



Серия «Математика»

2016. Т. 15. С. 26–37

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.7

MSC 08A99,03B50

О максимальных клонах ультрафункций ранга 2*

С. В. Замирацкая

ОГБУЗ «Медицинский информационно-аналитический центр Иркутской области»

В. И. Пантелеев

Иркутский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются функции, определенные на множестве A , состоящем из двух элементов, и принимающие в качестве своих значений все непустые подмножества множества A , которые будем называть ультрафункциями ранга 2. Ультрафункции ранга 2 можно считать всюду определенными функциями, заданными на множестве всех непустых подмножеств множества A . При этом каждая такая функция однозначно задается на одноэлементных подмножествах, а на наборах, в которых есть неоднородные подмножества, ее значение определяется как пересечение значений на наборах, составленных из элементов соответствующих подмножеств, если это пересечение не пусто. Иначе берется объединение таких значений. Аналогичным образом определяется и суперпозиция ультрафункций.

Известно, что число максимальных клонов множества всех ультрафункций равно 11 (В. И. Пантелеев, 2009 г.).

В работе описываются свойства ультрафункций, относительно принадлежности максимальным клонам \mathbb{K}_5 , \mathbb{S}^- , \mathbb{T}_0^- и \mathbb{T}_1^- . Полученные свойства позволяют описать некоторые вложения в решетке клонов (например, клоны из интервалов $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_0)$ и $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_1)$ не содержатся в клоне \mathbb{S} , а все самодвойственные и монотонные ультрафункции принадлежат клонам \mathbb{K}_1 и \mathbb{K}_2), получить оценки на количество классов эквивалентности (ультрафункции, не принадлежащие клонам \mathbb{T}_1^- и \mathbb{K}_5 , порождают не более 32 классов эквивалентности по отношению принадлежности максимальным клонам) и могут использоваться при классификации ультрафункций относительно принадлежности максимальным клонам.

Ключевые слова: ультрафункция, клон, базис, максимальный клон.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: проекты № 13-01-00621.

1. Введение

Построение решетки замкнутых относительно операции суперпозиции множеств является одним из важнейших вопросов теории дискретных функций.

Полное описание такой решетки получено только для булевых функций. Это было сделано Эмилем Постом в 1921 году [9]. Для функций многозначной логики данная проблема остается открытой уже более 90 лет.

В связи с трудностью решения этой задачи изучается не вся решетка целиком, а только ее отдельные фрагменты, например, максимальные и предмаксимальные элементы или классификация по принадлежности максимальным клонам [1; 3–8; 10]. Отношение принадлежности максимальным клонам является отношением эквивалентности на множестве всех функций и, значит, разбивает все множество на классы эквивалентности, что позволяет описать общую структуру решетки замкнутых классов, а также выполнить перечисление всех типов базисов.

Классификация по принадлежности максимальным клонам основана на свойствах функций, которыми обладают как функции, принадлежащие максимальным клонам, так и не принадлежащие им, что делает задачу нахождения таких свойств актуальной.

В работе рассматриваются свойства ультрафункций, заданных на двухэлементном множестве, относительно принадлежности максимальным клонам \mathbb{K}_5 , \mathbb{S}^- , \mathbb{T}_0^- и \mathbb{T}_1^- [2]. Полученные свойства позволяют описать некоторые вложения в решетке клонов, получить некоторые оценки на количество классов эквивалентности и могут использоваться при классификации ультрафункций относительно принадлежности максимальным клонам.

2. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0, 1\}$, $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Отображение $f : E^n \rightarrow F$ называется n -местной ультрафункцией ранга 2. Проекцией называется функция $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \{x_i\}$.

Замечание 1. В дальнейшем договоримся не различать одноэлементные множества и элементы этого множества, а для множества $\{0, 1\}$ использовать обозначение « $-$ ».

Множество всех ультрафункций обозначим через P_2^- .

Пусть $f(x_1, \dots, x_m), f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in P_2^-$. Операция суперпозиции $f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ порождает ультрафункцию $h(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом:

для каждого набора значений переменных $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$

$$h(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \bigcap_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m), & \text{если это пересечение} \\ & \text{не пусто;} \\ \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 2. Суперпозиция, определенная таким образом, позволяет находить значения ультрафункции f на наборах элементов из множества F , если рассматривать эти элементы как ультрафункции.

Пусть R^m – m -местный предикат, заданный на множестве F .

Определение 1. Ультрафункция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^m , если для любых n наборов $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{m1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{mn})$, принадлежащих предикату, набор $f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$ принадлежит R^m .

Если R^m – m -местный предикат, содержащий n наборов, то будем записывать этот предикат в виде матрицы размерности $m \times n$, в которой столбцами являются все наборы из предиката.

Пусть есть матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ и n -местная ультрафункция $f(x_1, \dots, x_n)$. Определим $f \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ как $\begin{pmatrix} f(a_1^1, \dots, a_1^n) \\ \vdots \\ f(a_m^1, \dots, a_m^n) \end{pmatrix}$.

С учетом этих обозначений, утверждение, что ультрафункция f не сохраняет некоторый предикат R^m означает то, что из столбцов матрицы A предиката R^m можно составить матрицу B такую, что $f(B)$ не принадлежит R^m . Не ограничивая общности, считаем, что $B = A$.

Приведем список всех максимальных клонов для множества P_2^- , описанных в [2]:

- 1) \mathbb{P}_2 – класс всюду определенных функций;
- 2) \mathbb{T}_0^- – класс функций, которые сохраняют 0;
- 3) \mathbb{T}_1^- – класс функций, которые сохраняют 1;
- 4) \mathbb{S}^- – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{S}^- = \begin{pmatrix} 01- \\ 10- \end{pmatrix}$;
- 5) \mathbb{L}^- – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{L}^- = \begin{pmatrix} 1001- \\ 1010- \end{pmatrix}$;
- 6) \mathbb{M}^- – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{M}^- = \begin{pmatrix} 100-0- \\ 101--1 \end{pmatrix}$;
- 7) \mathbb{K}_1 – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 011-1- \\ 101--1 \end{pmatrix}$;

8) \mathbb{K}_2 – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - & - & 1 \\ 0 & 1 & - & 0 & - & 0 \end{pmatrix}$;

9) \mathbb{K}_3 – класс функций, сохраняющих предикат

$$\mathbb{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 0 \\ 0 & - & 0 & - & - & - & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

10) \mathbb{K}_4 – класс функций, сохраняющих предикат

$$\mathbb{K}_4 = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 & - & - & 0 & 0 & - & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

11) \mathbb{K}_5 – класс, состоящий из всех функций существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций принимающих два значения, одно из которых есть «-».

3. Свойства максимальных клон

3.1. Свойства ультрафункций, не принадлежащих клону \mathbb{K}_5

Теорема 1. *Для ультрафункции f не принадлежащей клону \mathbb{K}_5 справедливо:*

- а) если $f \notin \mathbb{T}_0^-$, то $f \notin \mathbb{M}^-$, $f \notin \mathbb{K}_2$, $f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$;
- б) если $f \notin \mathbb{T}_1^-$, то $f \notin \mathbb{M}^-$, $f \notin \mathbb{K}_1$, $f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$;
- в) если $f \in \mathbb{T}_0^-$, $f \notin \mathbb{T}_1^-$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_2$;
- г) если $f \notin \mathbb{T}_0^-$, $f \in \mathbb{T}_1^-$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_1$;
- д) если $f \notin \mathbb{P}_2$, то $f \notin \mathbb{L}^-$, $f \notin \mathbb{K}_3$, $f \notin \mathbb{K}_4$;
- е) если $f \in \mathbb{P}_2$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_1$, $f \notin \mathbb{K}_2$, $f \notin \mathbb{K}_3$, $f \notin \mathbb{K}_4$.

Доказательство. а) Из $f \notin \mathbb{T}_0^-$ следует, что f не сохраняет 0, т. е. на наборе $(0, \dots, 0)$ принимает значение 1 или «-». Кроме этого, выполняется $f \notin \mathbb{K}_5$. Значит существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где значение ультрафункции равно 0, и набор $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, где значение ультрафункции равно 1. Рассмотрим набор $(0, \dots, 0)$ с набором $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, получим

$$f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Отсюда, для этих двух вариантов, имеем непринадлежность клонам \mathbb{M}^- и \mathbb{K}_3 , а отдельно для варианта $(10)^t$ еще непринадлежность клонам \mathbb{K}_2 и \mathbb{K}_4 .

Теперь для варианта $(-0)^t$ рассмотрим набор $(0, \dots, 0)$ с набором $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, получим

$$f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ультрафункция f не принадлежит клонам \mathbb{K}_2 и \mathbb{K}_4 .

б) Доказательство этого свойства аналогично предыдущему.

в) Ультрафункции, удовлетворяющие условиям утверждения, сохраняют 0, не сохраняют 1 и для каждой из них существует набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на котором значение функции равно 1. Рассмотрим в совокупности наборы $(0, \dots, 0)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$, $(1, \dots, 1)$, причем на наборе $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ значение ультрафункции может быть 1, 0, или «-». Таким образом, получим

$$f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1 & \dots & \bar{\alpha}_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \\ - \end{pmatrix} \right\}.$$

Если ультрафункция f принимает первое значение, то она не принадлежит клону \mathbb{K}_2 , в остальных случаях — клону \mathbb{L}^- .

г) Доказательство проводится по аналогии с доказательством пункта в).

д) Так как $f \notin \mathbb{P}_2$ и $f \notin \mathbb{K}_5$, то ультрафункция является не всюду определенной и принимает три значения 0, 1, «-». Набор, на котором ультрафункция имеет значение «-», в совокупности с набором, где значение ультрафункции 0, дает непринадлежность клону \mathbb{L}^- .

Далее рассмотрим набор $(0, \dots, 0)$. Значение ультрафункции на нем может быть 0, или 1, или «-». Если на этом наборе значение ультрафункции 0, то выбрав набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на котором значение ультрафункции «-», получим

$$f \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \end{pmatrix}.$$

Выбранные наборы дадут непринадлежность клону \mathbb{K}_3 .

Если на наборе $(0, \dots, 0)$ значение ультрафункции 1 или «-», то выберем набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, на котором значение ультрафункции равно 0, и получим

$$f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Выбранные наборы также дадут непринадлежность клону \mathbb{K}_3 .

Рассмотрев все возможные значения на наборе $(1, \dots, 1)$, получим непринадлежность клону \mathbb{K}_4 .

Таким образом, при $f \notin \mathbb{P}_2$ и $f \notin \mathbb{K}_5$ имеем непринадлежность клонам \mathbb{L}^- , \mathbb{K}_3 , \mathbb{K}_4 одновременно.

е) Ультрафункции всюду определены и существенно зависят не менее чем от двух переменных. Тогда подстановками констант из них можно получить ультрафункцию $f_1 = x_1x_2 + ax_1 + bx_2 + c$ или $f_2 = x_1 + x_2 + d$.

Ультрафункция f_1 содержит нечетное количество нулей и единиц, и на наборах из предиката \mathbb{L}^- она дает набор, не принадлежащий предикату \mathbb{L}^- .

Ультрафункция f_2 на наборах из предиката \mathbb{K}_1 дает набор, не принадлежащий предикату \mathbb{K}_1 , на наборах из предиката \mathbb{K}_2 дает набор, не принадлежащий предикату \mathbb{K}_2 , на наборах из предиката \mathbb{K}_3 дает набор, не принадлежащий предикату \mathbb{K}_3 и на наборах из предиката \mathbb{K}_4 дает набор, не принадлежащий предикату \mathbb{K}_4 .

Таким образом, всюду определенные существенно зависящие не менее чем от двух переменных ультрафункции не принадлежат клону \mathbb{L}^- или клонам $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3, \mathbb{K}_4$ одновременно. \square

Следствие 1. *Клон, состоящий только из булевых функций, не принадлежащих клону \mathbb{K}_5 , не содержится в клоне \mathbb{L}^- или в клонах $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3, \mathbb{K}_4$.*

Следствие 2. *Ультрафункции, не принадлежащие клонам \mathbb{T}_1^- и \mathbb{K}_5 порождают не более 32 классов эквивалентности по отношению принадлежности максимальным клонам.*

3.2. УЛЬТРАФУНКЦИИ ИЗ КЛОНА \mathbb{S}

Мы рассматриваем здесь свойства ультрафункций относительно принадлежности клону \mathbb{S}^- .

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения для ультрафункции f :*

- а) *если $f \notin \mathbb{S}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_1$ или $f \notin \mathbb{K}_2$;*
- б) *если $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \notin \mathbb{M}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_1$ и $f \notin \mathbb{K}_2$;*
- в) *если $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \in \mathbb{M}^-$, то $f \in \mathbb{K}_1$ и $f \in \mathbb{K}_2$.*

Доказательство. а) Так как $f \notin \mathbb{S}^-$, то выполняется:

$$f \begin{pmatrix} 01- \\ 10- \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Если ультрафункция f принимает одно из первых трех возможных значений, то она не сохраняет предикат клона \mathbb{K}_1 . Если ультрафункция f принимает одно из трех последних возможных значений, то она не сохраняет предикат клона \mathbb{K}_2 . Соответственно ультрафункции такого вида не принадлежат клону \mathbb{K}_1 или клону \mathbb{K}_2 .

б) Так как $f \notin \mathbb{M}^-$, то на наборах из предиката \mathbb{M}^- она принимает значение $(10)^t$, $(1-)^t$, или $(-0)^t$. Кроме этого на наборах из предиката \mathbb{S}^- функция принимает значения, принадлежащие этому предикату.

Тогда

$$f \begin{pmatrix} 100-0- \\ 101--1 \\ 011-1- \\ 010--0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь первая и вторая строки образованы столбцами предиката \mathbb{M}^- , третья строка противоположна первой, а четвертая — второй.

Если рассмотреть вторую строку с третьей строкой, то имеем варианты значений ультрафункции $(00)^t$, $(-0)^t$ или $(0-)^t$ на наборах, принадлежащих предикату \mathbb{K}_1 . Значит такая ультрафункция не сохраняет предикат клона \mathbb{K}_1 и соответственно этому клону не принадлежит. Если теперь рассмотреть первую строку с четвертой строкой, то имеем варианты значений ультрафункции $(11)^t$, $(1-)^t$ или $(-1)^t$ на наборах из предиката \mathbb{K}_2 . Значит такая ультрафункция не сохраняет предикат клона \mathbb{K}_2 и соответственно этому клону не принадлежит. Таким образом, ультрафункции, принадлежащие клону \mathbb{S}^- и не принадлежащие клону \mathbb{M}^- , не принадлежат клонам \mathbb{K}_1 и \mathbb{K}_2 одновременно.

в) Пусть функция f удовлетворяет условиям утверждения, но не принадлежит \mathbb{K}_1 . Это означает, что на наборах из предиката \mathbb{K}_1 она принимает значение $(00)^t$, или $(0-)^t$, или $(-0)^t$. Допишем к строкам предиката \mathbb{K}_1 ниже строку, противоположную верхней строке. Значение ультрафункции на дописанной строке может быть 0, 1 или «-». Рассмотрим в совокупности все три строки:

$$f \begin{pmatrix} 011-1- \\ 101--1 \\ 100-0- \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0(1)(-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0(1)(-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0(1)(-) \end{pmatrix} \right\}.$$

Если на первой строке значение ультрафункции f равно 0, а на третьей строке ее значение 0 или «-», то такая ультрафункция не сохраняет предикат клона \mathbb{S}^- .

Если на первой строке значение ультрафункции f равно 0, а на третьей строке ее значение 1, то рассмотрим третью строку совместно со второй строкой. Значение ультрафункции здесь имеет варианты $(10)^t$ или $(1-)^t$ на наборах, принадлежащих предикату \mathbb{M}^- . Следовательно, в этом случае ультрафункция не сохраняет предикат клона \mathbb{M}^- .

Если на первой строке значение ультрафункции «-», то допишем четвертую строку, противоположную второй строке. Значение ультрафункции на дописанной строке может быть 0, или 1, или «-». Рассмотрим в совокупности все четыре строки:

$$f \begin{pmatrix} 011-1- \\ 101--1 \\ 100-0- \\ 010--0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} - \\ 0 \\ 0(1)(-) \\ 0(1)(-) \end{pmatrix} \right\}.$$

Если на четвертой строке получены 0 или «-», то вторая и четвертая строки в совокупности дадут непринадлежность клону \mathbb{S}^- , а если на ней 1, то четвертая строка в совокупности с первой строкой дадут непринадлежность клону \mathbb{M}^- .

Пусть теперь $f \notin \mathbb{K}_2$. Это означает, что на наборах из предиката \mathbb{K}_2 она принимает значения $(11)^t$, $(1-)^t$ или $(-1)^t$. Допишем к строкам предиката \mathbb{K}_2 ниже строку, противоположную первой строке. Значение ультрафункции на дописанной строке может быть 0, 1 или «-». Рассмотрим в совокупности все три строки:

$$f \begin{pmatrix} 000--1 \\ 01-0-0 \\ 111--0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0(1)(-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0(1)(-) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ 0(1)(-) \end{pmatrix} \right\}.$$

Если на первой строке значение ультрафункции f равно 1, а на третьей строке ее значение 1 или «-», то такая ультрафункция не принадлежит предикату клона \mathbb{S}^- .

Если на первой строке значение ультрафункции f равно 1 или «-», а на третьей строке ее значение 0, то рассмотрим вторую строку совместно с третьей строкой. Значение ультрафункции здесь имеет варианты $(10)^t$ или $(-0)^t$ на наборах, принадлежащих предикату \mathbb{M}^- . Следовательно, в этом случае ультрафункция не сохраняет предикат клона \mathbb{M}^- .

Если на первой строке значение ультрафункции «-», а на третьей строке ее значение 1 или «-», то в соответствии со второй строкой ниже допишем противоположную строку. Значение ультрафункции на дописанной строке может быть 0, или 1, или «-». Рассмотрим в совокупности все четыре строки:

$$f \begin{pmatrix} 000--1 \\ 01-0-0 \\ 111--0 \\ 10-1-1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} - \\ 1 \\ 1(-) \\ 0(1)(-) \end{pmatrix} \right\}.$$

Если на четвертой строке получены 1 или «-», то вторая и четвертая строки в совокупности дадут непринадлежность клону \mathbb{S}^- , а если на ней 0, то первая строка в совокупности с четвертой строкой дадут непринадлежность клону \mathbb{M}^- .

Таким образом при $f \notin \mathbb{K}_1$ или при $f \notin \mathbb{K}_2$ имеем непринадлежность клону \mathbb{S}^- или клону \mathbb{M}^- . Соответственно, если $f \in \mathbb{S}^- \cap \mathbb{M}^-$, то она принадлежит клонам \mathbb{K}_1 и \mathbb{K}_2 одновременно. \square

Следствие 3. *Все клоны из $\mathbb{S}^- \cap \mathbb{M}^-$ содержатся в клоне $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$.*

Следствие 4. *Все клоны из $\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_2$ содержатся в клоне \mathbb{S}^- .*

3.3. СВОЙСТВА УЛЬТРАФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛОНАМ \mathbb{T}_0 И \mathbb{T}_1

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- а) если $f \in \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{T}_1^-$ или $f \notin \mathbb{T}_0^-$ и $f \in \mathbb{T}_1^-$, то $f \notin \mathbb{S}^-$;
- б) если $f \in \mathbb{T}_0^-, f \in \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{S}^-$ или $f \notin \mathbb{T}_0^-, f \notin \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{S}^-$, то $f \notin \mathbb{L}^-$;
- в) если $f \notin \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_1$ или $f \notin \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_2$, то $f \notin \mathbb{M}^-$;
- г) если $f \in \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_2$, то $f \notin \mathbb{K}_4$;
- д) если $f \in \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_1$, то $f \notin \mathbb{K}_3$.

Доказательство. а) Ультрафункции имеют два вида: а) сохраняют 0 и не сохраняют 1; б) не сохраняют 0 и сохраняют 1. Рассмотрим наборы $(0, \dots, 0)$ и $(1, \dots, 1)$:

$$а) f \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \end{pmatrix} \right\}; б) f \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Следовательно, такие ультрафункции не сохраняют предикат клона \mathbb{S}^- и, соответственно, не принадлежат этому клону.

б) Очевидно, что ультрафункция, удовлетворяющая условиям этого утверждения не может на всех наборах принимать значение $-$. Кроме того, если для ультрафункции f есть набор, на котором она принимает значение $-$ и есть набор на котором она принимает значение 0 (1), то, очевидно, для такой ультрафункции утверждение выполняется.

Таким образом осталось рассмотреть ультрафункции, которые на всех наборах принимают значение 0 или 1.

С учетом приведенных замечаний рассматриваем четыре случая:

$$f \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \\ \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \\ 1 \dots 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

Для каждого случая получаем, что f — нелинейная булева функция. Тогда подстановками констант из нее можно получить нелинейную функцию, существенно зависящую от двух аргументов $g(x, y) = x \cdot y + ax + by + c$. Во всех случаях дальнейшими подстановками $(01)^t$ и $(--)^t$ или $(10)^t$ и $(--)^t$ можно получить $(0-)$ или $(1-)$.

в) Ультрафункции имеют два вида: а) не сохраняют 0 и на наборах из предиката \mathbb{K}_1 принимают значение $(00)^t$, $(0-)^t$ или $(-0)^t$; б) не сохраняют 1 и на наборах из предиката \mathbb{K}_2 принимают значение $(11)^t$, $(1-)^t$ или $(-1)^t$.

В случае а) рассмотрим набор $(0, \dots, 0)$ с набором на котором значение ультрафункции равно 0. Имеем два возможных варианта значений

ультрафункции на этих наборах:

$$f \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Каждое из полученных значений не принадлежит предикату клона \mathbb{M}^- .

В случае б) рассмотрим набор на котором значение ультрафункции равно 1, с набором $(1, \dots, 1)$. И здесь имеем два возможных варианта значений ультрафункции:

$$f \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix} \right\}.$$

Каждое из этих значений не принадлежит предикату клона \mathbb{M}^- .

г) Ультрафункции сохраняют 0 и на наборах из предиката \mathbb{K}_2 принимают значение $(11)^t$, или $(1-)^t$, или $(-1)^t$. Рассмотрим набор $(0, \dots, 0)$ в совокупности с наборами из предиката \mathbb{K}_2 , получим

$$f \begin{pmatrix} 000000 \\ 000--1 \\ 01-0-0 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Каждое из полученных возможных значений не принадлежит предикату клона \mathbb{K}_4 . Таким образом, при $f \in \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_2$ имеем непринадлежность клону \mathbb{K}_4 .

д) Ультрафункции сохраняют 1 и на наборах из предиката \mathbb{K}_1 принимают значение $(00)^t$, или $(0-)^t$, или $(-0)^t$. Рассмотрим набор $(1, \dots, 1)$ в совокупности с наборами из предиката \mathbb{K}_1 , получим

$$f \begin{pmatrix} 111111 \\ 011-1- \\ 101--1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Каждое из полученных возможных значений не принадлежит предикату клона \mathbb{K}_3 . Таким образом, при $f \in \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_1$ имеем непринадлежность клону \mathbb{K}_3 . \square

Следствие 5. *Клоны из интервалов $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_0)$ и $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_1)$ не содержатся в клоне \mathbb{S} .*

Список литературы

1. Казимиров А. С. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 / А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев, Л. В. Токарева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 61–78.

2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2009. – №2(68). – С. 60–79.
3. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики / С. В. Яблонский // Мат. сб. – 1952. – Т. 30, № 2(72), С. 329–348.
4. Classification and basis enumerations in many-valued logics / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. – Boston, 1987. – P. 151–160.
5. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic. – Rostock, 1989. – P. 8–13.
6. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic / L. Krnić // Glasnik matematičko-fizički i astronomski. Ser 2. – 1965. – Vol. 20. – P. 23–32.
7. Lau D. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$ / D. Lau, M. Miyakawa // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 01, N 02. – P. 255–282.
8. Miyakawa M. Classification of three-valued logical functions preserving 0 / M. Miyakawa, I. Rosenberg, I. Stojmenović // Discrete Applied Mathematics. – 1990. – Vol. 28. – P. 231–249.
9. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton : Univer. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.
10. Stojmenović I. Classification of P_3 and the enumeration of base of P_3 / I. Stojmenović // Rev. of Res. 14, Fat. of Sci., Math. Ser., Novi Sad. – 1984. – P. 73–80.

Замарацкая Светлана Вячеславовна, программист, Медицинский информационно-аналитический центр Иркутской области, 664011, Иркутск, ул. Каландаришвили, 2, (e-mail: svetlana.v.zam@gmail.com)

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 521298 (e-mail: vl.panteleyev@gmail.com)

S. V. Zamaratskaya, V. I. Panteleev

On maximal clones of ultrafunctions of rank 2

Abstract. This paper considers functions mapping a 2-element set A to all non-empty subsets of A . These functions are called ultrafunctions of rank 2. Ultrafunctions of rank 2 can be interpreted as functions on all non-empty subsets of A . Value of ultrafunction on set $B \subseteq A$ is determined as intersection of values on all elements of B , if this intersection is not empty, and as union of these values otherwise. Thus an ultrafunction can be specified by all of its values on elements of A . Superposition of ultrafunctions is determined the same way.

The number of maximal clones for all ultrafunctions of rank 2 is equal to 11 [V. Panteleev, 2009]

This paper studies properties of ultrafunctions with respect of their inclusion in maximal clones \mathbb{K}_5 , \mathbb{S}^- , \mathbb{T}_0^- and \mathbb{T}_1^- . These properties give some results concerning clone lattice (e.g., clones of intervals $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_0)$ and $I(\mathbb{T}_0 \cap \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_1)$ are not included in clone \mathbb{S}^- ; all self-dual and monotone ultrafunctions are included in \mathbb{K}_1 and \mathbb{K}_2). Some borders on classes of equivalence number are described (ultrafunctions not included in clones \mathbb{T}_1^- and \mathbb{K}_5 generate no more than 32 classes of equivalence by relation of belonging to

maximal clones). These results can be applied to classification of ultrafunctions by their inclusion in maximal clones.

Keywords: ultrafunction, clone, base, maximal clone.

References

1. Kazimirov A.S., Pantelev V. I., Tokareva L.V. Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set (in Russian). *The bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2014, vol. 10, pp. 61-78.
2. Pantelev V.I. The Completeness Criterion for Certain Boolean Functions (in Russian). *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2009, vol. 2, no 68, pp 60-79.
3. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions (in Russian). *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no 2(72), pp. 329-348.
4. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations in many-valued logics // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. Boston, 1987, pp. 151-160.
5. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions. *Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic*. Rostock, 1989, pp. 8-13.
6. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic/ *Glasnik matematičko-fizički i astronomski. Ser. 2*, 1965, vol. 20, p. 23-32.
7. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$ / *Asian-European Journal of Mathematics*, 2008, vol. 01, no 02, pp. 255-282.
8. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of three-valued logical functions preserving 0. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231-249.
9. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic. *Annals of Math. Studies*. Princeton, Univer. Press, 1941, vol. 5. 122 p.
10. Stojmenović I. Classification of P_3 and the enumeration of base of P_3 . *Rev. of Res. 14, Fat. of Sci., Math. Ser.* Novi Sad, 1984, pp. 73-80.

Zamaratskaya Svetlana Vyacheslavovna, Programmer, Medical Information-Analytic Center of Irkutsk Region, 2, Kalendarishvili, Irkutsk, 664011 (e-mail: svetlana.v.zam@gmail.com)

Panteleyev Vladimir Innokent'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)521298 (e-mail: vl.panteleyev@gmail.com)