Серия «Математика»
2018. Т. 23. С. 20—35

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.922, 517.977.1, 517.926.4
MSC 34A09, 34D20, 37C75
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.23.20

О робастной устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений со структурированной неопределенностью*

А. Д. Кононов

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аннотация.

Рассматривается линейная стационарная система дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), которая может быть записана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с необратимыми матрицами коэффициентов. Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы. Исследуется вопрос об асимптотической устойчивости ДАУ, содержащих неопределенность, задаваемую посредством матричной нормы. Рассматривается возмущение в случае структурированной неопределенности. Предполагается, что исходная номинальная система является асимптотически устойчивой. Для проведения анализа исходное уравнение преобразуется к структурной форме, в которой разделены дифференциальная и алгебраическая подсистемы. Эта форма эквивалентна исходной системе в смысле совпадения множеств решений, а оператор, преобразующий исходную систему к структурной форме, обратим. Построение не использует замену переменных. Необходимым и достаточным условием существования структурной формы является регулярность матричного пучка исходного уравнения. Получены достаточные условия того, что возмущения не нарушают внутреннюю структуру номинальной системы. В условиях сохранения структуры исследуется вопрос об асимптотической устойчивости ДАУ со структурированной неопределенностью. Получены оценки радиуса устойчивости возмущенной системы. Изложение ведется от более простого случая, при котором возмущение присутствует только при неизвестной вектор-функции, к более сложному, при котором возмущение также присутствует при производной от искомой вектор-функции. Перед изложением результатов кратко упомянуты вспомогательные сведения. При получении результатов использовались значения для вещественного и комплексного радиусов устойчивости для систем обыкновенных дифференциальных уравне-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00101) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2

ний первого порядка, разрешенных относительно производных. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрен пример.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, робастная устойчивость, структурированная неопределенность.

1. Введение

Одной из основных целей теории управления является повышение надежности системы. Однако, при проектировании какого-либо механизма, обычно рассматривается упрощенная модель. При этом становится актуальным вопрос о соответствии характеристик упрощенной модели и реального механизма. Поэтому задача робастной устойчивости занимает важное место в теории управления.

В последние годы тематике робастной устойчивости в теории управления уделяется большое внимание. Первые результаты в этой области были получены в [12] и [11] для стационарных систем индекса 1 с неструктурированным возмущением. В [11] получена оценка комплексного радиуса устойчивости с использованием нормы Фробениуса. Вычисление вещественного радиуса устойчивости в общем случае является более трудоемкой задачей по сравнению с вычислением комплексного радиуса (см. [19]), поэтому вопрос равенства этих величин представляет большой практический интерес. В [20] показано, что в случае положительных систем комплексный и вещественный радиусы устойчивости совпадают и могут быть легко вычислены. Некоторые попытки обобщить этот результат представлены в [16] и [17].

Получить сведения о других актуальных результатах можно из обзоров [14; 21]. Так, например, в статьях [13; 18] рассматривается вопрос об экспоненциальной устойчивости и радиусе устойчивости для нестационарных ДАУ индекса 1. В [15] представлены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости для стационарного ДАУ с запаздыванием, рассмотрен вопрос о робастной устойчивости в случае структурированного возмущения и получена формула радиуса робастной устойчивости.

Также необходимо отметить ряд других работ. В [1] и [3] получены оценки радиуса устойчивости матриц. В работах [4;5] с помощью метода функций Ляпунова были установлены критерии робастной устойчивости для линейных нестационарных непрерывных и дискретных систем управления с периодически изменяющимися ограничениями на элементы матрицы системы. Эти критерии сформулированы в форме условий существования положительно определенной функции Ляпунова из некоторого функционального (в непрерывном случае) или параметрического (в дискретном случае) класса, строго убывающей на решениях рассматриваемой системы. В работе [6] установлены достаточные условия робастной устойчивости для случая нестационарных интервальных ограничений.

В настоящей работе анализ базируется на приведении исходного уравнения к структурной форме с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. При таком преобразовании не используется замена переменных, а преобразующий оператор обратим. Получены условия, при которых возмущения не меняют внутреннюю структуру номинальной системы. В условиях сохранения структуры получены оценки радиуса устойчивости возмущенной системы, при этом применяются результаты из монографии [7]. Отдельно рассматривается случай, когда возмущение касается только матрицы B.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается линейная стационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{2.1}$$

где A и B — заданные вещественные $(n \times n)$-матрицы, $x(t)$ —- искомая n-мерная вектор-функция. Предполагается, что $\det A = 0$. Такого рода математические объекты называются системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы.

В предположении асимптотической устойчивости решений номинальной системы (2.1) исследуется вопрос об асимптотической устойчивости ДАУ в условиях неопределенности

$$(A + C_1\Delta_1 D_1)x'(t) + (B + C_2\Delta_2 D_2)x(t) = 0, \tag{2.2}$$

где произведения $C_1\Delta_1 D_1$ и $C_2\Delta_2 D_2$ называются структурированными возмущениями матриц A и B соответственно. Предполагается, что матрицы, фигурирующие в этих произведениях, являются вещественными и имеют размер $(n \times n)$, при этом C_1, C_2, D_1 и D_2 — это известные матрицы, а Δ_1 и Δ_2 — это матрицы неопределенностей. Таким образом, мы фактически имеем дело с целым семейством уравнений вида (2.2), в котором структурированные неопределенности должны удовлетворять некоторым условиям малости матричной нормы.

Целью настоящей работы является получение условий, при которых система (2.2) остается асимптотически устойчивой.

Определение 1. *Будем говорить, что ДАУ (2.1) являются робастно устойчивыми, если при асимптотической устойчивости номина-*

льной системы (2.1) возмущенное уравнение (2.2) также является асимптотически устойчивым.

Определение 2. *Решением ДАУ (2.1) будем называть n-мерную вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, обращающую систему (2.1) в тождество при подстановке.*

Очевидно, что при $C_1 = D_1 = C_2 = D_2 = E_n$[1] имеем частный случай

$$(A + \Delta_1)x'(t) + (B + \Delta_2)x(t) = 0,$$

который рассматривался в статьях [8], [9].

3. Вспомогательные сведения

В этом разделе вводятся обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Аналогичные обозначения используются в работах [8], [9].

Лемма 1. *Пусть пучок матриц $cA+B$ регулярен. Тогда существует оператор*

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt} + \ldots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r, \tag{3.1}$$

где R_j — $(n \times n)$-матрицы $(j = \overline{0,r})$, действие которого преобразует систему (2.1) к виду

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \tilde{B}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \tag{3.2}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} = (R_0A + R_1B)\,Q, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} = R_0BQ, \tag{3.3}$$

где $\mathrm{colon}\,(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$, *$Q$ — матрица перестановок, под символом O здесь и далее подразумевается нулевая матрица соответствующей размерности.*

Доказательство леммы 1 приведено в [8].

В статье [10] показано, что коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ определяются единственным образом. В ней же получен следующий результат.

Лемма 2. *Пусть пучок $cA+B$ регулярен. Тогда системы (2.1) и (3.2), (3.3) эквивалентны в смысле совпадения множеств решений.*

---

[1] E_n — единичная матрица порядка n.

В работах [8], [9] рассматривается вопрос согласования начальных условий с системой (2.1). В настоящей статье изложение ведется в предположении, что начальные данные являются согласованными.

Полученные в последующих разделах условия робастной устойчивости ДАУ базируются на известных результатах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, приведенных в монографии [7]. На основании этих результатов приведем две оценки, представляющие собой комплексный и вещественный радиусы устойчивости.

Лемма 3. *Пусть все собственные значения матрицы B имеют положительные вещественные части. Система*

$$x'(t) + Bx(t) = 0, \tag{3.4}$$

асимптотически устойчива, если

$$\|\Delta\| < \gamma_*^c = \inf_{\omega} \beta_1(i\omega E + B),$$

где ω — вещественный параметр, β_1 — наименьшее сингулярное число матрицы $i\omega E + B$, $i = \sqrt{-1}$; $\| * \|$ обозначает спектральную норму матрицы.

Обозначим $W(\omega) = \mathrm{Re}\,(i\omega E + B)^{-1}$, $V(\omega) = \mathrm{Im}\,(i\omega E + B)^{-1}$ и составим блочную матрицу

$$H(\omega, \alpha) = \begin{pmatrix} W(\omega) & -\alpha V(\omega) \\ \alpha^{-1} V(\omega) & W(\omega) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

зависящую от двух вещественных параметров ω и α.

Лемма 4. *Пусть все собственные значения матрицы B имеют положительные вещественные части. Система (3.4) асимптотически устойчива, если*

$$\|\Delta\| < \gamma_*^r = \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \beta(H(\omega, \alpha)), \tag{3.6}$$

где $\beta(H(\omega, \alpha))$ — второе справа из упорядоченных по возрастанию сингулярных чисел матрицы $H(\omega, \alpha)$.

Доказательство лемм см. в [7], [12].

Справедлива оценка

$$\gamma_*^r \geq \gamma_*^c. \tag{3.7}$$

И хотя комплексные возмущения в данной работе не рассматриваются, оценка из леммы 3 представляет большой интерес, поскольку проверка ее условий является более простой задачей в вычислительном смысле.

4. Возмущения, не меняющие внутреннюю структуру ДАУ

Сначала рассмотрим систему, в которой возмущение присутствует только в матрице B

$$Ax'(t) + (B + C_2\Delta_2 D_2)x(t) = 0. \tag{4.1}$$

Подействуем на неё оператором (3.1). В результате получим систему

$$\tilde{A}x'(t) + \tilde{B}x(t) + \sum_{j=0}^{r}\Big(R_j C_2\Delta_2 D_2 Q x^{(j)}(t)\Big) = 0, \tag{4.2}$$

где Q — матрица из (3.2), $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ определяются формулами (3.3).

Эта система отличается от (3.2) наличием слагаемых, содержащих неопределенность и производные от искомой вектор-функции до порядка r включительно. Поэтому возникает необходимость выделить классы ДАУ, для которых возмущения не изменяют внутреннюю структуру системы.

Определение 3. *Будем говорить, что возмущение не меняет внутреннюю структуру ДАУ (2.1), если существует обратимый оператор*

$$\tilde{\mathcal{R}} = \sum_{j=0}^{r}\tilde{R}_j\left(\frac{d}{dt}\right)^j, \tag{4.3}$$

такой, что его действие на возмущенную систему преобразует ее к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} G_1 & E_d \\ G_2 & O \end{pmatrix} x(t) = 0, \tag{4.4}$$

где G_1 и G_2 — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Приведем условия на выходные данные, при выполнении которых структурированное возмущение $C_2\Delta_2 D_2$ не изменяет структуру ДАУ (4.1). Для этого введем обозначение

$$\Phi_j = R_j C_2\Delta_2 D_2 Q, \quad j = \overline{0,r}. \tag{4.5}$$

Тогда уравнение (4.2) можно записать в виде

$$\sum_{j=2}^{r}\Phi_j x^{(j)}(t) + (\tilde{A} + \Phi_1)x'(t) + (\tilde{B} + \Phi_0)x(t) = 0. \tag{4.6}$$

Разобьём матрицы Φ_j на блоки

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \Phi_{j,1} & \Phi_{j,2} \\ \Phi_{j,3} & \Phi_{j,4} \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

где блоки $\Phi_{j,1}$, $\Phi_{j,2}$, $\Phi_{j,3}$ и $\Phi_{j,4}$ имеют размеры $d \times (n-d)$, $d \times d$, $(n-d) \times (n-d)$ и $(n-d) \times d$ соответственно.

Лемма 5. *Пусть пучок матриц $cA + B$ регулярен. Кроме того, выполнены следующие условия:*

1) $\Phi_j = O$ *для* $j = 2, ..., r$*;*

2) $\Phi_{1,2} = O, \quad \Phi_{1,4} = O$*;*

3) $\|\Phi_{1,3}\| < 1$*;*

4) $\|\Phi_{0,2} - \Phi_{1,1}(E_{n-d} + \Phi_{1,3})^{-1}\Phi_{0,4}\| < 1.$

Тогда структурированое возмущение $C_2\Delta_2 D_2$ *не меняет структуру ДАУ (2.1).*

Доказательство. Согласно замечанию 1 в сделанных предположениях по лемме 1 для системы (2.1) существует обратимый оператор (3.1), преобразующий ее к виду (3.2), (3.3).

В условиях 1 и 2 леммы уравнение (4.6) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & O \\ E_{n-d} + \Phi_{1,3} & O \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} J_1 + \Phi_{0,1} & E_d + \Phi_{0,2} \\ J_2 + \Phi_{0,3} & \Phi_{0,4} \end{pmatrix} x(t) = 0. \tag{4.8}$$

Заметим, что предположения 3 и 4 обеспечивают обратимость матриц

$$S_1 = E_{n-d} + \Phi_{1,3}, \tag{4.9}$$

$$S_2 = E_d + \Phi_{0,2} - \Phi_{1,1}S_1^{-1}\Phi_{0,4}. \tag{4.10}$$

Приведем систему (4.8) к форме (4.4). Для этого умножим (4.8) слева на матрицу

$$\mathcal{K}_r = \begin{pmatrix} S_2^{-1} & -S_2^{-1}\Phi_{1,1}S_1^{-1} \\ -S_1^{-1}\Phi_{0,4}S_2^{-1} & S_1^{-1}\left[\Phi_{0,4}S_2^{-1}\Phi_{1,1}S_1^{-1} + E\right] \end{pmatrix}.$$

В результате умножения получим искомую систему (4.4), где матрицы G_1, G_2 имеют вид

$$G_1 = S_2^{-1}\left[J_1 + \Phi_{0,1} - \Phi_{1,1}S_1^{-1}(J_2 + \Phi_{0,3})\right], \tag{4.11}$$

$$G_2 = S_1^{-1}\left[J_2 + \Phi_{0,3} - \Phi_{0,4}G_1\right].$$

Таким образом, оператор $\tilde{\mathcal{R}}$ из определения 3 построен. Его обратимость вытекает из обратимости оператора (3.1) и обратимости матрицы $\mathcal{K}_r$. □

Следствие 1. *Пусть пучок матриц $cA + B$ регулярен и выполнены предположения 3 и 4 леммы 5. Если, кроме того, матрицы C_2 и D_2 в системе (4.1) таковы, что:*

1) $R_jC_2 = O$ *для* $j = 2, ..., r$*;*

2) $D_2Q = (M \ O)$, *где* M *— некоторая матрица произвольной структуры, а нулевой блок имеет размеры* $n \times (n-d)$.

Тогда возмущение $C_2\Delta_2D_2$ *не меняет структуру ДАУ (2.1).*

Справедливость этого утверждения вытекает из того очевидного факта, что в условиях 1 и 2 следствия выполняются предположения 1 и 2 леммы 5.

Перейдем к рассмотрению возмущенного уравнения вида (2.2). Введем еще одно обозначение

$$R_jC_1\Delta_1D_1Q = \Upsilon_j = \begin{pmatrix} \Upsilon_{j,1} & \Upsilon_{j,2} \\ \Upsilon_{j,3} & \Upsilon_{j,4} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

где блоки $\Upsilon_{j,k}$ имеют те же размеры, что и соответствующие блоки $\Phi_{j,k}$ $(k=\overline{1,4})$ в (4.7). Подействуем на уравнение (2.2) оператором (3.1). Запишем результат с учетом обозначений (4.5), (4.12)

$$\sum_{j=1}^{r}\Upsilon_j x^{(j+1)}(t) + \sum_{j=2}^{r}\Phi_j x^{(j)}(t) + \\ + [\tilde{A} + \Upsilon_0 + \Phi_1]x'(t) + [\tilde{B} + \Phi_0]x(t) = 0,$$

Лемма 6. *Пусть пучок матриц* $cA + B$ *регулярен, а также справедливы следующие условия:*

1) $\Phi_j = O$ *для* $j = 2, ..., r$;

2) $\Upsilon_j = O$ *для* $j = 1, ..., r$;

3) $\Upsilon_{0,2} + \Phi_{1,2} = O, \quad \Upsilon_{0,4} + \Phi_{1,4} = O$;

4) $\|\Upsilon_{0,3} + \Phi_{1,3}\| < 1$;

5) $\|\Phi_{0,2} - (\Upsilon_{0,1} + \Phi_{1,1})(E_{n-d} + \Upsilon_{0,3} + \Phi_{1,3})^{-1}\Phi_{0,4}\| < 1$.

Тогда возмущения $C_1\Delta_1D_1$ *и* $C_2\Delta_2D_2$ *не меняют структуру (2.1).*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 5. При этом матрицы G_1, G_2 в (4.4) имеют вид

$$G_1 = P_2^{-1}\left[J_1 + \Phi_{0,1} - (\Upsilon_{0,1} + \Phi_{1,1})P_1^{-1}\left(J_2 + \Phi_{0,3}\right)\right], \tag{4.13}$$

$$G_2 = P_1^{-1}\left[J_2 + \Phi_{0,3} - \Phi_{0,4}G_1\right],$$

где матрицы

$$P_1 = E_{n-d} + \Upsilon_{0,3} + \Phi_{1,3}, \tag{4.14}$$

$$P_2 = E_d + \Phi_{0,2} - (\Upsilon_{0,1} + \Phi_{1,1})\, P_1^{-1}\Phi_{0,4}. \tag{4.15}$$

обратимы в силу условий 4 и 5 леммы. □

Сформулируем еще одно очевидное утверждение.

Следствие 2. *Пусть пучок матриц $cA+B$ регулярен и выполнены предположения 4 и 5 леммы 6. Если, кроме того, матрицы C_1, C_2 и D_1, D_2 в системе (2.1) таковы, что:*

1) $R_jC_1 = R_jC_2 = O$ для $j = 2, ..., r$;

2) $D_1Q = \begin{pmatrix} M & O \end{pmatrix}$, $D_2Q = \begin{pmatrix} N & O \end{pmatrix}$, где M, N — некоторые матрицы произвольной структуры, а нулевые блоки имеют размеры $n \times (n-d)$.

Тогда возмущения $C_1\Delta_1D_1$ и $C_2\Delta_2D_2$ не меняет структуру ДАУ (2.1).

5. Условия робастной устойчивости ДАУ

Рассмотрим дифференциальную подсистему уравнения (4.4), которое получено с помощью преобразования возмущенного уравнения (2.2) действием оператора (4.3) в предположениях леммы 5,

$$x_1'(t) + G_2x_1(t) = 0,$$

где вектор-функция $x_1(t)$ имеет размерность $n-d$.

Для применения оценки (3.6) необходимо представить матрицу G_2 в виде

$$G_2 = J_2 + \Theta, \tag{5.1}$$

где J_2 - матрица из (3.3), Θ - матрица, содержащая неопределенность.

В случае, когда возмущение присутствует только при матрице B (см. ДАУ (4.1)) и выполняются условия леммы 5,

$$\Theta = S_1^{-1}\left[(E-S_1)J_2 + \Phi_{0,3} - \Phi_{0,4}G_1\right], \tag{5.2}$$

где G_1, S_1 определяются соотношениями (4.11), (4.9) соответственно.

Если же исходное уравнение имеет вид (2.2), то

$$\Theta = P_1^{-1}\left[(E-P_1)J_2 + \Phi_{0,3} - \Phi_{0,4}G_1\right], \tag{5.3}$$

где G_1, P_1 определяются соотношениями (4.13), (4.14) соответственно.

На основании вышеизложенного можно получить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть для системы (4.1) выполнены все предположения леммы 5. И кроме того:*

1) все характеристические числа матрицы J_2 имеют положительные вещественные части;

2) справедливо неравенство

$$\|\Theta\| < \gamma_*^c = \inf_{\omega} \beta_1(i\omega E_{n-d} + J_2), \tag{5.4}$$

где Θ *имеет вид (5.2),* β_1 *— наименьшее сингулярное число матрицы* $i\omega E_{n-d} + J_2$.

Тогда система (4.1) является асимптотически устойчивой.

Доказательство. Из доказательства леммы 5 следует, что системы (4.1) и (4.4) получаются одна из другой с помощью обратимых операторов. Поэтому эти системы эквивалентны в смысле совпадения множеств решений. Следовательно, система (4.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда таким же свойством обладает и система (4.4).

Рассмотрим дифференциальную подсистему ДАУ (4.4)

$$x_1'(t) + G_2 x_1(t) = 0, \tag{5.5}$$

где G_2 имеет вид (5.1), (5.2).

Очевидно, что ДАУ (4.4) будет асимптотически устойчива, если асимптотически устойчива система (5.5). В соответствии с леммой 3 последнее имеет место, если выполняется предположение 2 теоремы. □

Оценку радиуса устойчивости ДАУ (4.1) можно получить, опираясь на лемму 4. Для этого в теореме (1) предположение 2 следует заменить на

$$\|\Theta\| < \gamma_*^r,$$

где Θ находится по формуле (5.2),

$$\gamma_*^r = \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \beta(H(\omega, \alpha)), \tag{5.6}$$

матрица $H(\omega, \alpha)$ определяется из (3.5), где

$$W(\omega) = \mathrm{Re}(i\omega E + J_2)^{-1}, \quad V(\omega) = \mathrm{Im}(i\omega E + J_2)^{-1},$$

$\beta(H(\omega, \alpha))$ — второе справа из упорядоченных по возрастанию сингулярных чисел матрицы $H(\omega, \alpha)$.

Обратимся к возмущенной системе вида (2.2).

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения леммы 6. И кроме того:*

1) все характеристические числа матрицы J_2 *имеют положительные вещественные части;*

2) справедливо неравенство

$$\|\Theta\| < \gamma_*^c = \inf_{\omega} \beta_1(i\omega E_{n-d} + J_2), \tag{5.7}$$

где Θ *находится по формуле (5.3).*

Тогда система (2.2) является асимптотически устойчивой.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы (1).

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 дают условия робастной устойчивости уравнений (4.1) и (2.2) соответственно

С помощью леммы 4 можно получить еще одну оценку радиуса устойчивости системы (2.2). Для этого условие 2 теоремы 2 нужно заменить на

$$\|\Theta\| < \gamma_*^r,$$

где Θ имеет вид (5.3), γ_*^r определяется соотношением (5.6). Эта оценка является более точной в силу неравенства (3.7).

6. Пример

Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x(t) = 0 \tag{6.1}$$

Приведем это уравнение к структурной форме (3.2), (3.3). Как указано выше, процедура приведения уравнения к структурной форме более подробно описана в [8], [9], [10]. Для вычисления коэффициентов оператора (3.1) введем матрицу $\mathcal{D}_r$. В матрице $\mathcal{D}_1$ разрешающего минора нет. Такой минор имеется в матрице $\mathcal{D}_2$:

$$\mathcal{D}_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Столбцы входящие в разрешающий минор выделены пунктирной линией, при этом $\lambda = 4, r = 2, d = 2$, $\operatorname{rank} \mathcal{D}_2 = 9$, $Q = E$. Следовательно, оператор (3.1) имеет вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2}$$

Этот оператор преобразует ДАУ (6.1) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

следовательно, $J_2 = (1)$.

Теперь рассмотрим возмущенное уравнение (4.1), в котором

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \ \Delta_2 = (\delta_{ij}), \ D_2 = (d_{ij}), \quad i, j = \overline{1, 3}. \qquad (6.2)$$

Нетрудно убедиться, что все предположения леммы 5 выполнены, поскольку в обозначениях (4.5) и (4.7) $\Phi_1 = \Phi_2 = O$ и $\Phi_{0,2} = O$. Условия 3 и 4 леммы 5, очевидно, также имеют место. Структурная форма (4.4) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1+\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \phi = c_{31}(\delta_{11}d_{11} + \delta_{12}d_{21} + \delta_{13}d_{31}) + \\ + c_{32}(\delta_{21}d_{11} + \delta_{22}d_{21} + \delta_{23}d_{31}) + \\ + c_{33}(\delta_{31}d_{11} + \delta_{32}d_{21} + \delta_{33}d_{31}). \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Теперь, применяя формулу (5.4), найдем оценку радиуса устойчивости:

$$\|\phi\| < \gamma_*^c = \inf_\omega \beta_1 (i\omega + 1) = 1.$$

Рассмотрим уравнение вида (2.2), где коэффициенты A и B такие же, как в (6.1), матрицы C_2, Δ_2, D_2 имеют вид (6.2) и

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}, \Delta_1 = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь с учетом обозначений (4.5) и (4.12) условия 1 – 3 и 5 леммы 6 выполнены, поскольку $\Phi_2 = O$, $\Upsilon_1 = \Upsilon_2 = O$, $\Upsilon_{0,2} = O$, $\Phi_{1,2} = O$, $\Upsilon_{0,4} = O$, $\Phi_{1,4} = O$. Условие 4 получает форму $\|\Upsilon_{0,3}\| < 1$, где

$$\begin{aligned} \Upsilon_{0,3} = -k_{31}(\zeta_{11}g_{11} + \zeta_{12}g_{21} + \zeta_{13}g_{31}) - \\ - k_{32}(\zeta_{21}g_{11} + \zeta_{22}g_{21} + \zeta_{23}g_{31}) - \\ - k_{33}(\zeta_{31}g_{11} + \zeta_{32}g_{21} + \zeta_{33}g_{31}). \end{aligned}$$

Следовательно, данное возмущение не изменяет структуру исходной системы. Применив оператор $\mathcal{R}$, получим уравнение в структурной форме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1+\phi & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) = 0,$$

где элемент ϕ имеет вид (6.3), поэтому дальнейшие действия по оценке радиуса устойчивости являются повторением операций, которые были выполнены выше. Таким образом, получаем оценку радиуса устойчивости

$$\|\phi\| < \gamma_*^c = 1.$$

Список литературы

1. Бобылев Н. А. Оценки возмущений устойчивых матриц / Н. А. Бобылев, С. В. Емельянов, С. К. Коровин // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 4. – С. 15–24.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 576 с.
3. Крыжко И. Б. Оценки возмущений матричных спектров / И. Б. Крыжко // Дальневост. мат. журн. – 2000. – № 1. – С. 111–118.
4. Молчанов А. П. Достаточные условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с периодическими интервальными ограничениями / А. П. Молчанов, М. В. Морозов // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 1. – С. 100–107.
5. Молчанов А. П. Робастная абсолютная устойчивость нестационарных дискретных систем управления с периодическими ограничениями / А. П. Молчанов, М. В. Морозов // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 10. – С. 93–100.
6. Морозов М. В. Условия робастной устойчивости линейных нестационарных систем управления с интервальными ограничениями / М. В. Морозов // Проблемы управления. – 2009. – № 3. – С. 23–26.
7. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002 – 273 с.
8. Щеглова А. А. О робастной устойчивости систем дифференциально-алгебраических уравнений / А. А. Щеглова, А. Д. Кононов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. – Т. 16. – С. 117–130.
9. Щеглова А. А. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольно высокого индекса / А. А. Щеглова, А. Д. Кононов // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 5. – С. 36–55. https://doi.org/10.1134/S0005117917050034
10. Щеглова А. А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / А. А. Щеглова // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 9. – С. 57–70. https://doi.org/10.3103/S1066369X10090057
11. Byers R. On the stability radius of a generalized state-space system / R. Byers, N. K. Nichols // Lin. Alg. Appl. – 1993. – Vol. 188–189. – P. 113–134. https://doi.org/10.1016/0024–3795(93)90466–2

12. Davison E. J. The stability robustness of generalized eigenvalues / E. J. Davison, L. Qiu // Decision and Control. Proc. of the 28th IEEE Conf. – 1989. – Vol. 3. – P. 1902–1907.
13. Du N. H. On data-dependence of exponential stability and stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems / N. H. Du, V. H. Linh, C.-J. Chyan // Journal of Differential Equations. – 2008. – Vol. 245. – P. 2078–2102.
14. Du N. H. Robust stability of differential-algebraic equations / N. H. Du, V. H. Linh, V. Mehrmann // Differential-Algebraic Equations Forum I. – Springer. – 2015. – P. 63–95.
15. Stability and Robust Stability of Linear Time-Invariant Delay Differential-Algebraic Equations / N. H. Du, V. H. Linh, V. Mehrmann, D. D. Thuan // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 34. – P. 1631–1654. https://doi.org/10.1137/130926110
16. Du N. H. Stability radii of differential-algebraice quations with structured perturbations / N. H. Du // Systems Control Letters. – 2008. – Vol. 60. – P. 596–603.
17. Du N. H. Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales / N. H. Du, N. C. Liem, D. D. Thuan // Systems Control Letters. – 2011. – Vol. 60. – P. 596–603. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.04.018
18. Du N. H. Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamic perturbations / N. H. Du, V. H. Linh //Journal of Differential Equations. – 2006. – Vol. 230. – P. 579–599.
19. Hinrichsen D. An algorithm for the computation of the structured complex stability radius / D. Hinrichsen, B. Kelb, A. Linnemann // Automatica. – 1989. – Vol. 25. – P. 771–775. https://doi.org/10.1016/0005–1098(89)90034–4
20. Hinrichsen D. Robust stability of positive continuous time systems / D. Hinrichsen, N. K. Son // Numer. Funct. Anal. Optim. – 1996. – Vol. 17. – P. 649–659. https://doi.org/10.1080/01630569608816716
21. Linh V. H. Spectrum-Based Robust Stability Analysis of Linear Delay Differential–Algebraic Equations / V. H. Linh, D. D. Thuan // Numerical algebra, matrix theory, differential–algebraic equations and control theory: Festschrift in honor of Volker Mehrmann. – Springer. – 2015. – P. 533–557. https://doi.org/10.1007/978–3–319–15260–8_19

Кононов Алексей Денисович, аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, (e-mail: `my_official@rambler.ru`)

Поступила в редакцию 22.11.17

A. D. Kononov

On Robust Stability of Differential-Algebraic Equations with Structured Uncertainty

Abstract. We consider a linear time-invariant system of differential-algebraic equations (DAE), which can be written as a system of ordinary differential equations with non-invertible coefficients matrices. An important characteristic of DAE is the unsolvability index, which reflects the complexity of the internal structure of the system. The question of the asymptotic stability of DAE containing the uncertainty given by the matrix norm is investigated. We consider a perturbation in the structured uncertainty case. It is assumed that the initial nominal system is asymptotically stable. For the analysis, the original equation is reduced to the structural form, in which the differential and algebraic subsystems are separated. This structural form is equivalent to the input system in the sense of coincidence of sets of solutions, and the operator transforming the DAE into the structural form possesses the inverse operator. The conversion to structural form does not use a change of variables. Regularity of matrix pencil of the source equation is the necessary and sufficient condition of structural form existence. Sufficient conditions have been obtained that perturbations do not break the internal structure of the nominal system. Under these conditions robust stability of the DAE with structured uncertainty is investigated. Estimates for the stability radius of the perturbed DAE system are obtained. The text of the article is from the simpler case, in which the perturbation is present only for an unknown function, to a more complex one, under which the perturbation is also present in the derivative of the unknown function. We used values of the real and the complex stability radii of explicit ordinary differential equations for obtaining the results. We consider the example illustrating the obtained results.

Keywords: differential-algebraic equations, robust stability, structured uncertainty

References

1. Bobylev N.A., Emel'janov S.V., Korovin S.K. Estimates for perturbations of stable matrices. *Automation and Remote Control*, 1998, vol. 59, no 4, pp. 467-475.
2. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [The theory of matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 548 p.
3. Kryzhko I.B. An inequality for the perturbations of the spectrum of matrix. *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2000, vol. 1, no 1, pp. 111–118. (in Russian)
4. Molchanov A.P., Morozov M.V. Sufficient Conditions for Robust Stability of Linear Nonstationary Control Systems with Periodic Interval Constraints. *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no 1, pp. 82-87.
5. Molchanov A.P., Morozov M.V. Robust absolute stability of nonstationary discrete systems with periodic constraints. *Automation and Remote Control*, 1995, vol. 56, no 10, pp. 1432–1437.
6. Morozov M.V. Robust stability conditions for linear nonstationary control systems with periodic interval constraints. *Probl. Upr.*, 2009, no 3, pp. 23–26. (in Russian)
7. Polyak B.T.*Robastnaja ustojchivost' i upravlenie* [Robust stability and control]. Moscow, Nauka Publ., 2002. 273 p.
8. Shcheglova A.A., Kononov A.D. On Robust Stability of Systems of Differential-Algebraic Equations. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*[The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics], 2016, vol. 16, pp. 117–130.
9. Shcheglova A.A., Kononov A.D. Robust stability of differential-algebraic equations with an arbitrary unsolvability index. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no 5, pp. 798–814. https://doi.org/10.1134/S0005117917050034
10. Shcheglova A.A. The solvability of the initial problem for a degenerate linear hybrid system with variable coefficients. *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no 9, pp. 49-61. https://doi.org/10.3103/S1066369X10090057
11. Byers R., Nichols N.K. On the stability radius of a generalized state-space system. *Lin. Alg. Appl.*, 1993, vol. 188-189, pp. 113–134. https://doi.org/10.1016/0024-3795(93)90466-2
12. Davison E.J., Qiu L. The stability robustness of generalized eigenvalues. *Proc. of the 28th IEEE Conf.*, 1989, vol. 3, pp. 1902-1907.

13. Du N.H., Linh V.H., Chyan C.-J. On data-dependence of exponential stability and stability radii for linear time-varying differential-algebraic systems. *Journal of Differential Equations*, 2008, vol. 245, pp. 2078-2102.
14. Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V. Robust stability of differential-algebraic equations. *Differential-Algebraic Equations Forum I*, Springer, 2015, pp. 63-95.
15. Du N.H., Linh V.H., Mehrmann V., Thuan D.D. Stability and Robust Stability of Linear Time-Invariant Delay Differential-Algebraic Equations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2013, vol. 34, pp. 1631-1654. https://doi.org/10.1137/130926110
16. Du N.H. Stability radii of differential-algebraice quations with structured perturbations. *Systems Control Letters*, 2008, vol. 60, pp. 596–603. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.04.018
17. Du N.H., Liem N.C., Thuan D.D. Stability radius of implicit dynamic equations with constant coefficients on time scales. *Systems Control Letters*, 2011, vol. 60. pp. 596–603. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.04.018
18. Du N.H., Linh V.H. Stability radii for linear time-varying differential-algebraic equations with respect to dynamic perturbations. *Journal of Differential Equations*, 2006, vol. 230. pp. 579-599.
19. Hinrichsen D., Kelb B., Linnemann A. An algorithm for the computation of the structured complex stability radius. *Automatica*, 1989, vol. 25, pp. 771–775. https://doi.org/10.1016/0005-1098(89)90034-4
20. Hinrichsen D. Robust stability of positive continuous time systems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1996, vol. 17, pp. 649–659. https://doi.org/10.1080/01630569608816716
21. Linh V.H., Thuan D.D. Spectrum-Based Robust Stability Analysis of Linear Delay Differential-Algebraic Equations. *Numerical algebra, matrix theory, differential-algebraic equations and control theory: Festschrift in honor of Volker Mehrmann*, Springer, 2015, pp. 533-557. https://doi.org/10.1007/978-3-319-15260-8_19

Kononov Alexey Denisovich, Postgraduate, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russian Federation (e-mail: my_official@rambler.ru)

Received 22.11.17