Серия «Математика»
2018. Т. 24. С. 37—50

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.95
MSC 35K60, 35K05, 80A20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.24.37

Об аналитических решениях задачи о движении теплового фронта для нелинейного уравнения теплопроводности с источником*

А. Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация

П. А. Кузнецов
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация

Аннотация. В настоящей работе авторы продолжают исследования специальных краевых задач для нелинейного параболического уравнения теплопроводности (в англоязычной литературе — «the porous medium equation»). В случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры указанное уравнение используется при описании процессов лучистой теплопроводности, фильтрации политропного газа в пористом грунте, миграции биологических популяций и т. д. Кроме того, уравнение обладает специфическими нелинейными свойствами, интересными как с физической, так и с математической точек зрения. Известно, например, что скорость распространения возмущений, им описываемых, может быть конечной. Один из содержательных классов решений уравнения составляют тепловые волны (волны фильтрации). Геометрически такие решения представляют собой две интегральные поверхности, непрерывно состыкованные вдоль некоторой кривой, называемой фронтом тепловой волны. В предлагаемой статье рассматривается краевая задача, имеющая такого рода решения. Исследование проводится в классе аналитических функций с помощью метода характеристических рядов, предложенного Р. Курантом и адаптированного для нелинейных параболических уравнений в научной школе А. Ф. Сидорова. Ранее авторы уже исследовали похожие задачи в случае замкнутого фронта волны при отсутствии источника. Для каждой из рассмотренных задач были построены решения в виде характеристических рядов, а также доказаны соответствующие теоремы существования, гарантирующие схо-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00608 и Комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-5.

димость. В настоящей работе исследуется плоскосимметричная задача с заданным фронтом при наличии источника. Доказана теорема существования аналитического решения (возмущенной составляющей тепловой волны), указанное решение построено в виде степенного ряда. Рассмотрен содержательный частный случай, в котором источник задается степенной функцией (подобный способ задания часто встречается в приложениях). Показано, что в этом случае исходную задачу можно свести к задаче Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности с источником, the porous medium equation, тепловая волна, характеристический ряд, сходимость, теорема существования.

1. Введение

В настоящей работе авторы продолжают исследования специальных краевых задач для нелинейного параболического уравнения теплопроводности

$$T_t = \operatorname{div}(K(T)\nabla T) + Q(T). \tag{1.1}$$

Здесь $T(t,\overline{x})$ — температура среды в точке $\overline{x} \in \mathbb{R}^i$, $i = 1, 2, 3$ в момент времени t, $Q(T)$ — функция источника, такая, что $Q(0) = 0$. Коэффициент теплопроводности $K(T)$ чаще всего полагают степенной функцией температуры, $K(T) = \lambda T^\sigma$, где λ, σ — положительные константы. При таком допущении уравнение (1.1) эффективно используется при описании процессов лучистой теплопроводности [1; 12], фильтрации политропного газа в пористом грунте [13; 17], миграции биологических популяций [16] и т. д.

На сегодняшний день существует огромное количество публикаций, посвященных разностороннему исследованию уравнения (1.1). Объясняется это как его многочисленными приложениями, так и нетривиальными нелинейными свойствами, интересными с математической точки зрения. Известно, например, что скорость распространения возмущений, описываемых (1.1), может быть конечной [1; 12]. Не стремясь дать полный обзор, упомянем работы, посвященные исследованию обобщенных решений [14], описанию классов точных решений [11; 12], построению приближенных решений [9; 15].

2. Тепловая волна

Один из содержательных классов решений уравнения (1.1) составляют тепловые волны (волны фильтрации). Геометрически такие решения представляют собой две интегральные поверхности $T \equiv 0$ и $T \geq 0$, непрерывно состыкованные вдоль некоторой кривой, называемой фронтом волны [6; 13]. Задачи, исследуемые авторами, предполагают наличие такого рода решений и в наиболее общей постановке имеют вид

$$u_{t_1} = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 + F(u), \tag{2.1}$$

$$u(t_1, \overline{x})|_\Gamma = f(t_1, \overline{x}). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) получено из (1.1) с помощью замен $u = T^\sigma$, $t_1 = \lambda t$ (такой переход стандартен, см., например, [9; 13]). Функция $F(u)$ определяется по формуле $F(u) = \sigma u^{1-\frac{1}{\sigma}} Q(u^{\frac{1}{\sigma}})/\lambda$. Краевой режим $f = f(t_1, \overline{x})$ задан на достаточно гладкой поверхности $\Gamma = \Gamma(t_1, \overline{x})$. Далее для удобства записи будем писать t вместо t_1, опуская нижний индекс.

Наиболее близкими по постановке и методам исследования можно назвать задачи, рассмотренные в научной школе А. Ф. Сидорова, где успешно развивается аналитический подход к исследованию задач вида (2.1), (2.2), основанный на методе характеристических рядов и его обобщениях [13] (см., в частности, [15]). Указанный метод первоначально был предложен Р. Курантом [10] для линейных гиперболических систем и адаптирован для нелинейных параболических уравнений А. Ф. Сидоровым [13] и его учениками. В статье авторов [3] рассмотрен случай цилиндрической и сферической симметрии при $F \equiv 0$. Существенно неодномерные задачи (2.1), (2.2) без источника исследуется в работах [2; 4]. Для указанных задач построены решения в виде характеристических рядов, а также доказаны соответствующие теоремы существования, гарантирующие сходимость. В работах [4; 7] аналитические исследования дополнены численными, выполненными методом граничных элементов.

В настоящей работе исследуется плоскосимметричная задача с заданным фронтом (при $f \equiv 0$) при наличии источника. В разделе 3 доказана теорема существования аналитического решения (возмущенной составляющей тепловой волны), в разделе 4 указанное решение построено в виде степенного ряда. В разделе 5 рассмотрен один содержательный частный случай, в котором источник задается степенной функцией. При этом показано, что исходную задачу можно свести к задаче Коши для нелинейного ОДУ 2-го порядка. Отметим также, что степенной способ задания функции источника достаточно часто рассматривается в прикладных задачах [8; 12]. Полученные представления решений конструктивны и могут быть использованы для верификации численных расчетов [4; 5].

3. Основная теорема

Рассмотрим плоскосимметричную задачу (2.1), (2.2) с заданным тепловым фронтом (т. е. при $f \equiv 0$), в которой $u = u(t, \rho)$, где ρ —

расстояние до некоторой заданной плоскости. В этом случае (2.1), (2.2) имеет следующий вид:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + F(u), \tag{3.1}$$

$$u(t,\rho)|_{\rho=a(t)} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь $\rho = a(t)$ — фронт тепловой волны, $a(t) > 0$ на всей области определения, причем $a'(0) \neq 0$. Функция источника $F(u)$ определена при $u \geq 0$, также предполагается, что $F(0) = 0$.

Для задачи (3.1), (3.2) справедлива следующая

Теорема. *Пусть $F(u)$ и $a(t)$ — аналитические функции в окрестности $u = 0$ и $t = 0$ соответственно. Тогда задача* (3.1), (3.2) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности $t = 0$, $\rho = a(0)$.*

Доказательство. Доказательство проводится методом мажорант и опирается на теорему Коши – Ковалевской. Перед построением мажорантной задачи проведем две невырожденные замены. Вначале, чтобы упростить краевые условия, введем новую переменную $r = \rho - a(t)$. Несложно показать, что якобиан такой замены $J = 1$.

Пересчитав производные, получим задачу

$$u_t - a'u_r = uu_{rr} + \frac{1}{\sigma}u_r^2 + F(u), \tag{3.3}$$

$$u(t,r)|_{r=0} = 0. \tag{3.4}$$

Представим теперь неизвестную функцию и функцию источника в виде неполных разложений в ряд Тейлора по степеням r и u соответственно

$$u(t,r) = u_0(t) + ru_1(t) + r^2V(t,r), \tag{3.5}$$
$$F(u) = uF'(0) + u^2F_1(u).$$

Из краевого условия (3.4) следует, что $u_0(t) \equiv 0$. Положив в (3.3) $r = 0$, получим уравнение

$$-a'u_1 = \frac{1}{\sigma}u_1^2,$$

в котором $u_1(t) = u_r(t,0)$. Корень $u_1 = 0$, как несложно убедиться, приводит к тривиальному решению задачи (3.3), (3.4), поэтому далее будем рассматривать ненулевой корень

$$u_1 = -\sigma a'(t). \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) равенство (3.5) примет вид

$$u(t,r) = -r\sigma a' + r^2V(t,r). \tag{3.7}$$

Так как для (3.7) выполняется краевое условие (3.4), то после замены задача (3.3), (3.4) сведется к одному уравнению

$$-\sigma a''r + r^2V_t - a'(-\sigma a' + 2rV + r^2V_r) = (-\sigma a'r + r^2V)(2V + 4rV_r + r^2V_{rr}) +$$
$$+\frac{1}{\sigma}(-\sigma a' + 2rV + r^2V_r)^2 + (-\sigma a'r + r^2V)F'(0) +$$
$$+(-\sigma a'r + r^2V)^2F_1(-\sigma a'r + r^2V). \qquad (3.8)$$

После приведения подобных и деления на ra' уравнение (3.8) можно привести к виду

$$2(1+\sigma)V + (1+4\sigma)rV_r + \sigma r^2V_{rr} = g_0(t,r) + rg_1 + r^2g_2 + r^3g_3, \qquad (3.9)$$

в котором g_0, g_1, g_2, g_3 — аналитические (в некоторой окрестности начала координат) функции своих переменных, такие, что

$$g_1 = g_1(t,V,V_t), \quad g_2 = g_2(t,V,V_t,V_r), \quad g_3 = g_3(t,r,V,V_r,V_{rr}).$$

Мажорантную задачу будем строить для уравнения (3.9), эквивалентного (3.3), (3.4). Прежде всего построим решение (3.9) в виде ряда

$$V(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\frac{r^n}{n!}, \quad V_n(t) = \frac{\partial^n V}{\partial r^n}\Big|_{r=0}. \qquad (3.10)$$

Коэффициенты $V_n(t)$ определим n-кратным дифференцированием уравнения по r при $r=0$. Вводя обозначения

$$g_{i,n} = \frac{\partial^n g_i}{\partial r^n}\Big|_{r=0}, \quad i = 0,1,2,3,$$

имеем

$$V_0 = \frac{g_{0,0}}{2(1+\sigma)}, \quad V_1 = \frac{g_{0,1}+g_{1,0}}{3(1+2\sigma)}, \quad V_2 = \frac{g_{0,2}+2g_{1,1}+2g_{2,0}}{4(1+3\sigma)},$$

$$V_3 = \frac{g_{0,3}+3g_{1,2}+6g_{2,1}+6g_{3,0}}{5(1+4\sigma)},$$
$$\ldots$$
$$V_n = \frac{g_{0,n}+ng_{1,n-1}+n(n-1)g_{2,n-2}+n(n-1)(n-2)g_{3,n-3}}{2(1+\sigma)+(1+4\sigma)n+\sigma n(n-1)}.$$

Отметим сразу, что все коэффициенты определяются однозначно, что, в свою очередь, гарантирует единственность решения.

В силу аналитичности входящих в уравнение функций, а также коэффициентов ряда (3.10), для них можно подобрать мажоранты

$$V_0(t) \ll W_0(t), \quad V_1(t) \ll W_1(t),$$

$$g_1(t,V,V_t) \ll h_1(t,W,W_t), \quad g_2(t,V,V_t,V_r) \ll h_2(t,W,W_t,W_r),$$
$$g_3(t,r,V,V_r,V_{rr}) \ll h_3(t,r,W,W_r,W_{rr}).$$

Покажем теперь, что при выполнении указанных оценок задача

$$W_{rr} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{\partial h_1}{\partial r} + h_2 + r h_3\right), \tag{3.11}$$

$$W(t,r)|_{r=0} = W_0(t), \tag{3.12}$$

$$W_r(t,r)|_{r=0} = W_1(t) \tag{3.13}$$

является мажорантной для (3.9).

Построим решение в виде ряда

$$W(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t)\frac{r^n}{n!}, \quad W_n(t) = \frac{\partial^n W}{\partial r^n}\Big|_{r=0},$$

коэффициенты которого определим $(n-2)$-кратным дифференцированием уравнения (3.11) по r при $r=0$. Получим равенства

$$W_2 = \frac{1}{\sigma}(h_{0,2} + h_{1,1} + h_{2,0}), \quad W_3 = \frac{1}{\sigma}(h_{0,3} + h_{1,2} + h_{2,1} + h_{3,0}),$$
$$\dots$$
$$W_n = \frac{1}{\sigma}[h_{0,n} + h_{1,n-1} + h_{2,n-2} + (n-2)h_{3,n-3}],$$
$$\dots$$

в которых использованы обозначения

$$h_{i,n} = \frac{\partial^n h_i}{\partial r^n}\Big|_{r=0}, \quad i = 0,1,2,3.$$

Заметим, что при $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{2(1+\sigma) + (1+4\sigma)n + \sigma n(n-1)} < \frac{n}{2(1+\sigma) + (1+4\sigma)n + \sigma n(n-1)} \leq$$
$$\leq \frac{n(n-1)}{2(1+\sigma) + (1+4\sigma)n + \sigma n(n-1)} < \frac{n(n-1)}{\sigma n(n-1)} = \frac{1}{\sigma}.$$

Это означает, что $V_n(t) \ll W_n(t)$ при $n = 0,1,2,\dots$, и решение задачи мажорирует решение уравнения (3.9).

В заключение скажем, что задачу (3.11), (3.12), (3.13) несложно свести к задаче типа Коши-Ковалевской. Для этого продифференцируем (3.11) по r, разрешим его относительно W_{rrr} и добавим третье краевое условие. Получившаяся задача

$$W_{rrr} = \frac{1}{\sigma - r h_{3W_{rr}}}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial r^2} + \frac{\partial h_2}{\partial r} + \right.$$

$$+h_3 + \frac{\partial h_3}{\partial r} + \frac{\partial h_3}{\partial W} W_r + \frac{\partial h_3}{\partial W_r} W_{rr} \Big),$$

$$W(t,r)|_{r=0} = W_0(t), \quad W_r(t,r)|_{r=0} = W_1(t), \quad W_{rr}(t,r)|_{r=0} = W_2(t)$$

имеет аналитическое мажорирующее нуль решение, что следует из теоремы Коши-Ковалевской. Теорема доказана. □

4. Построение решения

Для верификации численных расчетов, а также с целью анализа важных для приложений частных случаев полезно построить решение задачи (3.3), (3.4) в виде характеристического ряда

$$u(t,r) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \frac{[\rho - a(t)]^n}{n!}, \quad u_n(t) = \frac{\partial^n u}{\partial r^n}\Big|_{r=0}, \tag{4.1}$$

коэффициенты которого определяются рекуррентно с использованием принципа математической индукции.

Напомним, что ранее в разделе 3 были найдены коэффициенты $u_0(t) \equiv 0$ и $u_1(t) = -\sigma a'$. Коэффициент u_2 можно найти, продифференцировав уравнение (3.3) по r и положив $r = 0$. Получим формулу

$$u_2 = \frac{\sigma a'' - \sigma a' F'(0)}{a'(1+\sigma)}.$$

Допустим теперь, что нами найдены коэффициенты u_i, $i = \overline{0,n}$. Продифференцировав уравнение (3.3) n раз по r и положив $r = 0$, мы получим равенство

$$u_n' - a' u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^{n} C_n^k u_{k+1} u_{n-k+1} + F_n,$$

в котором

$$F_n = \frac{\partial^n F(u)}{\partial r^n}\Big|_{r=0}.$$

Помня, что $u_0 \equiv 0$, выразим коэффициент

$$u_{n+1} = \frac{1}{a'(1+n\sigma)} \Big(-u_n' + \sum_{k=2}^{n} C_n^k u_k u_{n-k+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k u_{k+1} u_{n-k+1} + F_n \Big).$$

Таким образом, решение задачи (3.3), (3.4) может быть записано в виде ряда (4.1) с рекуррентно определяемыми коэффициентами. В силу ранее доказанной теоремы ряд (4.1) сходится в некоторой окрестности $t = 0$, $r = 0$.

5. Степенная функция источника

В этом разделе рассматривается один интересный частный случай исходной задачи — случай степенного источника. Как уже говорилось, степенное задание функции источника в уравнении (1.1) нередко используется при рассмотрении прикладных задач. Кроме того, оказалось, что при степенном источнике исходную задачу (3.1), (3.2) можно свести к задаче Коши для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 2-го порядка, что позволяет существенно упростить процедуру построения решения.

Рассмотрим задачу (3.1), (3.2) в виде

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2 + \alpha u^\beta, \tag{5.1}$$

$$u(t,\rho)|_{\rho=a(t)} = 0. \tag{5.2}$$

Здесь

$$F(u) = \alpha u^\beta, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \beta \in \mathbb{N}\backslash\{2\}.$$

Сразу же отметим, что все условия доказанной в разделе 3 теоремы выполняются, и у задачи (5.1), (5.2) существует единственное аналитическое решение.

Утверждение 1. *Задача* (5.1), (5.2) *допускает редукцию к задаче Коши для нелинейного ОДУ 2-го порядка*

1) при $\beta = 1$, если $a(t) = c_2 e^{c_1 t}$;

2) при $\beta \geq 3$, если $a(t) = (c_3 t + c_4)^{(\beta-2)/(2\beta-2)}$.

Действительные константы c_i, $i = \overline{1,4}$ выбраны так, чтобы функции $a(t)$ удовлетворяли условиям теоремы.

Доказательство. В задаче (5.1), (5.2) введем новую переменную z по формуле

$$z = \frac{\rho - a(t)}{a(t)} = \frac{\rho}{a(t)} - 1.$$

Несложно показать, что якобиан такой замены $J = 1/a(t) > 0$.

Задача примет вид

$$u_t - \frac{a'(z+1)}{a}u_z = \frac{1}{a^2}uu_{zz} + \frac{1}{\sigma a^2}u_z^2 + \alpha u^\beta, \tag{5.3}$$

$$u(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{5.4}$$

В задаче (5.3), (5.4) положим

$$u = a^{\gamma} v,$$

где $v(t,r)$ — новая неизвестная функция, а $\gamma \neq 0$ — некоторый параметр, который будет определен в дальнейшем. Задача примет вид

$$\gamma a^{\gamma-1} a' v + a^{\gamma} v_t - (z+1) a^{\gamma-1} a' v_z =$$

$$= a^{2(\gamma-1)} v v_{zz} + \frac{1}{\sigma} a^{2(\gamma-1)} v_z^2 + \alpha a^{\gamma\beta} v^{\beta}, \tag{5.5}$$

$$v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{5.6}$$

Для того, чтобы свести задачу (5.5), (5.6) к задаче Коши для ОДУ, достаточно положить $\gamma = 2/(2-\beta)$, а функцию $a(t)$ выбрать следующим образом:

$$a(t) = \begin{cases} c_2 e^{c_1 t}, & \text{если } \beta = 1; \\ (c_3 t + c_4)^{(\beta-2)/(2\beta-2)}, & \text{если } \beta \geq 3. \end{cases} \tag{5.7}$$

В самом деле, если положить $\gamma = 2/(2-\beta)$, то $a^{\gamma\beta} = a^{2(\gamma-1)} = a^{2\beta/(2-\beta)}$. Таким образом, в правой части (5.5) можно вынести общий множитель $a^{2\beta/(2-\beta)}$. Поделив на него все уравнение, получим равенство

$$\frac{2}{2-\beta} a^{\frac{\beta}{\beta-2}} a' v + a^{\frac{2-2\beta}{2-\beta}} v_t - (z+1) a^{\frac{\beta}{\beta-2}} a' v_z = v v_{zz} + \frac{1}{\sigma} v_z^2 + \alpha v^{\beta}.$$

Так как функции (5.7) суть решения уравнения

$$a^{\frac{\beta}{\beta-2}} a' = c, \quad c \neq 0 - \mathrm{const},$$

то задача (5.5), (5.6) запишется в виде

$$\frac{2c}{2-\beta} v + a^{\frac{2-2\beta}{2-\beta}} v_t - (z+1) c v_z = v v_{zz} + \frac{1}{\sigma} v_z^2 + \alpha v^{\beta}, \tag{5.8}$$

$$v(t,z)|_{z=0} = 0. \tag{5.9}$$

Отметим, что в (5.8) множитель, зависящий от a, оказался лишь при v_t в левой части.

Построив решение задачи (5.8), (5.9) в виде ряда

$$v(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \frac{z^n}{n!}, \quad v_n(t) = \frac{\partial^n v}{\partial z^n}\Big|_{z=0}, \tag{5.10}$$

несложно показать, что $v_n(t) \equiv v_n = \mathrm{const}$.

Нахождение коэффициентов ряда (5.10) проводится согласно вышеописанной процедуре. Из равенства (5.9) следует, что $v_0 \equiv 0$. Положив в (5.8) $z = 0$, и рассуждая аналогично разделу 3, найдем коэффициент

$$v_1 = -c\sigma. \tag{5.11}$$

Остальные коэффициенты определяются по формулам

$$v_2 = \frac{\sigma}{(1+\sigma)}\left(\frac{c\beta}{2-\beta} - G'(0)\right),$$

$$\dots$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{c(1+n\sigma)}\left(cnv_n - \frac{2c}{2-\beta}v_n - a^{\frac{2-2\beta}{2-\beta}}v_n' + \sum_{k=2}^{n} C_n^k v_k v_{n-k+2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k v_{k+1} v_{n-k+1} + G_n\right), \quad n \geq 2. \tag{5.12}$$

Для удобства здесь использованы обозначения

$$G(v) = \alpha v^{\beta}, \quad G_n = \left.\frac{\partial^n G(v)}{\partial z^n}\right|_{z=0}.$$

Отметим, что в формуле (5.12) слагаемое

$$-a^{\frac{2-2\beta}{2-\beta}}v_n' \equiv 0.$$

В самом деле, v_2 — константа, и $v_2' = 0$. Тогда из (5.12) при $n = 2$ следует, что v_3 также будет константой. Рассуждая аналогично, придем к выводу, что все коэффициенты ряда (5.10) — константы, определяющиеся по формулам

$$v_0 = 0, \quad v_1 = -c\sigma, \quad v_2 = \frac{\sigma}{(1+\sigma)}\left(\frac{c\beta}{2-\beta} - G'(0)\right),$$

$$\dots$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{c(1+n\sigma)}\left(cnv_n - \frac{2c}{2-\beta}v_n + \sum_{k=2}^{n} C_n^k v_k v_{n-k+2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sigma}\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k v_{k+1} v_{n-k+1} + G_n\right), \quad n \geq 2.$$

Таким образом, задача (5.8), (5.9) суть задача Коши для нелинейного ОДУ 2-го порядка, которую с учетом (5.11) можно записать в виде

$$vv'' + \frac{1}{\sigma}v'^{\,2} + (z+1)cv' - \frac{2c}{2-\beta}v + \alpha v^{\beta} = 0, \; v(0) = 0, \; v'(0) = -c\sigma.$$

Утверждение доказано. □

6. Заключение

В настоящей работе исследована задача с известным тепловым фронтом для нелинейного уравнения теплопроводности с источником в плоскосимметричном случае. Доказана новая теорема существования и единственности локально-аналитического решения — возмущенной составляющей тепловой волны ($u \geq 0$). Решение построено в виде характеристического ряда с рекуррентно определяемыми коэффициентами.

Особо рассмотрен случай степенного источника, показано, что при выборе экспоненциального и степенного законов движения фронта волны, задачу можно свести к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка. Для указанной задачи также построено решение в виде степенного ряда, выписаны рекуррентные формулы коэффициентов. Полученные формулы могут быть использованы для проверки численных расчетов, как это было сделано ранее для задач без источника [4; 7].

Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны как с усложнением краевых условий, так и с увеличением размерности рассматриваемых задач.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М. : Физматлит, 1966. 687 с.
2. Казаков А. Л., Кузнецов П. А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.
3. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Лемперт А. А. О построении тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности в симметричном случае // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2015. Т. 11. С. 39–53.
4. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
5. Казаков А. Л., Лемперт А. А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
6. Казаков А. Л., Лемперт А. А. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54,№ 2. С. 97–105.
7. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 2. С. 2–17.
8. Ковалев В. А., Куркина Е. С., Куретова Е. Д. К самофокусировке тепла во время солнечных вспышек // Физика плазмы. 2017. Т. 43, № 5. С. 485–490. https://doi.org/10.7868/S0367292117050067

9. Кудряшов Н. А., Чмыхов М. А. Приближенные решения одномерных задач нелинейной теплопроводности при заданном потоке // Журн. вычисл. математики и мат. Физики. 2007. Т. 47, № 1. С. 110–120.
10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
11. Рудых Г. А., Семенов Э. И. Построение точных решений одномерного уравнения нелинейной диффузии методом линейных инвариантных подпространств // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 4. С. 69–84.
12. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М. : Наука, 1987. 480 с.
13. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М. : Физматлит, 2001. 576 с.
14. Dahlberg B. E., Kenig C. E. Weak Solutions of the Porous Medium Equation in a Cylinder // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. Vol. 336, N 2. P. 701–709. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1085940-6
15. Filimonov M. Yu., Korzunin L. G., Sidorov A. F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, N 2. P. 101—125. https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.2.101
16. Murray J. Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 17. New York : Springer, 2002. 551 p.
17. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford : Clarendon Press, 2007. 648 p.

Казаков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453033
(e-mail: `kazakov@icc.ru`)

Кузнецов Павел Александрович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Российская Федерация, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)453107
(e-mail: `pav_ku@mail.ru`)

Поступила в редакцию 28.04.2018

On Analytic Solutions of the Problem of Heat Wave Front Movement for the Nonlinear Heat Equation with Source

A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

Abstract. We continue our investigation of the special boundary-value problems for the nonlinear parabolic heat equation (the porous medium equation) in the article. In the case of a power-law dependence of the heat conductivity coefficient on temperature the equation is used for describing high-temperature processes, filtration of gas through porous media, migration of biological populations, etc. Moreover, the equation has specific nonlinear properties, which may be interesting from the point of view of physics as well as mathematics. For example, it is well known, that the described disturbances may have a finite velocity of propagation. The heat waves (waves of filtration) compose an important class of solutions to the equation under consideration. Geometrically, these solutions are constructed from two integral surfaces, which are continuously connected on a curve - heat wave front. We consider a boundary-value problem, which has such solutions. The research is carried out in the class of analytic functions by the characteristic series method. This method was suggested by R. Courant and then it was adapted for nonlinear parabolic equations in A.F. Sidorov's scientific school. We have already researched similar problems in case of closed front without source. For each problem we constructed the solution in form of characteristic series and proved the exist theorem, which guaranteed the convergence. The paper deals with the flat-symmetrical problem with given front and source. The theorem of existence of the analytic solution(heat wave's nonnegative part) was proved and the solution in form of the power series was constructed. Also we considered an interesting case in which the source is a power function (such cases are common in applications). It was shown that the original problem may be reduced to the Cauchy problem for nonlinear ordinary differential equation of the second order.

Keywords: nonlinear heat equation with source, porous medium equation, heat wave, characteristic series, convergence, exist theorem.

References

1. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamics Phenomena.* New York, Dover Publications, 2002, 944 p.
2. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2014, vol. 8, no. 2, pp. 1-11. https://doi.org/10.1134/S1990478914020094
3. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. On Construction of Heat Wave for Nonlinear Heat Equation in Symmetrical Case. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2015, vol. 11, pp. 39-53. (in Russian)
4. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a Degenerate Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation in Spherical Coordinates. *Trudy Instituta matematiki i mehaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 119-129. (in Russian)
5. Kazakov A.L., Lempert A.A. Analytical and Numerical Investigation of a Nonlinear Filtration Boundary-Value Problem with Degeneration. *Vychislitel'nye tehnologii*, 2012, vol. 17, no. 1, pp. 57-68. (in Russian)
6. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and Uniqueness of the Solution of the Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation of Unsteady Filtration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 251-258. https://doi.org/10.1134/S0021894413020107
7. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary Elements Method and Power Series Method for One-dimensional Nonlinear Filtration Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 2-17. (in Russian)

8. Kovalev V.A., Kurkina E.S., Kuretova E.D. Thermal self-focusing during solar flares. *Plasma Physics Reports*, 2017, vol. 43, no. 5, pp. 583-587. https://doi.org/10.1134/S1063780X17050063
9. Kudryashov N.A., Chmykhov M.A. Approximate Solutions to One-Dimensional Nonlinear Heat Conduction Problems with a Given Flux. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 107-117. https://doi.org/10.1134/S0965542507010113
10. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations.* New York, Interscience, 2008.878 p.
11. Rudykh G.A., Semenov E.I. Construction of Exact Solutions of One-Dimensional Nonlinear Diffusion Method of Linear Invariant Subspaces. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 69-84. (in Russian)
12. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations.* Walter de Gruyte Berlin, NY, 1995. 534 p.
13. Sidorov A.F. *Selected Works: Mathematics. Mechanics.* Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (in Russian)
14. Dahlberg B.E., Kenig C.E. Weak Solutions of the Porous Medium Equation in a Cylinder. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1993, vol. 336, no. 2, pp. 701-–709. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1993-1085940-6
15. Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special construction of series *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1993, vol. 8, no. 2, pp. 101—125. https://doi.org/10.1515/rnam.1993.8.2.101
16. Murray J. *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition.* Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 17. New York, Springer, 2002, 551 p.
17. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory.* Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p.

Kazakov Alexandr Leonidovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Principal Research, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (3952)453033 (e-mail: kazakov@icc.ru)

Kuznetsov Pavel Alexandrovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Research, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation, tel.: (3952)453107 (e-mail: pav_ku@mail.ru)

Received 28.04.18