Серия «Математика»
2016. Т. 15. С. 62—77

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.518.15
MSC 45D05

О регуляризации по Лаврентьеву интегральных уравнений первого рода в пространстве непрерывных функций †

И. Р. Муфтахов

Иркутский национальный исследовательский технический университет

Д. Н. Сидоров

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН
Иркутский государственный университет
Иркутский национальный исследовательский технический университет

Н. А. Сидоров

Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматривается метод регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В основе метода лежит теория возмущений. При получении оценок приближенных решений и нормы регуляризирующего оператора используются теорема Банаха – Штейнгауза, понятие стабилизирующего оператора, а также предложенная в монографии Н. А. Сидорова (1982, MR87a:58036) абстрактная схема построения регуляризирующих уравнений. Усилен результат А. М. Денисова (1974, MR337040) о регуляризации уравнения Вольтерра, сняты такие ограничения, как предположение точного задания ядра, существование вторых производных ядра по t и свободной функции. Тестирование соответствующего приближенного метода проведено на примере численного решения интегральных уравнений при различных уровнях аддитивного шума в свободной функции и ядре уравнения. Рассмотрен класс линейных уравнений Вольтерра первого рода, когда ядро допускает разрывы первого рода на определенных кривых. Этот класс уравнений был введен в работе Д. Н. Сидорова (2013, MR3187864). При построении численного решения таких уравнений решение можно искать в виде кусочно-постоянной и кусочно-линейной функции, используя квадратурные формулы средних прямоугольников и Гаусса. Проведенные расчеты демонстрируют эффективность применения регуляризации Лаврентьева при численном решении линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами.

† Работа выполнена при частичной поддержке программы международного научно-технического сотрудничества Китая и России, грант 2015DFR70850.

Ключевые слова: линейное интегральное уравнение, регуляризирующее уравнение, стабилизирующий оператор, уравнение Вольтерра первого рода, регуляризация Лаврентьева, метод возмущений, разрывное ядро, квадратурные формулы, теорема Банаха – Штейнгауза.

Введение

Введем интегральный оператор $Kx := \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds$. Будем использовать стандартные обозначения и условия:
A) *ядро* $K(t,s)$ *определено, непрерывно и дифференцируемо по* t *в области* $D := \{0 < s < t < T\}$, $\min\limits_{0\le t\le T} |K(t,t)| = d > 0$. *Множество* $\mathcal{R}(K) = \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T],}$ *— область значений этого оператора, множество* $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$ *на основании аппроксимационной теоремы Вейерштрасса суть замыкание области* $\mathcal{R}(K)$;

B) *пусть* $f : (0,T) \to \mathbb{R}^1$ *— дифференцируемая функция,* $f(0) = 0$, α *— малый положительный параметр.*

Введем интегральное уравнение
$$Kx = f, \tag{0.1}$$
возмущенное уравнение
$$Kx + \alpha x = f, \tag{0.2}$$
и приближенное уравнение
$$\widetilde{K}x + \alpha x = \tilde{f}. \tag{0.3}$$

В связи с задачей численного решения Вольтерровых уравнений в нерегулярных случаях (см., например, работы [2; 4; 10; 11; 15; 16; 17; 18] и др.) рассмотрим вопрос о связи решений уравнений (0.1), (0.2), (0.3). По этому вопросу и проблеме регуляризации существует обширная литература, важную часть которой составляют результаты М. М. Лаврентьева и А. М. Денисова, послужившие стимулом для этой статьи.

Особенностью методики этой статьи является систематическое использование понятия стабилизирующего оператора, оценки нормы обратного оператора $||(K+\alpha I)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})}$ в операторной топологии и некоторых результатов, связанных с классической теорией возмущения линейных операторов и с теоремой Банаха-Штейнгауза [12]. На этом пути удалось усилить результат А.М. Денисова [1] о регуляризации уравнения Вольтерра. В результате сняты такие ограничения, как предположение точного задания ядра $K(t,s)$, существование вторых производных по t ядра и свободной функции в уравнении (0.1). В п. 4 приведены результаты численных расчетов, демонстрирующие эффективность применения регуляризации по Лаврентьеву в комбинации с методами, предложенными в работе [6] при решении линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в случае наличия шума в ядрах и правых частях уравнений. В п. 4 используется постановка проблемы, предложенная ранее в монографии Д.Н. Сидорова [4], см. также [5; 6; 13; 14] и [17].

1. Вспомогательные сведения

При выполнении условий A), B) уравнение (0.1) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$K(t,t)x(t) + \int_0^t K_t'(t,s)x(s)\,ds = f'(t), \tag{1.1}$$

и справедлива

Лемма 1. *Пусть выполнены условия A) и B). Тогда:*

1) линейный оператор $K \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]} \to \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T],})$ *и имеет ограниченный обратный, уравнение (0.1) имеет в классе* $\mathcal{C}_{[0,T]}$ *единственное решение* $x^*(t)$, $x^*(0) = \dfrac{f'(0)}{K(0,0)}$;

2) если в дополнение к условиям A), B) функция $f(t)$ *два раза дифференцируема, ядро* $K(t,s)$ *дифференцируемо по* s *и два раза по* t, *то решение* $x^*(t) \in \mathcal{C}'_{[0,T]}$. *Если при этом* $f'(0) = 0$, *то* $x^*(t) \in \mathcal{R}(K)$ *и система*

$$\begin{cases} Kx_1 = f, \\ Kx_2 = x_1 \end{cases} \tag{1.2}$$

имеет единственное решение $x_1(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T],}$, $x_2(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}$.

Доказательство. Проверим справедливость утверждения 1):

a) $Kx\big|_{t=0} = \int_0^t K(t,s)x(s)\,ds\big|_{t=0} = 0$,

b) $\dfrac{d}{dt}Kx = K(t,t)x(t) + \int_0^t K_t'(t,s)x(s)\,ds$ — непрерывная функция при любой функции $x(t) \in \mathcal{C}_{[0,T]}$.

Из a) и b) следует, что K — линейный ограниченный оператор, действующий из $\mathcal{C}_{[0,T]}$ в $\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}$. То есть включение $K \in \mathcal{L}\big(\mathcal{C}_{[0,T]} \to \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}\big)$ доказано. Т.к. уравнение (1.1) эквивалентно уравнению (0.1), то обратный оператор K^{-1} строится явно по формуле

$$x = K^{-1}f = \frac{f'(t)}{K(t,t)} + \int_0^t R(t,s)f'(s)\,ds,$$

где $R(t,s)$ — резольвента ядра $-\dfrac{K'_t(t,s)}{K(t,t)}$. Решение $x^*(t)$ — единственное, $x^*(0)=\frac{f'(0)}{K(0,0)}$. Если при $0\le s\le t\le T$ выполнены оценки $|K'_t(t,s)|\le C$, $|K(t,t)|\ge d>0$, то из (1.1) вытекает неравенство

$$|x(t)|\le \frac{1}{d}||f||_{\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}}+\int_0^t \frac{C}{d}|x(s)|\,ds.$$

Поэтому

$$|x(t)|\le \frac{1}{d}e^{\frac{C}{d}t}||f||_{\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}}.$$

Следовательно,

$$||K^{-1}||_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})}\le \frac{1}{d}e^{\frac{C}{d}T}.$$

Справедливость утверждения 1) установлена. Докажем справедливость утверждения 2). Из уравнения (1.1), эквивалентного уравнению (0.1), следует, что при выполнении условий, сформулированных в 2), решение $x^*\in\mathcal{C}'_{[0,T]}$. Если при этом $f'(0)=0$, то $x^*\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}=\mathcal{R}(K)$ и система (1.2) будет разрешима, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. Если $\min\limits_{0\le t\le T}|K(t,t)|=0$, то уравнение (0.1) может оказаться неразрешимым или иметь неединственное решение. Например, уравнению $\int_0^t(t-2s)x(s)\,ds=t^2$, где $K(t,t)=-t$, удовлетворяет семейство $x(t,c)=c-2t$, $c-\mathrm{const}$, а уравнение $\int_0^t tx(s)\,ds=\sin t$ не разрешимо в классе $\mathcal{C}_{[0,T]}$.

2. О связи решений уравнений (0.1), (0.2)

Введем α-семейство операторов $B_\alpha:=\alpha(K+\alpha I)^{-1}$, отвечающих уравнению (1.1), рассматриваемых при $\alpha>0$ и действующих из $\mathcal{C}_{[0,T]}$ в $\mathcal{C}_{[0,T]}$. Оператор B_α удовлетроворяет следующим двум свойствам.
Свойство 1. *Если последовательность* $||B_\alpha u||$ *при* $\alpha\to+0$ *бесконечно малая, то* $u\in\overline{\mathcal{R}(K)}$. Действительно, запишем очевидное операторное тождество при $\alpha>0$:

$$K(K+\alpha I)^{-1}+B_\alpha=I.$$

Из этого тождества при любом u и неотрицательном α вытекает равенство

$$K(K+\alpha I)^{-1}u+B_\alpha u=u.$$

Так как по условию числовая последовательность $\{||B_\alpha u||\}$ — бесконечно малая при $\alpha \to +0$, то последовательность $\{||u - Ku_\alpha||\}$, где $u_\alpha = (K + \alpha I)^{-1}u$, тоже должна быть бесконечно малой при $\alpha \to +0$. Но тогда необходимо выполнится включение $u \in \overline{\mathcal{R}(K)}$. Таким образом, справедливость свойства 1 установлена.

Свойство 2. *Пусть x^* — решение уравнения (0.1), а x_α — решение уравнения (0.2). Пусть последовательность $\{||B_\alpha x^*\}||$ — бесконечно малая при $\alpha \to 0$. Тогда* $\lim\limits_{\alpha\to+0} ||x_\alpha - x^*|| = 0.$.

Доказательство вытекает из тождества $x^* - x_\alpha = \alpha(K + \alpha I)^{-1}x^*$, т.к. $B_\alpha = \alpha(K + \alpha I)^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие A), причем* $K(t,t) = 1$. *Тогда при* $\alpha > 0$ *справедлива оценка* $||B_\alpha||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})} \leq 2e^{aT}$, *где* $a = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |K'_t(t,s)|$.

Доказательство. Введя обозначения $K_0x := \int_0^t x(s)\,ds$, $(K - K_0)x := \int_0^t (K(t,s) - 1)x(s)\,ds$, уравнение (0.3) перепишем в виде $\alpha x + K_0x + (K - K_0)x = f$. Отметим, что при $\alpha \neq 0$ ограниченный оператор $\alpha I + K_0$ действует взаимно однозначно из $\mathcal{C}_{[0,T]}$ в $\mathcal{C}_{[0,T]}$, а ему обратный ограниченный и имеет вид

$$(\alpha I + K_0)^{-1} = \frac{1}{\alpha}I - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}[\cdot]\,dz.$$

Поэтому уравнение (0.3) умножением на ограниченный оператор $(\alpha I + K_0)^{-1}$ приводится к эквивалентному уравнению

$$x + \frac{1}{\alpha}(K - K_0)x - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}(K - K_0)x\big|_z\,dz =$$

$$= \frac{1}{\alpha}f(t) - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}f(z)\,dz. \tag{2.1}$$

Здесь и далее $(K - K_0)x\big|_z := \displaystyle\int_0^z (K(z,s) - 1)x(s)\,ds$. Меняя порядок интегрирования, получим равенство

$$\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}(K - K_0)x\big|_z\,dz = \int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}\int_0^z (K(z,s) - 1)x(s)\,dsdz =$$

$$= \int_0^t \int_s^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}(K(z,s) - 1)\,dzx(s)\,ds.$$

Интегрированием по частям с учетом тождества $K(t,t) \equiv 1$ приходим к равенству

$$\int_s^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}(K(z,s) - 1)\,dz =$$

$$= e^{-\frac{t}{\alpha}} \left\{ \alpha e^{z/\alpha}(K(z,s)-1)\Big|_{z=s}^{z=t} - \alpha \int_s^t e^{z/\alpha} K'_z(z,s)\,dz \right\} =$$

$$= \alpha(K(t,s)-1) - \alpha \int_s^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}} K'_z(z,s)\,dz.$$

Введем функцию $Q(t,s,\alpha) := \displaystyle\int_s^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}} K'_z(z,s)\,dz$. С учетом этого обозначения имеем тождество

$$\frac{1}{\alpha^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}(K-K_0)x\big|_z\,dz = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t (K(t,s)-1)x(s)\,ds - \int\limits_0^t \frac{Q(t,s,\alpha)}{\alpha}x(s)\,ds,$$

в силу которого уравнение (2.1) примет вид

$$x(t) + \int_0^t \frac{Q(t,s,\alpha)}{\alpha}x(s)\,ds = \frac{1}{\alpha}f(t) - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}} f(z)\,dz. \tag{2.2}$$

Покажем, что ядро $\frac{Q(t,s,\alpha)}{\alpha}$ непрерывно в области $D = \{0 < s < t < T,\ 0 < \alpha < \infty\}$ и ограничено на компакте $\overline{D}$. Заметим, что

$$|Q(t,s,\alpha)| \le \int_s^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}} |K'_z(z,s)|\,dz,$$

где по условию $|K'_z(z,s)| \le a$. Поэтому

$$|Q(t,s,\alpha)| \le a e^{-\frac{t}{\alpha}} \int_s^t e^{z/\alpha}\,dz = a e^{-t/\alpha}\alpha(e^{t/\alpha} - e^{s/\alpha}) = a\alpha(1 - e^{-\frac{t-s}{\alpha}}) \le$$

$$\le a\alpha(1 - e^{-\frac{T}{\alpha}}) < a\,\alpha.$$

Следовательно, ядро $\frac{Q(t,s,\alpha)}{\alpha}$ непрерывно в области $D = \{0 < s < t < T,\ 0 < \alpha < \infty\}$ и имеет непрерывную резольвенту $R(t,s,\alpha)$. Так как $\frac{Q(t,s,\alpha)}{\alpha} < a$, то для резольвенты справедлива оценка $|R(t,s,\alpha)| < a e^{a(t-s)}$. С помощью резольвенты $R(t,s,\alpha)$ решение уравнения (0.3) строится в замкнутом виде по формуле

$$x(t) = \frac{f(t)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}} f(z)\,dz + R\left(\frac{f(s)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^s e^{-\frac{s-z}{\alpha}} f(z)\,dz\right).$$

Здесь $R[\,\cdot\,] := \displaystyle\int_0^t R(t,s,\alpha)[\,\cdot\,]\,ds$. Поэтому справедливо неравенство

$$\max_{0\le t\le T}\left| R\left(\frac{f(s)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^s e^{-\frac{s-z}{\alpha}} f(z)\,dz\right)\right| \le \frac{2}{\alpha}||f|| \max_{0\le t\le T} a\int_0^t e^{a(t-s)}\,ds,$$

где $\max\limits_{0\le t\le T} a\int_0^t e^{a(t-s)}\,ds = e^{aT}-1$. Учитывая оценку

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{1}{\alpha}f(t)-\frac{1}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\frac{t-z}{\alpha}}f(z)\,dz\right|\le\frac{2}{\alpha}||f||,$$

придем к неравенству

$$||x|| = ||(K+\alpha I)^{-1}f|| \le \frac{2}{\alpha}e^{aT}||f||$$

при $f(t)\in\mathcal{C}_{[0,T]}$. Следовательно, $||(K+\alpha I)^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})}\le\frac{2}{\alpha}e^{aT}$. Т.к. $B_\alpha=\alpha(K+\alpha I)^{-1}$, то $||B_\alpha||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})}\le 2e^{aT}$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 2. Аналогичный результат получается и в случае, когда $\min\limits_{a<t\le T}|K(t,t)|=d>0$. Действительно, этот случай сводится к рассмотрению уравнения $\int_0^t A(t,s)x(s)\,ds=\frac{f(t)}{K(t,t)}$, где $A(t,s):=K(t,s)/K(t,t)$, $A(t,t)=1$.

Лемма 3. *Пусть ядро $K(t,s)$ непрерывно и дифференцируемо по t, $||B_\alpha||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})}\le C$ при $\alpha>0$. Тогда при любой функции $u(t)\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$ последовательность $\{||B_\alpha u||\}$ будет бесконечно малой при $\alpha\to+0$.*

Доказательство. Если $u(t)\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}$, то $u(t)\in\mathcal{R}(K)$ и, следовательно, в пространстве $\mathcal{C}_{[0,T]}$ существует функция $x(t)$, такая, что $Kx=u$. Тогда $B_\alpha u=(K+\alpha I)^{-1}\alpha(Kx+\alpha x-\alpha x)=\alpha x-\alpha^2(K+\alpha I)^{-1}x=\alpha x-\alpha B_\alpha x$. Следовательно, при $u(t)\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}$ выполнена оценка $||B_\alpha u||\le\alpha(1+C)||x||$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0}||B_\alpha u||=0$.

Теперь пусть $u(t)\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$, где $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$ – суть замыкание области значения $\mathcal{R}(K)$. По условию α-последовательность $\{||B_\alpha||\}$ – ограниченная. По доказанному $B_\alpha u\to 0$ для $\forall u\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}$. Линейные комбинации функций из $\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}'_{[0,T]}$ лежат всюду плотно в $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$. Следовательно, на основании теоремы Банаха – Штейнгауза (см. теорему 4 в [3], с. 151) $B_\alpha u\to 0$ для $\forall u\in\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$. Что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 1. *Пусть $K(t,s)$ и $f(t)$ — непрерывны и дифференцируемы по t, $f(0)=0$, $f'(0)=0$. Тогда в классе $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$ уравнение (0.1) имеет единственное решение $x^*(t)$. При этом $\lim\limits_{\alpha\to+0}||x_\alpha-x^*||_{\mathcal{C}_{[0,T]}}=0$, где x_α — единственное непрерывное решение уравнения (0.2).*

Доказательство. Существование и единственность в классе $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$ решения уравнения (0.1) доказаны в Лемме 1. В силу свойства 2 $x^* - x_\alpha = B_\alpha x^*$, где на основании Леммы 2 $||B_\alpha||_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]})} \leq C$. Так как $x^* \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$, то на основании Леммы 3 последовательность $||B_\alpha x^*||_{\mathcal{C}_{[0,T]}}$ будет бесконечно малой при $\alpha \to +0$. Теорема доказана. □

3. Основная теорема

Введем функции $\widetilde{K}(t,s)$, $\widetilde{f}(t)$ определенные в области D, такие, что выполнены неравенства

$$\sup_{0<s<t<T} |\widetilde{K}(t,s) - K(t,s)| \leq \delta, \ \sup_{0<t<T} |\widetilde{f}(t) - f(t)| \leq \delta.$$

Допускаем, что функции $\widetilde{K}(t,s)$, $\widetilde{f}(t)$ в области D имеют конечное число точек разрыва 1го рода. Обозначим через E банахово пространство кусочно-непрерывных функций с нормой $||x||_E = \sup\limits_{0<t<T} |x(t)|$. В уравнении (0.3) положим $\widetilde{K} = \int_0^t \widetilde{K}(t,s)[\,\cdot\,]\,ds$, $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$. Очевидно, что $\widetilde{K} \in \mathcal{L}(E \to E)$, т.к. $||\widetilde{K}|| \leq T \cdot \sup\limits_{0<s<t<T} |\widetilde{K}(t,s)|$. Поэтому уравнение (0.3) с вольтерровым оператором $\widetilde{K}$ в пространстве E имеет единственное решение $\tilde{x}_\alpha$.

Пусть $||(K + \alpha I)^{-1}|| \leq c/\alpha$ при $\alpha > 0$. Такая оценка выполнена, например, в условиях Леммы 2. Пусть далее в уравнениях (0.2), (0.3) $\alpha = \delta^\nu$, при $\nu \in (0,1)$. Тогда в силу теоремы об обратном операторе (см., например, теорему 2 на стр. 156 в [3]) найдется положительное δ_0 такое, что при $\forall\delta \in (0, \delta_0]$ выполнится асимптотическая оценка $||(\widetilde{K} + \alpha I)^{-1}||_{\mathcal{C}_{[0,T]}\to\mathcal{C}_{[0,T]}} = \mathcal{O}(1/\alpha)$. Более того, для любого $\varepsilon > 0$ $\exists\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются неравенства

$$||(\widetilde{K} + \alpha I)^{-1} - (K + \alpha I)^{-1}||_{\mathcal{L}(E\to E)} \leq \varepsilon/3, \tag{3.1}$$

$$\delta||(\widetilde{K} + \alpha I)^{-1}||_{\mathcal{L}(E\to E)} \leq \varepsilon/3. \tag{3.2}$$

Напомним, что решение x^* уравнения (0.1) — суть элемент пространства $\overset{\circ}{\mathcal{C}}_{[0,T]}$. Поэтому на основании Леммы 3 для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ $\exists\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $\delta \in (0, \delta_1]$ выполнится неравенство

$$||(K + \alpha)^{-1}\alpha x^*||_E \leq \varepsilon/3. \tag{3.3}$$

Пусть $\delta^* = \min\{\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon)\}$. Тогда при $\delta \in (0, \delta^*]$ выполняются одновременно неравенства (3.1), (3.2), (3.3).

Если $\widetilde{x}_\alpha = (\widetilde{K}+\alpha I)^{-1}\widetilde{f}$, $x^* = K^{-1}f$ – суть соответствующие решения уравнений (0.3) и (0.1), то будет справедливо неравенство

$$|\tilde{x}_\alpha - x^*| \le ||(\tilde{K}+\alpha I)^{-1}(\tilde{f}-f)||_E + ||((\tilde{K}+\alpha I)^{-1} - (K+\alpha I)^{-1})f||_E +$$

$$+||(K+\alpha I)^{-1}f - K^{-1}f||_E.$$

Так как $||(K+\alpha I)^{-1}f - K^{-1}f|| = ||(K+\alpha I)^{-1}\alpha x^*||$, то с учетом оценок (3.1), (3.2), (3.3) при $\forall\delta \in (0,\delta^*]$ имеем оценку $||\tilde{x}_\alpha - x^*||_E \le \varepsilon$. Из доказанного вытекает основная теорема

Теорема 2. *Пусть в области $D = \{0 < s < t < T\}$ заданы функции $K(t,s)$, $f(t)$ – непрерывно дифференцируемы по t. Пусть $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $\min\limits_{0\le t\le T}|K(t,t)| = d > 0$, а функция $x^*(t)$ – решение уравнения (0.1). Пусть кусочно-непрерывные функции $\widetilde{K}(t,s)$и $\tilde{f}(t)$ определены в области D и удовлетворяют оценкам $|\widetilde{K}(t,s) - K(t,s)| \le \delta$, $|\tilde{f}(t) - f(t)| \le \delta$. Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ и $\alpha = \delta^\nu$, где $\nu \in (0,1)$ $\exists\delta^*(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\delta \in (0,\delta^*(\varepsilon)]$ единственное решение $\tilde{x}$ уравнения*

$$\alpha\tilde{x}_\alpha(t) + \int_0^t \tilde{K}(t,s)\tilde{x}_\alpha(s)\,ds = \tilde{f}(t)$$

удовлетворяет оценке $\sup\limits_{0<t<T}|\tilde{x}_\alpha(t) - x^*(t)| \le \varepsilon$.

3.1. Ослабление условия А

Условие А) можно заменить на условия:
А^c) $K(t,s)$ — *линейное ограниченное отображение из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, область определения которого не зависит от аргументов, оператор $K(t,t)$ имеет ограниченный обратный.*

При этом предположении легко построить примеры других естественных классов уравнений первого рода вида (0.1), имеющих единственное непрерывное решение $x : [0,T] \to E_2$, допускающих регуляризацию по Лаврентьеву.

Пример 1.

$$\begin{cases} \int_0^t K(t-s)\left(x(s,y) + \frac{\partial x(s,y)}{\partial y}\right) ds = f(t,y),\ y \in [a,b], \\ x|_{y=a} = x_0(t),\ \ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.4}$$

Пусть непрерывные функции $K(t)$, $f(t,y)$ дифференцируемы по t, $f(0,y) = 0$, $K(0) = 1$, $E_1 = \mathcal{C}'_{[a,b]}$, $E_2 = \mathcal{C}_{[a,b]}$. Тогда начальная задача

(3.4) имеет единственное непрерывное решение. Регуляризацию можно провести, решая последовательно уравнения

$$\alpha u(t,y) + \int_0^t K(t-s)u(s,y)\,ds = f(t,y),$$

$$\frac{\partial x(t,y)}{\partial y} + x(t,y) = u(t,y),\ x|_{y=a} = x_0(t).$$

Пример 2. Интегральное уравнение

$$\int_0^t K(t-s)\left[x(s,y) + \int_0^1 Q(y,z)x(s,z)\,dz\right]ds = f(t,y), \tag{3.5}$$

где заданные функции непрерывны и дифференцируемы по t, $f(0,y) = 0$, $K(0) = 1$, -1 не является собственным числом ядра $Q(y,z)$, имеет единственное непрерывное решение. Регуляризация этого примера проводится путем последовательного решения уравнений

$$\alpha u(t,y) + \int_0^t K(t-s)u(s,y)\,ds = f(t,y),$$

$$x(t,y) + \int_0^1 Q(y,z)x(t,z)\,dz = u(t,y). \tag{3.6}$$

Если -1 является собственным числом ядра $Q(y,z)$, $\phi_1,\ldots,\phi_n$ — его собственные функции, а $\psi_1,\ldots,\psi_n$ — собственные функции союзного ядра, то на основании [9] ядро $Q(y,z)$ в уравнении (3.6) надо заменить на возмущенное ядро $Q(y,z) + \sum_{i=1}^n \phi_i(y)\psi_i(z)$.

4. Интегральные уравнения с разрывными ядрами

Рассмотрим применение метода возмущений при построении регуляризованных численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра I рода вида

$$\int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t),\ \ 0 \le s \le t \le T,\ f(0) = 0. \tag{4.1}$$

Ядро $K(t,s)$, определенное в области $\{0 \le s \le t \le T\}$, претерпевает разрывы 1го рода на кривых $s = \alpha_i(t)$ и задается формулой

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s),\ t,s \in m_1, & m_i = \{t,s \mid \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t)\}, \\ \ \ldots\ \ \ldots\ldots\ldots & \\ K_n(t,s),\ t,s \in m_n, & \alpha_0(t) = 0,\ \alpha_n(t) = t,\ i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Здесь функции $\alpha_i(t)$, $f(t)$, $K_i(t,s)$ непрерывны в своих областях и допускают непрерывные продолжения на компакты $\overline{m_i}$, $K_n(t,t) \neq 0$, $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \ldots < \alpha_{n-1}(t) < t$, при $0 < t \leq T$, $\alpha_i(t)$ возрастают в малой окрестности $0 \leq t \leq \tau$, $0 \leq \alpha_1'(0) \leq \ldots \leq \alpha_{n-1}'(0) < 1$. Важную роль в теории таких уравнений, построенной в монографиях [17], [4], играет функция $D(t) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \left| \alpha_i'(t) K_n^{-1}(t,t) \right| \cdot \left| K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t)) \right|$ и характеристическое показательное уравнение

$$K_n(0,0) + \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)) = 0.$$

Если $D(0) < 1$, то характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и уравнение (4.1) на основании теоремы 3.1.1 (см. монографию [4]) в классе непрерывных функций $\mathcal{C}_{[0,\,T]}$ имеет единственное решение. Если, кроме того, $(K + \alpha I)^{-1} = \mathcal{O}(1/\alpha)$, $\alpha > 0$, то для уравнения (4.1) сохранится результат теоремы 2. То есть уравнение вида (0.3) будет регуляризирующим. Изложим результаты численного решения уравнения с разрывными ядрами, удовлетворяющее сформулированным выше условиям.

Пример 3. Рассмотрим линейное уравнение первого рода вида (4.1)

$$\int_0^{t/4} (1+t+s)x(s)\,ds + \int_{t/4}^{t/2} (2+ts)x(s)\,ds + \int_{t/2}^{t} (1+t+s)x(s)\,ds =$$

$$= \frac{31t^6}{40960} + \frac{1099t^5}{20480} + \frac{271t^4}{8192},\ t \in [0,\,2].$$

Здесь точное решение $\overline{x}(t) = t^3/8$. Приведем результаты работы алгоритма с использованием описанной выше регуляризации Лаврентьева для случая, когда поиск приближенного решения выполняется в виде кусочно-постоянной функции (далее PWC):

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i(t),\ t \in (0,T],\ \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \in \Delta_i = (t_{i-1}, t_i]; \\ 0, & \text{for } t \notin \Delta_i. \end{cases}$$

Подробное описание алгоритма приведено в работе [6], см. также близкие результаты [13; 14]. Будем здесь использовать равномерную сетку. В табл. 1 приведены ошибки $\varepsilon_h = \max\limits_{0 \leq i \leq N} |x_N(t_i) - \bar{x}(t_i)|$, полученные путем согласования шага с уровнями добавленного в ядро и в правую часть нормально распределенного случайного шума. Также для сравнения приведены расчеты для незашумленных данных. Значения параметра α выбраны таким образом, чтобы обеспечить минимальную погрешность при заданном шаге.

Таблица 1

h			10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Без шума						
Без рег.	Ср. прям.	PWC	0.139529	0.014874	0.001497	0.000150
		PWL	$5.39 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$
	Гаусс	PWC	0.139529	0.014874	0.001497	0.000150
		PWL	0.004932	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$6.0 \cdot 10^{-9}$
С регуляризацией	Ср. прям.	PWC	0.139529	0.014874	0.001497	0.000150
		α	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
		PWL	$5.39 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-7}$
		α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
	Гаусс	PWC	0.139529	0.014874	0.001497	0.000150
		α	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
		PWL	0.004932	$5.0 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-9}$
		α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
С шумом δ			10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
Без рег.	Ср. прям.	PWC	0.137164	0.015311	0.001596	0.000165
		PWL	0.261607	0.079015	0.023068	0.006592
	Гаусс	PWC	0.133109	0.015482	0.001624	0.000165
		PWL	0.098011	0.076760	0.024611	0.008765
С регуляризацией	Ср. прям.	PWC	0.124463	0.014720	0.001568	0.000162
		α	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
		PWL	0.044884	0.006480	0.000850	0.000096
		α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
	Гаусс	PWC	0.123097	0.014767	0.001551	0.000162
		α	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
		PWL	0.037074	0.006961	0.000853	0.000093
		α	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
С шумом δ			10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
Без рег.	Ср. прям.	PWC	0.139125	0.014874	0.001583	0.000165
		PWL	0.025508	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$
	Гаусс	PWC	0.139899	0.014874	0.001616	0.000165
		PWL	0.011047	$5.5 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-7}$
С регуляризацией	Ср. прям.	PWC	0.137952	0.014855	0.001568	0.000162
		α	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
		PWL	$4.0 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$9.7 \cdot 10^{-6}$	$3.6 \cdot 10^{-7}$
		α	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	Гаусс	PWC	0.138185	0.014863	0.001551	0.000162
		α	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}
		PWL	0.005295	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-7}$
		α	10^{-4}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

В табл. 1 также приведены результаты расчетов с использованием кусочно-линейной аппроксимации решения (используется обозначение PWL):

$$x_N(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) \right) \delta_i(t), \ t \in (0, T],$$

где $\delta_i(t)$ определено как и ранее.

Расчеты выполнены с использованием квадратурных формул средних прямоугольников, а также квадратур Гаусса (по трем узлам).

4.1. Комментарии к Таб. 1

Приведенные расчеты демонстрируют, что использование α-регуляризации Лаврентьева позволяет существенно снизить уровень погрешности при численном решении нерегулярных интегральных уравнений первого рода для зашумленных данных, особенно когда для заданного уровня шума еще не проявляется характерное для интегральных уравнений Вольтерра первого рода свойство саморегуляризации. При большом уровне шума вычисления без α-регуляризации становились неустойчивыми или давали большую погрешность.

Для кусочно-линейной аппроксимации при использовании как квадратур Гаусса, так и средних прямоугольников, наблюдается заметное улучшение результата при согласовании шага сетки узлов и уровня добавляемого в ядро и правую часть шума. Это обусловлено известным свойством саморегуляризации при согласовании шага сетки узлов с уровнем шума.

Для нахождения оптимального шага и параметра регуляризации α при известном уровне шума исходных данных уравнения можно использовать стадартные методы минимизации выпуклой функции (например, метод Фибоначчи).

Список литературы

1. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А. М. Денисов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1975. – Т. 15, № 4. – С. 1053–1056.
2. Лаврентьев М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – Новосибирск : Наука, 1990.
3. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Физматлит, 1965.
4. Сидоров Д. Н. *Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения* / Д. Н. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
5. Сидоров Д. Н. О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров // Изв. вузов. Математика. – 2013. – № 1. – С. 62-–72.

6. Сидоров Д. Н. Численное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами / Д. Н. Сидоров, А. Н. Тында, И. Р. Муфтахов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2014. – Т. 7, № 3. – С. 107—115.
7. Сидоров Н. А. Регуляризация линейных уравнений на основе теории возмущений / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 2038–2049.
8. Сидоров Н. А. Об одном подходе к проблеме регуляризации на основе возмущения линейных операторов / Н. А. Сидоров, В. А. Треногин // Мат. заметки. – 1976. – Т. 40, № 5. – С. 747–752.
9. Сидоров Н. А. О роли метода возмущений и теоремы Банаха -– Штейнгауза в вопросах регуляризации уравнений первого рода / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, И. Р. Муфтахов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2015. – Т. 14. – С. 82–99.
10. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1974.
11. Тихонов А.Н. Некорректно поставленные задачи / А. Н. Тихонов, В. К. Иванов, М. М. Лаврентьев // Дифференциальные уравнения с частными производными. – М. : Наука, 1970. – С. 224–239.
12. Треногин В.А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
13. Тында А. Н. Прямые численные методы решения интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами / А. Н. Тында, Е. Н. Малякина // Сб. ст. VIII Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : ПГУ, 2014. – С. 84—89.
14. Тында А. Н. Численный анализ интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами / А. Н. Тында, П. А. Богинская // Сб. ст. VIII Междунар. науч.-тех. конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : ПГУ, 2014. – С. 76–81.
15. Brunner H. The Numerical Solution of Volterra Equations / H. Brunner, P. J. van der Houwen. – Amsterdam : North-Holland, 1986.
16. Kythe P. K. Computational Methods for Linear Integral Equations / P. K. Kythe, P. Puri. – Boston Birkhäuser, 2002.
17. Sidorov D. Integral Dynamical Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control / D. Sidorov ; ed. by L. O. Chua. –Singapore, London : World Scientific Publ., 2015. – Vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*. – 258 p.
18. Sizikov V. S. Further Development of the New Version of a Posteriori Choosing Regularization Parameter in Ill-Posed Problems. / V. S. Sizikov // Intl. J. of Artificial Intelligence. – 2015. – Vol. 13, N 1. – P. 184–199.

Муфтахов Ильдар Ринатович, аспирант, кафедра вычислительной техники, Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 83

Сидоров Денис Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт математики, экономики и информатики, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, Иркутский национальный исследовательский технический университет, 664033,

Иркутск, ул. Лермонтова, 83, тел.: (3952)421342,
(e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)242210 (e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru)

I. R. Muftahov, D. N. Sidorov, N. A. Sidorov,

Lavrentiev Regularization of Integral Equations of the First Kind in the Space of Continuous Functions

Abstract. The regularization method of linear integral Volterra equations of the first kind is considered. The method is based on the perturbation theory. In order to derive the estimates of approximate solutions and regularizing operator norms we use the Banach-Steinhaus theorem, the concept of stabilising operator, as well as abstract scheme for construction of regularizing equations proposed in the monograph N.A. Sidorov (1982, MR87a: 58036). The known results (existence of the second derivatives of kernel and source) of A.M. Denisova (1974, MR337040) for the Volterra equations' regularization were strengthened. The approximate method was tested on the examples of numerical solutions of integral equations under various noise levels in the source function and in the kernel. The regularization method is tested on Volterra integral equations with piecewise continuous kernels suggested by D.N. Sidorov (2013, MR3187864). The desired numerical solution is sought in the form of a piecewise constant and piecewise linear functions using quadrature formulas of Gauss and midpoint rectangles. The numerical experiments have demonstrated the efficiency of Lavrentiev regularization applied to Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels.

Keywords: Linear Integral Equation, Regularizing Equation, Stabilizing Operator, Volterra Equation of the First Kind, Lavrentiev Regularization, Perturbation Method, Quadrature, Banach-Steinhaus theorem.

References

1. Denisov A.M. The approximate solution of a Volterra equation of the first kind. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1975, vol. 15, no 4, pp. 237—239.
2. Lavrentiev M.M. *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics.* Springer, Berlin, 1967.
3. Lusternik L.A., Sobolev V.J. *Elements of Functional Analysis.* Frederick Ungar Publishing Co., 1961.
4. Sidorov D.N. *Methods of Analysis of Integral Dynamical Models: Theory and Applications.* (in Russian) Irkutsk State Univ. Publ., 2013.
5. Sidorov D.N. Solvability of systems of integral Volterra equations of the first kind with piecewise continuous kernels. (in Russian) *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2013, no. 1, pp. 62-72.
6. Sidorov D. N., Tynda A. N., Muftahov I. R. Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind with Piecewise Continuous Kernel. *Bul. of the South Ural State University. Ser. "Math. Model., Programming and Comp. Software"*, 2014, vol. 7, no 3, pp. 107-115.

7. Sidorov N.A., Trenogin V.A. Linear Equations Regularization using the Perturbation Theory. *Diff. Eqs.*, 1980, vol. 16, no 11, pp. 2038-2049.
8. Sidorov N.A., Trenogin V.A. A Certain Approach the Problem of Regularization of the Basis of the Perturbation of Linear Operators. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1976, vol. 20, no. 5, pp. 976-979.
9. Sidorov N.A., Sidorov D.N., Muftahov I.R. Perturbation Theory and the Banach–Steinhaus Theorem for Regularization of the Linear Equations of the First Kind. *IIGU Ser. Matematika*, 2015, vol. 14, pp. 82-99.
10. Tikhonov A. N. *Solution of Ill-Posed Problems.* Winston. New York, 1977.
11. Tikhonov A.N., Ivanov V.K., Lavrent'ev. Ill-posed Problems. In the book *Partial Differential Eqs*, Moscow, Nauka, 1970, pp. 224-239.
12. Trenogin V. A. Functional analysis. Nauka. Moscow, 1980, 496 p.
13. Tynda A.N., Malyakina E.N. Direct Numerical Methods for Solving Volterra Integral Equations of the I Kind with Discontinuous Kernels. *Sbornik statey VIII Mezhd. nauch.-tekh. konferentsii molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov* (in Russian) [Proc. 8th Int. Sci. Tech. Conf. Young Specialists, Post-graduate students], PGU, Penza, 2014, pp. 84–89.
14. Tynda A.N., Boginskaya P.A. Numerical Analysis of Volterra Integral Equations of the I Kind with Discontinuous Kernels [Chislennyy analiz integral'nykh uravneniy Vol'terra I roda s razryvnymi yadrami]. *Sbornik statey VIII Mezhd. nauch.-tekh. konferentsii molodykh spetsialistov, aspirantov i studentov* (in Russian) [Proc. 8th Int. Sci. Tech. Conf. Young Specialists, Post-graduate students]. PGU, Penza, 2014, pp. 76-81.
15. Brunner H., Houwen P.J. *The Numerical Solution of Volterra Equations.* North-Holland, Amsterdam, 1986.
16. Kythe P.K., Puri P. *Computational Methods for Linear Integral Equations.* Birkhäuser, Boston, 2002.
17. Sidorov D. Integral Dynamical *Integral Dynamical Models: Singularities, Signals and Control*; Ed. by L. O. Chua, Singapore, London, World Scientific Publ., 2015, vol. 87 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*. 258 p.
18. Sizikov V. S. Further Development of the New Version of a Posteriori Choosing Regularization Parameter in Ill-Posed Problems. *Intl. J. of Artificial Intelligence,* 2015, vol. 13, no 1, pp. 184-199.

Muftahov Ildar Rinatovich, Postgraduate, Irkutsk National Research Technical University, 80, Lermontov st., Irkutsk, 664033,
(e-mail: ildar_sm@mail.ru)

Sidorov Denis Nikolaevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Research Fellow, ESI SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Irkutsk State University, 1, K. Marx, Irkutsk, 664003, Irkutsk National Research Technical University, 80, Lermontov st., Irkutsk, 664033
(e-mail: dsidorov@isem.sei.irk.ru)

Sidorov Nikolai Alexandrovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)242210 (e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru)