Серия «Математика»
2018. Т. 24. С. 51—67

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.54
MSC 20K01
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.24.51

О группах Шункова, насыщенных конечными простыми группами *

А. А. Шлепкин
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Аннотация. Строение бесконечной группы, содержащей элементы конечного порядка, в значительной степени зависит от строения конечных подгрупп рассматриваемой группы. Одним из эффективных условий исследования бесконечной группы, содержащей элементы конечного порядка, является использование условия насыщенности группы некоторым множеством групп. Группа, насыщена группами из множества, если любая конечная подгруппа из данной группы содержится в подгруппе данной группы изоморфной некоторой группе из указанного множества. Группа называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы в фактор-группе нормализатора по ней любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Если множество элементов конечного порядка группы является подгруппой, то она называется периодической частью группы. Доказывается, что группа Шункова 2-ранга 2, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами, обладает периодической частью, которая является простой локально конечной группой 2-ранга 2. Доказано, что если группа Шункова насыщена конечными простыми неабелевыми группами, и в любой её конечной 2-подгруппе все инволюции из подгруппы лежат в её центре, то сама группа обладает периодической частью, которая является простой локально конечной группой, и в любой конечной 2-подгруппе из периодической части все инволюции также лежат в центре.

Ключевые слова: насыщенность группы множеством групп, группа Шункова.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Группа G насыщена группами из множества $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ [14].

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-31-00257.

Напомним, что группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой [7; 8]), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу. Если множество элементов конечного порядка группы G является подгруппой, то она называется периодической частью группы G и обозначается $T(G)$. ([2], с. 90, 150). Пусть G – группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ – множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 – единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$, и соответственно вместо $\mathfrak{X}_G(1)$ будем писать $\mathfrak{X}(1)$.

Группа G называется группой 2-ранга 2, если её максимальные элементарные абелевы 2-подгруппы имеют порядок 4. Как показали Альперин, Брауэр и Горенстейн, конечными простыми группами 2-ранга 2 с точностью до изоморфизма являются следующие группы: $L_2(q)$, A_7, $L_3(p)$, $U_3(r)$, M_{11}, $U_3(4)$, где q, p, r — нечетные и $q > 3$ [16;17]. В [6] анонсирована теорема, устанавливающая структуру периодических групп 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми группами. В приводимой ниже теореме этот результат переносится на класс групп Шункова 2-ранга 2.

Теорема 1. *Пусть G — группа Шункова 2-ранга 2, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной одной из групп*

$$L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4),$$

где Q, P, R — всевозможные локально конечные поля нечетных характеристик, и $|Q| > 3$.

В [9] установлена структура периодической группы, насыщенной конечными простыми неабелевыми группами, в которой любая конечная 2-подгруппа содержит все свои инволюции в своем центре. В приводимой ниже теореме устанавливается структура группы Шункова с подобным насыщающим множеством и аналогичным ограничением на конечные 2-подгруппы.

Теорема 2. *Пусть группа Шункова G насыщена конечными простыми неабелевыми группами, и в любой её конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат в центре K. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной одной из групп множества*

$$\{J_1, L_2(Q), Re(P), U_3(R), Sz(F) | Q, P, R, F \text{ – локально конечные поля}\}.$$

Известия Иркутского государственного университета.
2018. Т. 24. Серия «Математика». С. 51–67

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — контрпример. Положим $\mathfrak{A} = \{L_2(q) \mid q > 3,\ q-$ нечётное$\}$, $\mathfrak{B} = \{L_3(p), U_3(r) \mid p, r -$ нечётные$\}$, $\mathfrak{C} = \{\ A_7,\ M_{11},\ U_3(4)\}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \mathfrak{C}$.

Лемма 1. 1. $\mathfrak{M}$ — *насыщающее множество для группы G, и не существует группы K, для которой одновременно выполнено $K \simeq H$, $H \in \mathfrak{A}$, $H \in \mathfrak{B}$ и $H \in \mathfrak{C}$.*

2. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{B}(1) \cup \mathfrak{C}(1) \neq \varnothing$, *и существует такая группа $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, что $X \not\leq Y$ ни для какой группы $Y \in \mathfrak{B}(1)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы вытекает из [16; 17] и определения множеств $\mathfrak{M}(1), \mathfrak{A}(1), \mathfrak{B}(1), \mathfrak{C}(1)$. Второе утверждение леммы вытекает из условия насыщенности и [4].

Лемма доказана.

На протяжении лемм 2 — 10 будет предполагаться, что в G существует четверная группа F такая, что $C_G(F)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка и, как следствие, содержит бесконечную локально конечную подгруппу [11].

Лемма 2. $\mathfrak{M}(1)$ *не содержит групп, изоморфных* $U_3(4)$.

Доказательство.

Предположим обратное, $R \in \mathfrak{M}(1)$ и $R \simeq U_3(4)$. Пусть S_R — силовская 2-подгруппа из R. Тогда S_R — силовская 2-подгруппа в G. Следовательно, $\mathfrak{M}(1) = \{U_3(4)\}$. Из того факта, что $C_G(F)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу, вытекает, что множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 3. $\mathfrak{B}(1)$ *содержит бесконечно много неизоморфных подгрупп.*

Доказательство. Так как $C_G(F)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу, порядки централизаторов четверных подгрупп из групп, являющихся элементами множества $\mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$ ограничены в совокупности, то из [4] вытекает, что множество $\mathfrak{B}(1)$ содержит группы сколь угодно большого порядка.

Лемма доказана.

По лемме 3 в G найдётся подгруппа K, изоморфная $U_3(q)$, где q нечётно, или $L_3(q)$, где q нечётно. Отождествим указанную группу K с L из [4, предложение 1] и будем далее использовать обозначения этого предложения: i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 4. *Все четверные подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Данное утверждение доказывается аналогично доказательству леммы 8 из [13] с учетом предложения 20 из [3] и того факта, что все инволюции из G сопряжены.

Лемма доказана.

Лемма 5. *В G существует подгруппа M, обладающая следующими свойствами:*

1. *$M \tilde{\in} \{L_3(R), U_3(P)\}$ для подходящих бесконечных локально конечных полей R, P нечётных характеристик, и M — собственная подгруппа группы G.*

2. *$N < M$, и для любой четверной подгруппы $X < M$, $T(N_G(X)) = N_M(X)$.*

3. *Силовские 2-подгруппы из M сопряжены.*

4. *Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы M. Тогда S_M — силовская 2-подгруппа группы G.*

5. *$T(N_G(M)) = M$.*

Доказательство. 1. По построению $V, A, B < M_n$ для любого n. Выберем $v \in M_n$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, и $v_1 \in M_{n+1}$, для которого $j^{v_1} = j$, $i^{v_1} = w$. Тогда $v_1 v^{-1} = c \in C_A$, $v_1 = cv$, $(C_{M^c_{n+1}}(A))^v < M_{n+1}$ и $C_{M^c_{n+1}}(A) = C_{M_{n+1}}(A)$. По построению $C_{M_{n+1}}(A) > C_{M_n}(A)$. Следовательно, $(C_{M_{n+1}}(A))^v > C_{M_n}(B)$. Таким образом, $C_{M_n}(B) < M_{n+1}$. В силу того, что $|M_n| > |U_3(5)|$ для любого n, получаем

$$M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle -$$

подгруппа $\langle N_{M_{n+1}}(A), C_{M_{n+1}}(B)\rangle = M_{n+1}$. Следовательно,

$$M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$$

. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = M$ и M изоморфна одной из групп множества $\{L_3(R), U_3(P)\}$ для подходящих бесконечных локально конечных полей R, P нечётных характеристик. Ясно также, что M — собственная подгруппа группы G.

2. Так как $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, то $N_M(A) = T(N)$. Поскольку A и X сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$ выполнено $A = X^x$. Следовательно, $T(N) = (N_M(X))^x$ и $N_M(X) = T(N_G(X))$.

3. Пусть $S_1,\ S_2$ — две различные силовские 2-подгруппы группы M. Если одна из них конечна, то вторая конечна и сопряжена с первой. Если они бесконечны, то они сопряжены как силовские 2-подгруппы из нормализаторов четверных подгрупп, лежащих в полных абелевых подгруппах группы M (см. пункт 2 доказанный выше).

4. Пусть, напротив, $S_M < S$, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G.

Пусть S — конечная группа. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены (лемма 4), то можно считать, что $X < M$. По пункту 2, доказпнному выше, $S < M$. Следовательно, $S_M = S$, что противоречит выбору S.

Пусть S — бесконечная группа. Тогда S — черниковская группа 2-ранга 2. Ясно, что S_M — также бесконечная группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть группы S_M. Тогда $\tilde{S}$ — полная абелева группа ранга 2, и $S < T(N_G(X))$ для четверной подгруппы X из $\tilde{S}$. Так как все четверные подгруппы в G сопряжены, то можно считать, что $X < M$. По пункту 2, доказанному выше, $S < M$, а по пункту 3 $S_M = S$, что противоречит выбору S.

5. Пусть $c \in N_G(M) \setminus M$, и c — элемент конечного порядка. Если $A^c = A$, то по пункту 2, доказанному выше, $c \in M$, что противоречит выбору c. Если $A^c \neq A$, то для некоторого $x \in M$ выполнено $A^{cx} = A$, и по пункту 2, доказанному выше, $cx \in M$. Следовательно, $c \in M$, что противоречит выбору M.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть K — конечная 2-подгруппа группы G. Тогда существует такой $g \in G$, что $K^g < M$.*

Доказательство. Если в G есть конечная силовская 2-подгруппа, то заключение леммы справедливо по лемме 5 (пункт 4). Следовательно, силовские 2-подгруппы из G бесконечны. Пусть K — минимальный контрпример к утверждению леммы. Для некоторого $g \in G$, группа $K_1 = K^g \cap M$ неединичная, и $|K^g : K_1| = 2$. Возьмём в M силовскую 2-подгруппу S_M, содержащую группу K_1. По лемме 5 S_M — черниковская группа. Обозначим через $\tilde{S}_M$ полную часть S_M. Очевидно, ранг $\tilde{S}_M$ равен 2. Следовательно, в $Z(S_M) \setminus K_1$ найдётся элемент z такой, что $z^2 \in K_1$. В этом случае $\langle K^g, z\rangle$ — конечная группа, Если $\langle z\rangle$ — группа порядка большего 2, K_1 — группа порядка 2, то

$$K_1 < \langle z\rangle < \langle z\rangle K^g, \langle z\rangle \lhd \langle z\rangle K^g, \langle z\rangle K^g = \langle z\rangle \leftthreetimes \langle v\rangle < S_G,$$

где v — инволюция. Возьмём инволюцию $a \in S_M \setminus Z(S_M)$. По условию насыщенности группа $\langle z, v, a\rangle$ конечна, и $\langle z, v, a\rangle < H \tilde{\in} \mathfrak{B}(1)$, поскольку H содержит подгруппу $\langle z\rangle \times \langle a\rangle$. В этом случае $\langle z, v, a\rangle < N_G(T)$ для некоторой четверной группы $X < G$. Ввиду лемм 4, 5 $K^g < M$. Противоречие с выбором K^g.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $R \in \mathfrak{B}(1)$, $R \cap M$ содержит четверную подгруппу. Тогда $R < M$.*

Доказательство. Пусть, напротив, C — четверная группа из $R \cap M \neq R$. По лемме 5 (пункт 2) $N_R(C) < M$ и $N_R(C)$ содержит четверную подгруппу H такую, что $T = \langle C,\ H\rangle$ — группа диэдра порядка 8. По лемме

5 (пункт 2) $N_R(H) < M$. Таким образом, $S = \langle N_R(C), N_R(H)\rangle < M$. Поскольку $S \neq R$, то $R \simeq U_3(5)$, $S \simeq A_7$, и S — максимальная подгруппа в R. Так как T — силовская 2-подгруппа из S, а силовская 2-подгруппа из R является полудиэдральной группой порядка 16, то возьмём $x \in N_R(T) \setminus T$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$. Силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (лемма 5). Выберем $y \in N_M(T) \setminus T$ со свойством $y^2 \in T$. По условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle < R_1 \in \mathfrak{B}(1)$ (изоморфизм $R_1 \simeq M_{11}$ невозможен по причине того, что $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа, лежащая в нормализаторе циклической подгруппы порядка 4 из T, что невозможно). Поскольку $x \in R_1$, но $x \notin M$, то R_1 не лежит в M. Очевидно, R_1 не изоморфна $U_3(5)$, следовательно, $R_1 = \langle N_{R_1}(C), N_{R_1}(H)\rangle$, $R_1 < M$ (лемма 5 (пункт 3)) и $x \in M$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Существует инволюция $z \in M$ такая, что $T(C_G(z)) \not< M$.*

Доказательство. Предположим обратное. Возьмём группу $X \in \mathfrak{A}(1) \cup \mathfrak{C}(1)$, удовлетворяющую заключению леммы 1 (пункт 2). Тогда $X \simeq L_2(r)$ для некоторого нечётного $r > 3$ (изоморфизмы $X \simeq M_{11}$, $X \simeq A_7$ невозможены). Пусть S_X — силовская 2-подгруппа группы X. По лемме 6 для некоторого $g \in G$ имеет место $S_X^g < X^g \cap M$. Если S_X^g содержит две неперестановочные инволюции x, y, то $X^g = \langle C_{X^g}(x), C_{X^g}(y)\rangle$. По условию леммы $X^g < M$. Следовательно, $X^g < K < M$ и $K \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $X < K^{g^{-1}}$ и $K^{g-1} \in \mathfrak{B}(1)$, что противоречит выбору X.

Итак, все инволюции из S_X^g перестановочны, и $S_X^g = \langle z\rangle \times \langle u\rangle$ — четверная группа. Так как $X^g \not< M$, то из списка максимальных подгрупп группы $L_2(r)$ ([19], стр. 377) и условия леммы получам, что $X^g \simeq L_2(5)$.

По лемме 5 $N_{X^g}(S_X^g) < M$. Возьмём элемент b порядка 3 из $N_{X^g}(S_X^g)$, инволюцию $x \in N_{X^g}(\langle b\rangle)$, инволюцию $y \in N_M(\langle b\rangle) \setminus X^g$. Так как G — группа Шункова, то $\langle b,\ x,\ y\rangle$ — конечная группа. Поскольку $x \notin M$, то $\langle b,\ x,\ y\rangle \not< M$ и $|\langle b,\ x,\ y\rangle| > 6$. По условию насыщенности $\langle b,\ x,\ y\rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$, что невозможно.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда*

$$S \neq (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle,$$

где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$.

Доказательство. Предположим обратное. По лемме 8 в M существует инволюция z такая, что $T(C_G(z)) \not< M$. Пусть $c \in T(C_G(z)) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 5 (свойство 5) $M^c \neq M$. По лемме 7

$M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Предположим, что существует такой элемент $f \in M^c \cap M$, что $f^2 = z$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа из M, содержащая элемент f, S_{M^c} — силовская 2-подгруппа из M^c, содержащая f. Так как силовские 2-подгруппы в M сопряжены (лемма 5, п. 4), то $S \simeq S_M \simeq S_{M^c}$. Следовательно, $S_M = (A_1 \times B_1) \leftthreetimes \langle v_1 \rangle$, где A_1 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_1 — инволюция, $A_1^{v_1} = B_1$, и $S_{M^c} = (A_2 \times B_2) \leftthreetimes \langle v_2 \rangle$, где A_2 — локально циклическая 2-группа порядка не менее 4, v_2 — инволюция, $A_2^{v_2} = B_2$. Тогда $M \cap M^c$ не содержит элементов порядка 4. По условию леммы найдутся такие элементы x, y порядка 4, что $x^2 = z$, $y^2 = z$, $x \in M \setminus M \cap M^c$, $y \in M^c \setminus M \cap M^c$. Ясно, что $\langle x, y \rangle \notin M$.

Пусть $\langle x,\ y \rangle < U_1 \in \mathfrak{B}(1)$. Пусть R — четверная подгруппа из U_1. По леммам 4, 5 (пункт 5), 7 для некоторого $g \in G \setminus M$ выполнено $N_{U_1}(R) < M^g$. Следовательно, $M \cap M^g$ содержит элемент x порядка 4. Как показано выше, это невозможно.

Пусть $U_1 \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $\langle x,\ y \rangle < C_{U_1}(z)$ — группа диэдра, но $\langle x,\ y \rangle$ таковой не является, поскольку содержит две различные циклические подгруппы порядка 4 $\langle x \rangle$, $\langle y \rangle$.

Предположим, что $U_1 \simeq A_7$. Пусть R — четверная подгруппа из U_1. По леммам 4, 5 (пункт 5), 7 для некоторого $g \in G \setminus M$, $N_{U_1}(R) < M^g$. Так как для любой четверной подгруппы $X \in N_{U_1}(R)$, $N_{U_1}(X) < M^g$, то $U_1 < M^g$. Следовательно, $M \cap M^g$ содержит элемент x порядка 4, а как показано выше, это невозможно.

Предположим, что $U_1 \simeq M_{11}$. Пусть S_M — силовская 2-подгруппа группы U_1, содержащая x. Возьмем $v \in N_{S_M}(\langle x \rangle) \setminus \langle x \rangle$. Тогда $\langle x \rangle < M \cap M^v$, а так как элемент x имеет порядок 4, то $M^v = M$ и $v \in M$. Повторяя еще раз этот прием, получаем, что $S_M < M \cap U_1$. По лемме 5(пункт 2) и [20] $M \cap U_1$ содержит подгруппу $H_M \simeq A_6^{\cdot}2$ такую, что $S_M < H_M$.

Пусть S_{M^c} — силовская 2-подгруппа группы U_1, содержащая y. Возьмем $w \in N_{S_{M^c w}}(\langle y \rangle) \setminus \langle y \rangle$. Тогда $\langle y \rangle < M \cap M^v$, а так как элемент y имеет порядок 4, то $(M^c)^w = M^c$ и $w \in M^c$. Повторяя еще раз этот прием, получаем, что $S_{M^c} < M^c \cap U_1$. По лемме 5(пункт 2) и [20] $M^c \cap U_1$ содержит подгруппу $H_{M^c} \simeq A_6^{\cdot}2$ такую, что $S_{M^c} < H_{M^c}$.

Так как силовская 2-подгруппа из $M \cap M^c$ имеет порядок 2, то из сравнения порядков групп U_1, H_M, H_{M^c} вытекает, что порядок группы $H_M \cap H_{M^c}$ делится на 9 и 5. Следовательно, $H_M = H_{M^c}$, $M \cap M^c$ содержит четверную группу, и $M = M^c$. Противоречие с тем, что $M \neq M^c$.

По лемме 2 $U_1 \not\simeq U_3(4)$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть S — силовская 2-подгруппа из M. Тогда S — не полудиэдральная группа.*

Доказательство. Предположим обратное. В данном случае все силовские 2-подгруппы группы G являются полудиэдральными группами и сопряжены, поскольку конечны, порядка 2^{k+1} (лемма 5 (пункт 3)). По лемме 8 существует такая инволюция $z \in M$, что $C_G(z) \not< M$. Пусть $c \in C_G(z) \setminus M$, тогда $z \in M^c \cap M$. По лемме 5 (п. 5) $M^c \neq M$. По лемме 7 $M^c \cap M$ не может содержать четверных подгрупп. Из множества групп $\{M^g | g \in G \setminus M\}$ выберем такую группу M^g, чтобы силовская 2-подгруппа S_g из $M \cap M^g$ содержала элемент b масимально возможного порядка. Тогда b порядка 2. Выберем в M элемент $z_1 \in N_M(S_g) \setminus S_g$, а в M^g возьмём элемент $z_2 \in N_{M^g}(S_g) \setminus S_g$ такие, что $z_1^2 = z_2^2 = b$. По условию насыщенности $\langle b,\ z_1,\ z_2\rangle < H \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что $H \in \mathfrak{B}(1)$. Тогда $H \not< M$, и $H < M^h$ для некоторого $h \in G \setminus M$ (леммы 4, 5 (пункт 5), 7). Так как, либо $M \cap M^h \neq M$, либо $M^g \cap M^h \neq M^g$, то получили противоречие с условием рассматриваемого случая (поскольку в первом случае $M \cap M^h$ содержит элемент z_1 порядка 4, а во втором случае $M \cap M^{hg^{-1}}$ содержит элемент $z_2^{g^{-1}}$ порядка 4). Таким образом, H изоморфна одной из групп множества $\{L_2(q),\ A_7,\ M_{11},\}$, где q — нечетное и $q > 3$. Поскольку $C_H(b^2)$ содержит подгруппу $\langle b,\ z_1,\ z_2\rangle < H$, которая не является ни группой диэдра, ни циклическйо группой, то для H осталась единственая возможность $H \simeq M_{11}$. В этом случае $\langle b,\ z_1,\ z_2\rangle$ — группа кватернионов порядка 8, $z_1^{z_2} = z^{-1}, z_2^{z_1} = z_2^{-1}$. Тогда $z_1 \in M \cap M^{z_2}$, и порядок z_1 равен 4. Противоречие с условием рассматриваемого случая.

Лемма доказана.

Пусть S — силовская 2-подгруппа группы M. Из леммы 5 (п. 1) вытекает, что либо $S = (A \times B) \leftthreetimes \langle v\rangle$, где A — локально циклическая группа порядка не менее 4, v — инволюция, $A^v = B$, либо S — полудиэдральная группа. Получили противоречие с утверждениями лемм 9 и 10. Следовательно, в дальнейшем будет предполагаться, что в G не существует четверной группы F со свойством: $C_G(F)$ содержит бесконечно много элементов конечного порядка и, как следствие, содержит бесконечную локально конечную подгруппу [11]..

Лемма 11. *Пусть z — инволюция из G. Тогда $C_G(z)$ обладает периодической частью $T(C_G(z))$, и $T(C_G(z)) = D \leftthreetimes \langle t\rangle$, где t — инволюция, D — локально циклическая группа, и для любого $d \in D,\ d^t = d^{-1}$.*

Доказательство. Положим $C = C_G(z)$. Если C содержит конечное число элементов конечного порядка, то множество $\mathfrak{M}(1)$ с точностью до изоморфизма содержит конечное число подгрупп. Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}(1)$. Противоречие с выбором G. Таким образом, C содержит бесконечно много элементов конечного порядка, и как следствие, содержит бесконечную локально конечную подгруппу . Следовательно, множество $\mathfrak{A}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп. Тогда в C найдется элемент b простого порядка p, и $p \notin \{\pi(A_7) \cap \pi(M_{11})\}$. Так как G — группа Шункова, то $\langle b \rangle$ — нормальная подгруппа группы C. Пусть K — произвольная конечная подгруппа из C. По условию насыщенности конечная группа $\langle b, K \rangle \leq Y \in \mathfrak{A}(1)$. Тогда $C_Y(z)$ — группа диэдра. Так как $K \leq C_Y(z) < C$, то C насыщена группами диэдра. Следовательно, группа C обладает периодической частью $T(C) = T(C_G(z))$ из заключения леммы.

Лемма доказана.

Лемма 12. $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{A}(1)$.

Доказательство. Ввиду леммы 11, для любой группы $X \in \mathfrak{M}(1)$ и любой инволюции $z \in X$, $C_X(z)$ — группа диэдра. Следовательно, $X \simeq L_2(r)$. Из сказанного выше вытекает, что $X \in \mathfrak{A}(1)$.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Так как $\mathfrak{M}(1)$ — насыщающее множество для группы G, то по лемме 12 $\mathfrak{A}(1)$ — также насыщающее множество для группы G. Следовательно, $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q нечетной характеристики [12]. Противоречие с выбором G.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G – контрпример к утверждению теоремы и $\mathfrak{M}$ — насыщающее множество для группы G, состоящее из конечных простых неабелевых групп. По основному результату из [9] G – не периодическая группа. Кроме того G содержит бесконечно много элементов конечного порядка и, как следствие, содержит бесконечную локально конечную подгруппу [11].

Лемма 13. *Не ограничивая общности можно считать, что* $\mathfrak{M} = \{J_1, L_2(2^n), Re(3^{2n+1}), U_3(2^{2n}), Sz(2^{2n+1}), L_2(q), q = 3, 5 \ (mod\ 8),\ q > 3\}$.

Доказательство. Пусть L — произвольная конечная простая неабелева подгруппа группы G. Обозначим через P некоторую её силовскую 2-подгруппу. Поскольку P — конечная 2-подгруппа группы G, то по условию теоремы все инволюции из P содержатся в центре P. Но тогда L изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Лемма 14. *Множество* $\mathfrak{M}(1)$ *содержит группы, порядок которых больше любого наперед заданного натурального* m.

Доказательство. Предположим обратное. Зафиксируем такое натуральное m, что для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$, $|H| < m$. Как отмечалось выше, G содержит конечную подгруппу M такую, что $|M| > m$. По условию насыщенности $M \leq H \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $m < |M| \leqslant |H|$. Последнее противоречит тому, что $|H| < m$.

Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть a – инволюция их G. Тогда $C_G(a)$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим обратное. По [11] $C_G(a)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. По лемме Дицмана [1] $C_G(a)$ обладает конечной периодической частью $T(C_G(a))$. По условию насыщенности $T(C_G(a)) < M$ и $M \in \mathfrak{M}(1)$. По теореме Брауэра [18] множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит конечное число, с точностью до изоморфизма, групп. Следовательно, порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ ограничены в совокупности. Противоречие с утверждением леммы 14.

Лемма доказана.

В леммах 16 — 19 будем полагать, что все силовские 2-подгруппы группы G абелевы, и пусть S — одна из них. Ясно, что $|S| > 4$. Леммы 16 — 19 доказываются в предположении, что $S = \langle a\rangle \times \langle z\rangle \times \langle t\rangle$ — элементарная абелева группа порядка 8. В этом случае все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены с S.

Лемма 16. *Множество $\mathfrak{M}(1)$ содержит группу H, изоморфную одной из групп множества $\{J_1, Re(3^{2n+1})\}$.*

Доказательство. Предположим обратное. По лемме 13 для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$ H, изоморфна одной из групп множества

$$\{L_2(8), L_2(q) | q = 3.5\ (mod\ 8)\}.$$

По основному результату [12] G обладает периодической частью $T(G) \simeq L_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $C = C_G(a)$. Тогда C обладает периодической частью $T(C) = \langle a\rangle \times L$, $L \simeq L_2(Q)$. где Q – бесконечное локально конечное поле характеристики* 3.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\overline{C} = C/\langle a\rangle$. Тогда $\overline{C}$ — группа Шункова, насыщенная группами из множества

$$\{L_2(4), L_2(3^{2n+1}), C_{L_2(q)}(v)/\langle v\rangle | v \in L_2(q),\ v^2 = 1,\ q = 3, 5(mod\ 8)\}.$$

По лемме 16 $C_G(a)$ содержит конечную подгруппу K, изоморфную группе из множества $K\{L_2(4),\ L_2(3^{2n+1})\}$. Тогда $\overline{C}$ обладает периодической частью $T(\overline{C}) \simeq L_2(Q)$, где Q – бесконечное локально конечное поле характеристи 3 (лемма 15). Следовательно, $T(C) \simeq \langle a \rangle \times L$, где $L \simeq L_2(Q)$.

Лемма доказана.

Лемма 18. *Группа G содержит бесконечную локально конечную простую подгруппу $R \simeq Re(Q)$, где Q — бесконечное локально конечное поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9, причем для любой инволюции $a \in R$, $T(C_G(a)) < R$.*

Доказательство. Рассмотрим группу $T(C)$ из леммы 17. Представим $T(C)$ в виде: $T(C) = \cup N_k$ – объединение бесконечной возрастающей цепочки подгрупп $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots$, где $N_k = \langle a \rangle \times L_k$, $L_k \simeq L_2(3^{2n_k+1})$. По условию теоремы, начиная с некоторого достаточно большого k, $N_k < R_k \simeq Re(3^{2n_k+1})$. Тогда $T(N_G(S)) < R_k$ и $\langle T(N_G(S)), N_k \rangle = R_k$ для любого k. Отсюда $R_1 < R_2 < \ldots < R_k < \ldots$ – возрастающая цепочка вложенных друг в друга групп, а $R = \cup R_k$ — бесконечная локально конечная группа, изоморфная $Re(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 3. Второе утверждение леммы вытекает из сопряженности инволюций в R и того факта, что по построению $T(C_G(a)) = C_R(a) < R$.

Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть R – подгруппа из формулировки леммы 18. Тогда G обладает периодической частью $T(G) = R$.*

Доказательство. Используя лемму 18, несложно убедиться, что группа G насыщена группами из множества $\{Re(3^{2n+1})\}$. По [15] G обладает периодическорй частью $T(G) \simeq Re(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q харктеристики 3.

Лемма доказана.

Утверждение леммы 19 противоечит тому, что G – контрпример. Следовательно, случай, когда S — элементарная абелева группа порядка 8, невозможен. Таким образом, S – элементарная абелева группа порядка более 8. Ввиду леммы 13 можно считать, что любая группа $H \in \mathfrak{M}(1)$ изоморфна некоторой группе из множества

$$\{J_1, L_2(2^n), Re(3^{2n+1}), L_2(q) | q > 3,\ q = 3, 5\ (mod\ 8)\}.$$

Возьмём инволюцию $x \in S$, и пусть $C = C_G(x)$.

Лемма 20. *Контрпримера G не существует.*

Доказательство. Предположим обратное. Возьмём инволюцию $x \in S$, и пусть $C = C_G(x)$. Обозначим через $P(C)$ подгруппу группы C, порожденную всеми элементами конечных порядков группы C. В $P(C)$

существует неединичный элемент простого нечётного порядка d. Действительно, пусть $P(C)$ не содержит элементов нечетного порядка. Следовательно, для любой конечной подгруппы

$$K \in \mathfrak{M}(1), K \simeq L_2(2^n).$$

В этом случае $T(G) \simeq L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2. Противоречие с выбором G. Далее, пользуясь индукцией, показываем, что $P(C)$ не может содержать неединичных элементов любого нечетного порядка. В этом случае, как показано выше, $T(G) \simeq L_2(Q)$ — элементарная абелева 2-группа. Противоречие с нашим предположением.

Лемма доказана.

Из леммы 20 вытекает, что группа G содержит неабелеву силовскую 2-подгруппу, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Лемма 21. *Любая силовская 2-подгруппа группы G является бесконечной группой.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть S – конечная силовская 2-подгруппа группы G. Тогда все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены с S. В силу условия насыщенности, леммы 13 и того, что все силовские 2-подгруппы группы G неабелевы, любая силовская 2-подгруппа либо изоморфна силовской 2-подгруппе группы $Sz(2^{2k+1})$, либо изоморфна силовской 2-подгрупне группы $U_3(2^n)$.

Отсюда вытекает, что S тривиально пересекается с любой другой силовской 2-подгруппой группы G. Следовательно, для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$, H изоморфна одной из групп множества

$$\{L_2(2^n), U_3(2^{2n}), Sz(2^{2n+1})\}.$$

Так как S — конечная группа, то порядки конечных групп из $\mathfrak{M}(1)$ ограничены в совокупности. Противоречие с утверждением леммы 14.

Лемма доказана.

Лемма 22. *В G существует силовская 2-подгруппа S, в которой есть конечная подгруппа K, являющаяся силовской 2-подгуппой некоторой конечной группы $L < G$, и L изоморфна одной из групп множества $\{U_3(2^n),\ Sz(2^{2n+1})\}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}(1)$ не содержит групп, изоморфных группам из множества $\{U_3(2^k),\ Sz(2^{2n+1}\}$, то любая силовская 2-подгруппа из G есть абелева, и теорема имеет место. Противоречие с тем, что G — контрпример. Следовательно, найдется такая группа $L \in \mathfrak{M}(1)$, что L изоморфна одной из групп множства $\{U_3(2^k),\ Sz(2^{2n+1}\}$. Пусть S_L – силовская 2-подгруппа группы L. Зафиксируем группу L и некоторую её силовскую 2-подгруппу S_L. Так как все силовские 2-подгруппы

группы G бесконечны (лемма 21), то $S_L < S$ — бесконечная силовская 2-подгруппа группы G.

Лемма доказана.

Зафиксируем группу S из леммы 22.

Лемма 23. *В группе G существует силовская 2-подгруппа $S_1 \neq S$ что, либо $K = S_1 \cap S$ содержит элемент порядка 4, либо K — элементарная абелева 2-группа, и $|K| \geq 8$.*

Доказательство. Пусть различные силовские 2-подгруппы группы G пересекаются тривиально. В этом случае все силовские 2-подгруппы группы G сопряжены. Поскольку силовская 2-подгруппа из $Sz(2^{2k+1})$ не может быть изоморфна никакой подгруппе силовской 2-подгруппе из $U_3(2^n)$, а силовская 2-подгруппа из $U_3(2^n)$ не может быть изоморфна никакой подгруппе силовской 2-подгруппы из $Sz(2^{2k+1})$ ни при каких k, n, то либо для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$, H изоморфна одной из групп множества $\{L_2(2^n), U_3(2^{2n})\}\}$, либо для любой группы $H \in \mathfrak{M}(1)$, H изоморфна некоторой группе из множества $\{L_2(2^n), Sz(2^{2n+1})\}$.

В первом случае по [10] G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной одной из групп множества $\{L_2(P), U_3(Q)\}$ для подходящих локально конечных полей P, Q четной характеристики. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Разберем второй случай. Возьмем в $\mathfrak{M}(1)$ группу $K \simeq L_2(2^n)$, а в ней элементы b порядка 3 и инволюцию x такие, что $b^x = b^{-1}$. Поскольку $\mathfrak{M}(1)$ содержит $K_0 \simeq Sz(2^{2n+1})$, то существует элемент $a \in G$ такой, что $a^2 = x$. Так как G — группа Шункова, то $\langle b,\ a\rangle$ — конечная группа. По условию насыщенности $\langle b,\ a\rangle < K_1$, где K_1 изоморфна одной из групп множества $\{L_2(2^n), Sz(2^{2n+1})\}$. В силу того, что K_1 содержит элемент a порядка 4, получаем, что $K_1 \simeq Sz(2^{2n+1})$. С другой стороны, K_1 содержит элемент b порядка 3, а $Sz(2^{2n+1})$ не содержит элементов порядка 3, следовательно, $K_1 \not\simeq Sz(2^{2n+1})$. Противоречие.

Итак, можно считать. что для некоторой силовской 2-подгруппы $S_1 \neq S$, $K = S \cap S_1 \neq 1$. Пусть K — элементарная абелева группа порядка 2 или 4. Обозначим: i — инволюция из K; b — элемент порядка 4 из S; $l = b^2$; x — элемент группы G, для которого $i = l^x$. Рассмотрим пересечение $S^x \cap S_1 = N$, которое содержит i. Допустим, что снова это пересечение есть элементарная абелева 2-подгруппа порядка ≤ 4 (в противном случае, лемма верна). Если $a = b^x$, то $a \in S^x$ и $a^2 = i$. Пусть j — любая инволюция из $S_1 \setminus S^x$. Тогда j централизует N. Рассмотрим теперь группу $T = \langle N, a, j\rangle$. Поскольку фактор-группа T/N порождается двумя инволюциями aN и jN, то T – конечная группа. По условию теоремы $T < L_1$, где L_1 изоморфна одной из групп множества $\{Sz(2^{2m+1}),\ U_3(2^s)\}$. Так как различные силовские 2-подгруппы из L_1 пересекаются тривиально, то 2-подгруппы $\langle N, a\rangle$ и $\langle N, j\rangle$ содержатся в одной силовской 2-подгруппе из L. В частности, T является

2-подгруппой. Если S_2 — силовская 2-подгруппа группы G, содержащая T, то $S_2 \neq S^x (j \in T \setminus S^x)$. При этом пересечение $S_2 \cap S^x$ содержит элемент a порядка 4.

Лемма доказана.

Зафиксируем группы S, S_1, K из утверждения леммы 23. Пусть $x \in S$, $y \in S_1$. Если хотя бы один из этих элементов есть инволюция, то $xy = yx$. Пусть $|x| = |y| = 4$. Положим $D = \langle x, y \rangle$. Так как x^2, y^2 содержатся в $Z(D)$, то D — конечная группа, а её 2-подгруппы $\langle x, y^2 \rangle$ и $\langle x^2, y \rangle$ имеют нетривиальное пересечение. Но тогда D есть 2-группа, xy является 2-элементом и $xy = yxz$, где $|z| \leq 2$. В этом случае SS_1 — 2-группа. Так как S, S_1 — силовские 2-подгруппы группы G, то $S = S_1$. Противоречие с тем, что $S \neq S_1$.

Теорема доказана.

4. Заключение.

После завершения классификации конечных простых групп был выполнен важный шаг в классификации периодических групп. А именно, Кегелем, Бляевым, Боровиком, Томасом, Хартли и Шютом были классифицированы локально конечные группы, обладающие локальными покрытиями, состоящими из простых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности. Это явилось основанием для формулировки в 2004 году вопроса 14.101 в Коуровскую тетрадь: Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является группой лиева типа конечного ранга? Известно, что среди бесконечных групп с условиями конечности важное место занимают группы Шункова. Класс групп Шункова отличен от класса периодических групп. Поэтому уместно рассмотреть редакцию вопроса 14.101 для групп Шункова: Верно ли, что группа Шункова, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа? Очевидно, что помимо групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа, интерес представляет случай, когда насыщающие множество может содержать другие классы конечных простых групп. В данной работе установлено строение групп Шункова, насыщенных конечными простыми группами 2-ранга 2 и конечными простыми группами с заданным строением 2-подгрупп. Таким образом, сделан шаг в изучении групп, насыщенных произвольными конечными простыми группами.

Список литературы

1. Дицман А. П. О центре p-групп // Труды семинара по теории групп. М., 1938. С. 30–34.

2. Каргаполов М. И. Основы теории групп. М. : Наука, 1982.
3. Группы с условием насыщенности / А. А. Кузнецов, Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватулина, А. А. Кузнецов. Красноярск : Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2010.
4. Лыткина Д. В., Шлепкин А. А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами L_3, U_3 // Алгебра и логика. 2016. Т. 55. С. 441–448.
5. Лыткина Д.В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. С. 317–321. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0031-y
6. Созутов А. И., Лыткина Д. И., Шлепкин А. А. О периодических группах 2-ранга 2, насыщенных простыми группами // Мальцевские чтения, 20-24 нояб. Новосибирск, 2017. С. 78.
7. Остыловский А. Н., Шунков В. П. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности // Исследования по теории групп. Красноярск, 1975. С. 32–48.
8. Сенашов В. И., Шунков В. П. Группы с условиями конечности. Новосибирск : Изд. СО РАН, 2001.
9. Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. С. 430–438. https://doi.org/10.1134/S0037446612020164
10. Пронина Е. А., Шлепкин А. А. Группы Шункова, насыщенные $L_2(p^n), U_3(2^n)$ // Вестн. СибГАУ. 2015. Т. 57. С. 111-107.
11. Шлепкин А. К. О сопряженно бипримитивно конечных группах с условием примарной минимальности // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. С. 232–231.
12. Филиппов К. А. О периодической части группы Шункова, насыщенной $L_2(p^n)$. // Вестн. СибГАУ. 2012. С.611–617.
13. Шлепкин А. А. О периодической группе Шункова, насыщенной конечными простыми группами лиева типа ранга 1 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т. 16. С. 102–116.
14. Шлепкин А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья международная конференция по алгебре, 23-28 авг. Красноярск, 1993. С. 369.
15. Шлепкин А. К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1999.
16. Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroup // Trans. AMS. 1970. Vol. 151. P. 1–261.
17. Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert //Scripta Math. 1973. Vol. 29, № 3–4. P. 191–214.
18. Brauer R. On structure of groups of finite order // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 1954. P. 209–217.
19. John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal. The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups. Cambridge University Press, 2013.
20. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford : Clarendon Press, 1985.

Шлепкин Алексей Анатольевич, кандидат физико-математических наук, Сибирский федеральный университет, Российская Федерация, 660041, Красноярск, Свободный, 79, (e-mail: `shlyopkin@mail.ru`)

Поступила в редакцию 01.03.2018

On Shunkov Groups Saturated with Finite Groups

A. A. Shlepkin

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation

Abstract. The structure of the group consisting of elements of finite order depends to a large extent on the structure of the finite subgroups of the group under consideration. One of the effective conditions for investigating an infinite group containing elements of finite order is the condition for the group to be saturated with a certain set of groups. The group G is saturated with groups from the set $\mathfrak{X}$ if any finite subgroup of G is contained in the subgroup of G, isomorphic to some group in $\mathfrak{X}$. The group G is called the group Shunkov, if for any finite subgroup H of G in the factor group $N_G(H)/H$ any two conjugate elements of prime order generate a finite group. If all elements of finite orders in G are contained in a periodic subgroup of G, then it is called the periodic part of G and is denoted by $T(G)$. It is proved that the Shunkov group of 2 -range 2 saturated with finite simple nonabelian groups has a periodic part $T(G)$ isomorphic to one of the groups of the set $\{L_2(Q),\ A_7,\ L_3(P),\ U_3(R),\ M_{11},\ U_3(4)\}$, where Q, P, R is a local finite fields. It is proved that if the Shunkov group G is saturated with finite simple non-Abelian groups, and in any of its finite 2 -subgroup K all involutions from K lie in the center of K, then G has a periodic part $T(G)$ isomorphic to one of the groups of the set $\{J_1, L_2(Q), Re(P), U_3(R), Sz(F)\}$, where Q, P, R, F are locally finite fields.

Keywords: the group saturated with the set of groups, Shunkov group.

References

1. Dicman A.P. O centre p-grupp. [On the center of p-groups] *Trudy seminara po teorii grupp* [Proceedings of the Seminar on Group Theory], Moscow, 1938, pp. 30-34. (in Russian)
2. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Osnovy teorii grupp* [Foundations of group theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. (in Russian).
3. Kuznecov A.A., Lytkina D.V., Tuhvatulina L.R., Filippov K.A. *Gruppy s usloviem nasyshhennosti* [Groups with saturation conditions]. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Agricultural Institute Publ., 2010.
4. Lytkina D.V., Shlepkin A.A. On periodic groups saturated by finite simple groups L_3, U_3. *Algebra and Logic*, 2016, vol. 55, no. 4, pp. 441-448. (in Russian). https://doi.org/10.17377/alglog.2016.55.404
5. Lytkina D.V., Tuhvatullina L.R., Filippov K.A. The periodic groups saturated by finitely many finite simple groups. *Siberian mathematical journal*, 2008, vol. 49, no. 2, pp. 317-321. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0031-y
6. Sozutov A.I., Lytkina D.I., Shlepkin A.A. *O periodicheskih gruppah 2-rangga 2, nasyshhennyh prostymi gruppami* [On periodic groups of 2-rank 2 saturated with simple groups]. *Mal'cevskie chtenija. Tezisy dokladov,* [Collected Works of International Conference Maltsev meeting], 2017, pp. 78. (in Russian)
7. Ostylovskij A.N. *O lokal'noj konechnosti odnogo klassa grupp s usloviem minimal'nosti* [On the local finiteness of a class of groups with the minimality condition]. *Issledovanija po teorii grupp,* [Studies on the theory of groups], Krasnoyarsk, 1975, pp. 32-48. (in Russian)

8. Senashov V.I., Shunkov V.P. *Gruppy s uslovijami konechnosti* [Groups with finiteness conditions]. Novosibirsk, SB RAS Publishing, 2001. (in Russian)
9. Filippov K.A. On periodic groups saturated by finite simple groups. *Siberian mathematical journal*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 345–351. https://doi.org/10.1134/S0037446612020164
10. Pronina E.A., Shlepkin A.A. Gruppy Shunkova, nasyshhennye $L_2(p^n), U_3(2^n)$. [Shunkov groups, saturated with $L_2(p^n), U_3(2^n)$.] *Vestnik SibGAU,* 2015, vol. 57, no. 3, pp. 111-107. (in Russian)
11. Shlepkin A.K. O soprjazhenno biprimitivno konechnyh gruppah s usloviem primarnoj minimal'nosti [On conjugate bi-finite finite groups with a primary minimum condition]. *Algebra i logika,* [Algebra and logic], 1983, vol. 22, no. 2. pp. 232-231. (in Russian)
12. Filippov K.A. *O periodicheskoj chasti gruppy Shunkova, nasyshhennoj* $L_2(p^n)$ [On the periodic part of the Shunkov group saturated with $L_2(p^n)$] *Vestnik SibGAU,* [Bulletin of the Siberian State Aerospace University], 2012, pp. 611-617.(in Russian)
13. Shlepkin A.A. About Periodic Shunkov Group Saturated with Finite Simple Groups of Lie Type Rank 1. *Izv. Irkutsk. gos. univer., ser. Matematika* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2016, vol. 16, pp. 102-116. (in Russian).
14. Shlepkin A.K. Soprjazhenno biprimitivno konechnye gruppy, soderzhashhie konechnye nerazreshimye podgruppy [Conjugately biprimitively finite groups containing finite nonabelian subgroups] *Tret'ja mezhdunar. konf. po algebre* [Third International Conference on Algebra. Book of abstracts], Krasnoyarsk, 1993, p. 369. (in Russian)
15. Shlepkin A.K. *Gruppy Shunkova s dopolnitel'nymi ogranichenijami.* Doktorskaja dissertacija [Shunkov groups with additional restrictions. Doctoral dissertation], Krasnoyarsk, 1999. (in Russian)
16. Alperin J.L., Brauer R., Gorenstein D. Finite groups wish quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroup. *Trans. AMS*, 1970, vol. 151, pp. 1-261.
17. Alperin J.L., Brauer R., Gorenstein D. Finite simple groups of 2-rang two. Collection of articles dedicated to the memori of Abraham Adrian Albert. *Scripta Math.*, 1973, vol. 29, no. 3-4, pp. 191-214.
18. Brauer R. On structure of groups of finite order. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1954, pp. 209-217.
19. John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M. Ronty-Dougal. *The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups.* Cambridge university press, 2013.
20. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. *Atlas of finite groups.* Oxford, Clarendon Press, 1985.

Shlepkin Alexey Anatolievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Siberian Federal University, 79, Svobodny, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, (e-mail: `shlyopkin@mail.ru`)

Received 01.03.2018