \left[\psi^* \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial div_x f}{\partial u}\right] dx_t dt. \tag{3.7}$$

Подробный вывод содержится в работе [6].

На основе данного выражения для градиента можно строить различные методы направленного поиска вектора параметров u.

4. Заключение

Таким образом, основываясь на данном подходе, можно строить методы построения поля скоростей для решения различных задач анализа и обработки изображений, например коррекции движения объектов на изображении, построении контуров и т. д. [2; 16].

Следует также отметить, что выбор параметризации функции f и выбор функции g в функционале 2.9 может существенно влиять на проблемы сходимости метода и решения задачи построения поля скоростей. Однако, преимуществом данного подхода является возможность построения градиентных методов оптимизации на основе аналитических выражений для градиента исследуемого функционала.

Список литературы

1. Котина Е. Д. Математическое моделирование в радионуклидной диагностике : дис. ... д-ра физ.-мат. наук / С.-Петерб. гос. ун-т. СПб., 2010. 261 с.
2. Котина Е. Д., Максимов К. М. Коррекция движения при томографических и планарных радионуклидных исследованиях // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2011. № 1. С. 29–36.
3. Котина Е. Д. О сходимости блочных итерационных методов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 3. С. 41–55.
4. Котина Е. Д. Обработка данных радионуклидных исследований // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Ядер.-физ. исслед. 2012. № 3(79). С. 195–198.
5. Котина Е. Д., Пасечная Г. А. Определение поля скоростей в задачах обработки изображений // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 1. С. 48–59.
6. Овсянников Д. А. Математические методы управления пучками. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
7. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
8. Овсянников Д. А., Котина Е. Д. Определение поля скоростей по заданной плотности заряженных частиц // Вопр. атом. науки и техники. 2012. № 3. С. 122–125.
9. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М. : Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
10. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1974. 285 с.
11. Anandan P. A. A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion // International Journal of Computer Vision. 1989. Vol. 2. P. 283–310. https://doi.org/10.1007/BF00158167
12. Barron J., Fleet D. Performance of optical flow techniques // International Journal of Computer Vision. 1994. Vol. 12. P. 43–77. https://doi.org/10.1007/BF01420984
13. Fleet D., Weiss J. Optical Flow Estimation // Mathematical Models in Computer Vision: The Handbook. Chapter 15. Springer, 2005. P. 239–258.
14. Horn B. K. P., Schunck B. G. Determining optical flow // Artificial intelligence. 1981. Vol. 17, N 11. P. 185–203. https://doi.org/10.1016/0004-3702(81)90024-2
15. Kotina E. D. Discrete optimization problem in beam dynamics // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2006. Vol. 558. P. 292-294.
16. Kotina E. D., Pasechnaya G. A. Optical flow-based approach for the contour detection in radionuclide images processing // Cybernetics and physics. 2014. Vol. 3, N 2. P. 62–65.
17. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D. Determination of velocity field by given density distribution of charged particles // Problems of Atomic Science and Technology. 2012. Vol. 79, N 3. P. 122–125.
18. Ovsyannikov D., Kotina E. D. Reconstruction of velocity field // Proceedings of ICAP2012. Rostock-Warnemunde, Germany, 2012. P. 256–258.
19. Ovsyannikov D. A., Kotina E. D., Shirokolobov A. Y. Mathematical Methods of Motion Correction in Radionuclide Studies // Problems of Atomic Science and Technology. 2013. Vol. 88, N 6. P. 137–140.

20. Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping / N. Papenberg [et al.] // International Journal of Computer Vision. 2006. Vol. 67, N 2. P. 141–158. https://doi.org/10.1007/s11263-005-3960-y

Бажанов Павел Валерьевич, аспирант, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 198604, Санкт-Петербург, Университетский проспект, 35, тел.: +7(812)4284868 (e-mail: st023377@student.spbu.ru)

Котина Елена Дмитриевна, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 198604, Санкт-Петербург, Университетский проспект, 35, тел.: +7(812)4284868 (e-mail: e.kotina@spbu.ru)

Поступила в редакцию 30.04.2018

On Optimisation Approach to Velocity Field Determination in Image Processing Problems

P. V. Bazhanov, E. D. Kotina

Saint Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Abstract. The problem of determining the velocity field is investigated. This problem is considered by many authors in various formulations. The most well-known statement of the problem is proposed with the use of a concept of optical flow of constant distribution density function (brightness of images) along trajectories of the system under consideration. In addition, besides the common grey value constancy assumption, also, gradient constancy, as well as the constancy of the Hessian and the Laplacian are considered. In this statement functionals of quality are constructed, that also require the smoothness of the considered velocity field. The minimization of the constructed functional usually reduces to solving the Euler-Lagrange equations by numerical methods.

In this paper a new formulation of the problem is proposed. The density along the trajectories is assumed to vary. The velocity field is defined as a function depending on the vector of unknown parameters. In this paper an optimization approach to constructing the velocity field is proposed, which is based on the study of the integral functional on trajectories ensembles. The variation of integral functional is represented in an analytical form, which makes it possible to use gradient methods to find the required parameters.

The proposed approach can be used in the analysis of various images, in particular, of radionuclide images.

Keywords: velocity field, ensemble of trajectories, optimization, functional variation, image processing, radionuclide images.

References

1. Kotina E.D. *Matematicheskoe modelirovanie v radionuklidnoj diagnostike* Doktorskaya dissertatsiya [Mathematical modelling in radionuclide diagnostic. Doctoral dissertation]. Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State University Publ., 2010, 261 p. (in Russian)

2. Kotina E.D., Maksimov K.M. Motion correction in SPECT and planar radionuclide studies. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. serija 10: prikladnaja matematika, informatika, processy upravlenija*, 2011, no. 1, pp. 29-36. (in Russian)
3. Kotina E.D. On convergence of block iterative methods. *Izvestija Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2012, vol. 5, no. 3, pp. 41-55. (in Russian)
4. Kotina E.D. Data Processing in Radionuclide Studies. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2012, vol. 79, no. 3, pp. 195-198. (in Russian)
5. Kotina E., Pasechnaya G. Determining of velocity field for image processing problems *Izvestija Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*[The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2013, vol. 6, no. 1, pp. 48-59. (in Russian)
6. Ovsjannikov D.A. *Matematicheskie metody upravlenija puchkami.* [Mathematical methods of beam control]. Leningrad, Leningrad University Publ., 1980, 228 p. (in Russian)
7. Ovsyannikov D.A. *Modelling and optimization of charged particle beam dynamics.* Leningrad, Leningrad University Publ., 1990, 312 p. (in Russian)
8. Ovsjannikov D.A, Kotina E.D. Determination of velocity field by given density distribution of charged particles *Problems of Atomic Science and Technology*, 2012, vol. 79, no. 3, pp. 122-125. (in Russian)
9. Subbotin A.I. *Obobshhennye reshenija uravnenij v chastnyh proizvodnyh pervogo porjadka* [Generalized solutions of first-order partial differential equations]. Perspektivy dinamicheskoj optimizacii. Moscow, Institut komp'juternyh issledovanij, 2003, 336 p. (in Russian)
10. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Methods for solving ill-posed problems.* Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p. (in Russian)
11. Anandan P.A. A computational framework and an algorithm for the measurement of visual motion. *International Journal of Computer Vision*, 1989, vol. 2, pp. 283-310. https://doi.org/10.1007/BF00158167
12. Barron J., Fleet D. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 1994, vol. 12, pp. 43-77.https://doi.org/10.1007/BF01420984
13. Fleet D., Weiss J. Optical Flow Estimation. *Mathematical Models in Computer Vision: The Handbook. Chapter 15. Springer*, 2005, pp. 239-258.
14. Horn B.K.P., Schunck B.G. Determining optical flow. *Artificial intelligence*, 1981, vol. 17, no. 11, pp. 185-203. https://doi.org/10.1016/0004-3702(81)90024-2
15. Kotina E.D. Discrete optimization problem in beam dynamics. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2006, vol. 558, pp. 292-294.
16. Kotina E.D., Pasechnaya G.A. Optical flow-based approach for the contour detection in radionuclide images processing. *Cybernetics and physics*, 2014, vol. 3, no. 2, pp. 62-65.
17. Ovsyannikov D.A., Kotina E.D. Determination of velocity field by given density distribution of charged particles. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2012, vol. 79, no. 3, pp. 122-125.
18. Ovsyannikov D., Kotina E.D. Reconstruction of velocity field. *Proceedings of ICAP2012*, Rostock-Warnemünde, Germany, 2012, pp. 256-258.
19. Ovsyannikov D.A., Kotina E.D., Shirokolobov A.Y. Mathematical Methods of Motion Correction in Radionuclide Studies. *Problems of Atomic Science and Technology*, 2013. vol. 88, no. 6, pp. 137-140.

20. Papenberg N., Bruhn A., Brox T. et al. Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping. *International Journal of Computer Vision*, 2006, vol. 67, no. 2, pp. 141-158. https://doi.org/10.1007/s11263-005-3960-y

Bazhanov Pavel, Postgraduate, Saint Petersburg State University, 35, Universitetskij pr., Saint-Petersburg, 198504, Russian Federation, tel.: +7(812)4284868 (e-mail: st023377@student.spbu.ru)

Kotina Elena, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Saint Petersburg State University, 35, Universitetskij pr., Saint-Petersburg, 198504, Russian Federation, tel.: +7(812)4284868 (e-mail: e.kotina@spbu.ru)

Received 30.04.2018