Серия «Математика»
2018. Т. 23. С. 36—45

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.246
MSC 62H25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.23.36

О максимизации критерия квадратичного взвешенного каппа *

В. М. Неделько
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Аннотация. В работе получено аналитическое выражение для оптимальной оценки числовой зависимости по критерию квадратичного взвешенного каппа, а также выражение для оптимального значения данного критерия. Показано, что оптимальная решающая функция получается из функции регрессии линейным преобразованием. При этом коэффициенты этого преобразования могут быть найдены из условия равенства математических ожиданий и дисперсий прогнозируемой величины и её оценки. Коэффициент квадратичного взвешенного каппа изначально был предложен как альтернатива коэффициенту корреляции для отражения степени связи двух характеристик, однако в последнее время достаточно широко используется как критерий качества прогноза в задаче восстановления зависимостей (регрессионного анализа). Вместе с тем свойства этого коэффициента в данном контексте до последнего времени оставались малоизученными. Установленные в работе свойства квадратичного взвешенного каппа позволяют сделать вывод о том, что целесообразность его использования в качестве критерия качества решающей функции в большинстве случаев вызывает сомнения. Получаемое решение фактически основывается на функции регрессии, но дисперсия прогноза искусственно делается равной дисперсии исходной величины. Такая поправка по сути искажает прогноз, не улучшая статистических свойств решающей функции.

Ключевые слова: критерии согласия, квадратичное взвешенное каппа, средний квадрат отклонения, регрессия.

* Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН №I.5.1., проект №0314-2016-0015 и Российского фонда фундаментальных исследований, проект №18-07-00600.

Введение

Критерий квадратичного взвешенного каппа (quadratic weighted kappa) может использоваться в качестве меры качества (точности) решающей функции в задачах анализа данных [1–3]. В качестве примеров его использования можно привести следующие задачи (конкурсы по анализу данных) с портала Kaggle (www.kaggle.com):

— The Hewlett Foundation: Automated Essay Scoring;
— Crowdflower Search Results Relevance;
— Diabetic Retinopathy Detection;
— Prudential Life Insurance Assessment;
— Caesars Customer Gaming Valuation Prediction.

Вместе с тем в настоящее время практически отсутствуют публикации, в которых бы исследовались свойства данного критерия. Существуют работы, в которых упоминается о его использовании [11] [13], но практически единственной работой, где бы целенаправленно исследовались свойства этого критерия, является [15].

В указанной работе установлен интересный факт: оказывается, что линейная регрессия, построенная в соответствии с критерием quadratic weighted kappa, получается из обычной регрессионной модели (построенной по критерию минимизации среднего квадрата отклонения) простым делением на само значение kappa.

В данной работе будет получен аналогичный результат для регрессионной зависимости произвольного вида.

Изначально Cohen's kappa была предложена [10] как характеристика согласия между двумя ранжированиями (например, экспертными оценками). Формально данная величина является некоторой характеристикой связи двух случайных величин. При этом эти величины не являются числовыми, поэтому термин «случайная величина» мы используем с той оговоркой, что при необходимости нечисловые значения могут формально быть «закодированы» числами.

В отличие от, например, коэффициента корреляции, Cohen's kappa ориентирована на нечисловые величины (т. е. на характеристики, измеренные в номинальной шкале).

В дальнейшем были предложены модификации [14] данного коэффициента, в частности взвешенное каппа, которое является прямым обобщением Cohen's kappa. Варианты каппа с весами позволяют учесть отношения, присущие ранговой и числовой шкалам.

Возможность применения взвешенных вариантов каппа для отражения связи между числовыми характеристиками позволило применять эту величину для оценивания точности прогноза в задаче восстановления зависимостей [6–8]. Это выводит данный критерий за рамки изначальной области его применимости [12], поэтому для обоснования такого использования требуются дополнительные исследования [9].

Коэффициент квадратичного взвешенного каппа в своём выражении содержит величину среднего квадрата отклонения, которая используется как стандартный критерий [4] в задачах регрессионного анализа [5]. Поэтому естественно провести сравнение коэффициента каппа и стандартного критерия ошибок.

1. Основные понятия

Пусть X — пространство значений переменных, используемых для прогноза, а Y — пространство значений прогнозируемых переменных, и пусть определена некоторая вероятностная мера на заданной σ-алгебре подмножеств множества $D = X \times Y$. Имеем вероятностное пространство $\langle D, \mathfrak{B}, \mathsf{P}\rangle$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, P — вероятностная мера.

Решающей функцией называется соответствие $\lambda\colon X \to Y$.

Качество принятого решения оценивается заданной функцией потерь $\mathcal{L}\colon Y^2 \to [0, \infty)$. Под риском будем понимать средние потери:

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathsf{E}\mathcal{L}(y, \lambda(x)) = \int_D \mathcal{L}(y, \lambda(x))\ \mathsf{P}(dx, dy), \quad x \in X, y \in Y. \tag{1.1}$$

Задача восстановления зависимостей возникает, когда в качестве значений целевой переменной Y выступает множество действительных чисел.

В задаче оценивания регрессии используется квадратичная функция потерь $\mathcal{L}(y, y') = (y - y')^2$. В этом случае риск есть средний квадрат отклонения

$$R(\lambda) = \mathsf{E}(y - \lambda(x))^2 = \int_D (y - \lambda(x))^2\ \mathsf{P}(dx, dy).$$

Введём обозначение

$$U(\lambda) = \int_D (y - \lambda(x))^2\ \mathsf{P}_X(dx)\ \mathsf{P}_Y(dy),$$

где $\mathsf{P}_X(dx)$, $\mathsf{P}_Y(dy)$ — маргинальные распределения, соответствующие совместному распределению $\mathsf{P}(dx, dy)$.

Выполним преобразования

$$U(\lambda) = \int_D (y^2 - 2y\lambda(x) + \lambda^2(x))\ \mathsf{P}_X(dx)\ \mathsf{P}_Y(dy) =$$

$$\mathsf{E}y^2 - 2\mathsf{E}y\mathsf{E}\lambda(x) + \mathsf{E}\lambda^2(x) = \mathsf{D}y + \mathsf{D}\lambda(x) + (\mathsf{E}y - \mathsf{E}\lambda(x))^2. \tag{1.2}$$

Определение 1. *Квадратичным взвешенным каппа называется величина*

$$\kappa(\lambda) = 1 - \frac{R(\lambda)}{U(\lambda)} \tag{1.3}$$

Пусть $V = ((x_i, y_i) \in D \mid i = 1, \ldots, N)$, $V \in D^N$ — случайная независимая выборка из распределения P.

Любые характеристики, введённые для распределений, можно определить и для выборок, поскольку выборке можно сопоставить так называемое эмпирическое распределение.

Эмпирический риск определяется как средние потери на выборке:

$$\widetilde{\mathcal{R}}(V, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}(y_i, \lambda(x_i)).$$

Выражение для эмпирического риска является частным случаем формулы 1.1, если в неё подставить эмпирическое распределение.

Если эмпирическое распределение подставить в формулу 1.3, то получится определение выборочного квадратичного взвешенного каппа

$$\tilde{\kappa}(V, \lambda) = 1 - \frac{\widetilde{R}(V, \lambda)}{\widetilde{U}(V, \lambda)},$$

где

$$\widetilde{R}(V, \lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \lambda(x_i))^2, \quad \widetilde{U}(V, \lambda) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (y_i - \lambda(x_j))^2.$$

Приведённые определения могут показаться не вполне привычными. Действительно, обычно квадратичное взвешенное каппа определяют не для решающих функций, а как некоторую характеристику на паре случайных величин.

Пусть $\mathcal{Y}$ и $\hat{\mathcal{Y}}$ — случайные величины с функциями распределения $F_{\mathcal{Y}}(y)$ и $F_{\hat{\mathcal{Y}}}(\hat{y})$ соответственно, и пусть $F(y, \hat{y})$ — их совместная функция распределения.

Квадратичным взвешенным каппа (для пары случайных величин) называется величина

$$\kappa(\mathcal{Y}, \hat{\mathcal{Y}}) = 1 - \frac{R(\mathcal{Y}, \hat{\mathcal{Y}})}{U(\mathcal{Y}, \hat{\mathcal{Y}})} \tag{1.4}$$

где

$$R(\mathcal{Y}, \hat{\mathcal{Y}}) = \int (y - \hat{y})^2 \, dF(y, \hat{y}), \quad U(\mathcal{Y}, \hat{\mathcal{Y}}) = \int (y - \hat{y})^2 \, dF_{\mathcal{Y}}(y) \, dF_{\hat{\mathcal{Y}}}(\hat{y}).$$

Из этого определения получится 1.3, если в роли $\hat{\mathcal{Y}}$ взять $\lambda(x)$.

2. Оптимальная решающая функция

Пусть $\overline{y}(x) = \mathsf{E}[y\,|x]$ — функция регрессии, т. е. функция условного математического ожидания y в точке x, и пусть $y_0 = \mathsf{E}y$ – безусловное математическое ожидание.

В задаче регрессионного анализа (с классическим критерием минимизации среднеквадратичного отклонения) среди константных решающих функций оптимальной является функция, дающая в качестве прогноза значение y_0. Однако с точки зрения критерия 1.3 все константные решения имеют одинаковое качество (нулевое). Выясним, как выглядит оптимальное решение по критерию квадратичного взвешенного каппа.

Обозначим $\kappa^* = \max\limits_{\lambda(\cdot)} \kappa(\lambda)$.

Утверждение 1. *Решающая функция, максимизирующая $\kappa(\lambda)$, есть*

$$\lambda^*(x) = y_0 + \frac{\overline{y}(x) - y_0}{\kappa^*}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Воспользуемся вариационным подходом. Представим решающую функцию в виде $\lambda(x) = \lambda^*(x) + \alpha\lambda_1(x)$. Продифференцируем функционал по параметру

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\kappa(\lambda) =$$

$$\frac{R(\lambda)\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\lambda) - U(\lambda)\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\lambda)}{U^2(\lambda)} = \frac{(1-\kappa(\lambda))\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\lambda) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\lambda)}{U(\lambda)}. \tag{2.2}$$

Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\mathsf{E}(y - \lambda(x))^2 =$$

$$2\mathsf{E}\lambda(x)\lambda_1(x) - 2\mathsf{E}y\lambda_1(x) = 2\mathsf{E}\lambda(x)\lambda_1(x) - 2\mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda_1(x).$$

Далее

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathsf{E}y^2 - 2\mathsf{E}y\mathsf{E}\lambda(x) + \mathsf{E}\lambda^2(x)) = 2\mathsf{E}\lambda(x)\lambda_1(x) - 2y_0\mathsf{E}\lambda_1(x).$$

Приравняем к нулю производную 2.2 при $\alpha = 0$. Учитывая, что $\lambda(x) = \lambda^*(x)$ при $\alpha = 0$, получаем

$$(1-\kappa^*)(\mathsf{E}\lambda^*(x)\lambda_1(x) - y_0\mathsf{E}\lambda_1(x)) = \mathsf{E}\lambda^*(x)\lambda_1(x) - \mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda_1(x).$$

Перегруппируем:

$$\mathsf{E}\left[\lambda_1(x)\left((1-\kappa^*)(\lambda^*(x) - y_0) + \overline{y}(x) - \lambda^*(x)\right)\right] = 0.$$

Поскольку функция $\lambda_1(x)$ произвольная, получаем

$$(1-\kappa^*)(\lambda^*(x) - y_0) + \overline{y}(x) - \lambda^*(x) = 0,$$

откуда

$$\lambda^*(x) = y_0 + \frac{\overline{y}(x) - y_0}{\kappa^*}.$$

Поскольку мы получили единственное решение вариационного уравнения, и при этом искомый минимум существует (кроме того, оптимизационная задача не имеет ограничений), заключаем, что найденное решение и является оптимальным.

$\square$

3. Оптимальное значение критерия

В предыдущем разделе мы получили выражение для оптимальной решающей функции, в котором в качестве неизвестного параметра присутствовало само оптимальное значение функционала. Найдём теперь это значение.

Утверждение 2. *Оптимальное значение функционала $\kappa(\lambda)$ есть*

$$\kappa^* = \sqrt{\frac{\mathsf{D}\overline{y}(x)}{\mathsf{D}y}}.$$

Доказательство. Преобразуем выражение для риска

$$R(\lambda) = \mathsf{E}(y - \lambda(x))^2 = \mathsf{E}y^2 - 2\mathsf{E}y\lambda(x) + \mathsf{E}\lambda^2(x) =$$

$$\mathsf{D}y + \mathsf{D}\lambda(x) + (\mathsf{E}\lambda(x) - y_0)^2 + 2(y_0\mathsf{E}\lambda(x) - \mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda(x))$$

и подставим вместе с 1.2 в выражение 1.3

$$\kappa(\lambda) = 1 - \frac{R(\lambda)}{U(\lambda)} = \frac{2(\mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda(x) - y_0\mathsf{E}\lambda(x))}{\mathsf{D}y + \mathsf{D}\lambda(x) + (\mathsf{E}\lambda(x) - y_0)^2}. \tag{3.1}$$

Подставив $\lambda(x) = \lambda^*(x)$, получим

$$\kappa^* = 2 \cdot \frac{\mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda^*(x) - (y_0)^2}{\mathsf{D}y + \mathsf{D}\lambda^*(x)} = \frac{2\kappa^*\mathsf{D}\lambda^*(x)}{\mathsf{D}y + \mathsf{D}\lambda^*(x)}.$$

Здесь мы учли, что $\mathsf{E}\lambda^*(x) = y_0$ и что из 2.1 получаем $\mathsf{E}\overline{y}(x)\lambda^*(x) = \kappa^*\mathsf{D}\lambda^*(x) + (y_0)^2$.

Получили $\mathsf{D}\lambda^*(x) = \mathsf{D}y$. Из 2.1 находим $\mathsf{D}\lambda^*(x) = \frac{\mathsf{D}\overline{y}(x)}{(\kappa^*)^2}$.

Искомое соотношение получено. $\square$

4. Обсуждение

В работе были получены простые явные выражения для оптимальной решающей функции в соответствии с критерием максимизации квадратичного взвешенного каппа, а также выражение для оптимального значения критерия.

Как оказалось, оптимальная решающая функция линейно связана с функцией регрессии, но существенно от неё отличается.

Фактически отличие состоит в появлении масштабирующего коэффициента, причём масштаб выбирается таким, чтобы дисперсия прогноза была равна дисперсии прогнозируемой величины.

Это даёт простой рецепт получения оптимального решения по критерию каппа: нужно построить «обычную» регрессию, т.е. решение, минимизирующее средний квадрат отклонения, и умножить его на коэффициент, обеспечивающий равенство дисперсий.

Полученные результаты аналогичны результатам работы [15], где рассматривался случай линейной зависимости. Заметим, что результаты из [15], видимо, не являются частным случаем доказанных здесь утверждений, поскольку в [15] ограничения накладываются не на вид «истинной» регрессионной зависимости, а на форму решающей функции. Вместе с тем результаты данной работы могут считаться более общими, поскольку имеют более широкую область применимости, ввиду отсутствия ограничивающих предположений.

Установленные свойства квадратичного взвешенного каппа могут рассматриваться как довод за то, чтобы не использовать этот критерий в качестве критерия оценивания качества решающей функции, поскольку данный критерий «заставляет» давать прогноз, существенно смещенный по отношению к условному математическому ожиданию. Причём эта смещённость не компенсируется появлением каких-либо полезных свойств получаемых решений. Нет практического смысла в том, чтобы искусственно увеличивать дисперсию прогнозируемых значений, добиваясь её равенства с исходной дисперсией целевой переменной.

Рассмотренный критерий (квадратичного взвешенного каппа) изначально разработан для других целей (таких, как оценка близости двух ранжирований), и для исходных целей его использовать более целесообразно, чем в качестве критерия в задаче восстановления зависимостей.

Список литературы

1. Бериков В. Б. Выбор оптимальной сложности класса логических решающих функций в задачах распознавания образов / В. Б. Бериков, Г. С. Лбов // Докл. Акад. наук. – 2007. – Т. 417, № 1. – С. 26–29.

2. Витяев Е. Е. Семантический вероятностный вывод предсказаний / Е. Е. Витяев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2017. – Т. 21. – С. 33–50. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.33
3. Генрихов И. Е О полных регрессионных решающих деревьях / И. Е.Генрихов, Е. В. Дюкова, В. И. Журавлёв // Машинное обучение и анализ данных. – 2016. – Т. 2, № 1. – С. 116–126. https//doi.org/10.21469/22233792.2.1.09
4. Ковалевский А. П. Выбор регрессионной модели зависимости массы тела от роста с помощью эмпирического моста / А. П. Ковалевский, Е. В. Шаталин // Вестн. Том. гос. ун-та. – 2015. – № 5(37). – С. 35–47. https://doi.org/10.17223/19988621/37/3
5. Линке Ю. Ю. Асимптотические свойства одношаговых взвешенных M-оценок с приложениями к задачам регрессии // Теория вероятностей и ее применение. – 2017. – Т. 62, № 3. – С. 468–498. https://doi.org/10.4213/tvp5122
6. Неделько В. М. Некоторые вопросы оценивания качества методов построения решающих функций // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычисл. техника и информатика. – 2013. – № 3(24). – С. 123–132.
7. Неделько В. М. Оценивание значимости переменных в моделях ранговой регрессии // Машинное обучение и анализ данных. – 2017. – Т. 3, № 2. – С. 151–159. https://doi.org/10.21469/22233792.3.2.05
8. Неделько В. М. Регрессионные модели в задаче классификации // Сиб. журн. индустр. математики. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 86–98.
9. Hermann B. Dependence of Weighted Kappa Coefficients on the Number of Categories / Hermann Brenner and Ulrike Kliebsch // Epidemiology. – 1996. – Vol. 7, N 2. – P. 199–202.
10. Cohen Jacob. A coefficient of agreement for nominal scales // Educational and Psychological Measurement. – 1960. – Vol. 20, N 1. – P. 37–46.
11. Feinstein A. R. High agreement but low Kappa: I. the problems of two paradoxes // Alvan R. Feinstein, Domenic V. Cicchetti // Journal of Clinical Epidemiology. – 1990. – Vol. 43, Is. 6. – P. 543–549.
12. Gwet K. L. Kappa Statistic is not Satisfactory for Assessing the Extent of Agreement between Raters / Kilem L. Gwet // Statistical Methods for Inter-Rater Reliability Assessment. – 2002. – N 1, April
13. Ludbrook J. Statistical Techniques for Comparing Measurers And Methods Of Measurement: A Critical Review / J. Ludbrook // Clinical and Experimental Pharmacology and Physiology. – 2002. – Vol. 29. – P. 527–536. https://doi.org/10.1046/j.1440-1681.2002.03686.x
14. Vanbelle S. A note on the linearly weighted kappa coefficient for ordinal scales / S. Vanbelle, A. Albert // Statistical Methodology. – 2009. – Vol. 6, Iss. 2. – P. 157–163.
15. Vaughn D. On The Direct Maximization of Quadratic Weighted Kappa / David Vaughn, Derek Justice // 2015. arXiv:1509.07107v1

Неделько Виктор Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия, 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4; Новосибирский государственный университет, Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2, (e-mail: nedelko@math.nsc.ru)

Поступила в редакцию 15.01.18

V. M. Nedel'ko

On the Maximization of Quadratic Weighted Kappa

Abstract. An analytical expression for the optimal estimation of the numerical dependence by the criterion of a quadratic weighted kappa and also the expression for the optimal value of this criterion were obtained. It is shown that the optimal decision function is obtained from the regression function by a linear transformation. The coefficients of this transformation can be found from the condition of equality of mathematical expectations and variances of the predicted value and its estimate. The quadratic weighted kappa coefficient was originally proposed as an alternative to the correlation coefficient to reflect the strength of dependence between two characteristics, but recently it has been widely used as a criterion for the quality of the forecast in the problem of recovery of dependencies (regression analysis). At the same time, the properties of this coefficient in this context are still poorly understood. The properties of the quadratic weighted kappa criterion revealed in the work allow us to conclude that the expediency of using it as a criterion for the quality of the decision function in most cases raises doubts. This criterion provides a solution that is actually based on the regression function, but the variance of the forecast is artificially made equal to the variance of the original value. This distorts the forecast without improving the statistical properties of the decision function.

Keywords: Quadratic weighted kappa, Cohen's kappa, regression, least squares, machine learning.

References

1. Berikov V.B., Lbov G.S. Bayes estimates for recognition quality on finite sets of events *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 71, no 3, pp. 327-330.
2. Vityaev E.E. Semantic Probabilistic Inference of Predictions *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika.* [The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2017, vol. 21, pp. 33-50. (In Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.21.33
3. Genrikhov I.E., Djukova E.V., Zhuravlyov V.I. About full regression decision trees *Machine learning and data analysis*, 2016, vol. 2, no 1. pp. 116-126. (In Russian). https//doi.org/10.21469/22233792.2.1.09
4. Kovalevskii A.P., Shatalin E.V. Vybor regressionnoy modeli zavisimosti massy tela ot rosta s pomoschju empiricheskogo mosta [The Choice of a Regression Model of the Body Weight on the Height via an Empirical Bridge]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2015, vol. 37, no 5, pp. 35-47. (In Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/37/3
5. Linke Yu.Yu. Asymptotic properties of one-step weighted M-estimators with application to some regression problems. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 2017, vol. 62, no 3, pp. 468-498. (in Russian). https://doi.org/10.4213/tvp5122
6. Nedelko V.M. Some aspects of estimating a quality of decision functions construction methods. *Tomsk state university. Journal of control and computer science*, 2013, vol. 24, no 3, pp.123-132. (in Russian)
7. Nedel'ko V.M. Estimation of feature importance for quantile regression *Machine learning and data analysis*, 2017, vol. 3, no 2, pp. 151–159. https://doi.org/10.21469/22233792.3.2.05

8. Nedel'ko V.M. Regressionnye modeli v zadache klassifikacii [Regression models in the classification problem]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2014, vol. XVII, no 1, pp. 86-98. (In Russian)
9. Brenner, Hermann, and Ulrike Kliebsch. Dependence of Weighted Kappa Coefficients on the Number of Categories *Epidemiology*, vol. 7, no 2, 1996, pp. 199–202.
10. Cohen Jacob. A coefficient of agreement for nominal scales *Educational and Psychological Measurement*, 1960, vol. 20, no 1, pp. 37–46.
11. Alvan R. Feinstein, Domenic V. Cicchetti. High agreement but low Kappa: I. the problems of two paradoxes *Journal of Clinical Epidemiology*, 1990, vol. 43, issue 6, pp. 543–549.
12. Kilem L. Gwet. Kappa Statistic is not Satisfactory for Assessing the Extent of Agreement Between Raters *Statistical Methods For Inter-Rater Reliability Assessment*, 2002, no. 1.
13. Ludbrook J. Statistical Techniques For Comparing Measurers And Methods Of Measurement: A Critical Review *Clinical and Experimental Pharmacology and Physiology*, 2002, vol. 29, pp. 527-536. https://doi.org/10.1046/j.1440-1681.2002.03686.x
14. S. Vanbelle, A. Albert. A note on the linearly weighted kappa coefficient for ordinal scales *Statistical Methodology*, 2009, vol. 6, issue 2, pp. 157-163.
15. David Vaughn, Derek Justice. On The Direct Maximization of Quadratic Weighted Kappa, 2015, arXiv:1509.07107v1.

Nedel'ko Victor Mikhailovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation; Novosibirsk State University, 2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russian Federation,
(e-mail: `nedelko@math.nsc.ru`)

Received 15.01.18