



Серия «Математика»
2026. Т. 57. С. 128–142

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.71

MSC 06E30, 05C99

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.128>

О сложности линейной функции алгебры логики в некоторых классах обобщенных контактных схем

Е. К. Михалев¹, С. А. Ложкин^{1✉}

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва,
Российская Федерация

✉ lozhkin@cs.msu.ru

Аннотация: Рассматривается класс обобщенных контактных схем ранга r , в котором контактами управляют только линейные функции алгебры логики, зависящие не более чем от r булевых переменных, а также два его подкласса с дополнительными ограничениями на расположение контактов. Исследуется сложность реализации линейной функции алгебры логики l_n от n булевых переменных в указанных классах обобщенных контактных схем. При фиксированном r и $n = 1, 2, \dots$ получены верхняя и нижняя оценки сложности реализации l_n в каждом из двух указанных выше подклассов рассматриваемого класса обобщенных контактных схем. При этом в первом подклассе полученные оценки асимптотически равны $4\frac{n}{r}$ и отличаются друг от друга на величину $O(\sqrt{\frac{n}{r}})$, а во втором подклассе дают ее точное значение вида $4\lceil \frac{n}{r} \rceil - 4$.

Ключевые слова: обобщенная контактная схема, линейная функция алгебры логики, сложность

Благодарности: Исследования авторов поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М. В. Ломоносова по соглашению (№ 075-15-2025-345).

Ссылка для цитирования: Михалев Е. К., Ложкин С. А. О сложности линейной функции алгебры логики в некоторых классах обобщенных контактных схем // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 57. С. 128–142.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.128>

Research article

On the Complexity of the Linear Boolean Function in Some Classes of Generalized Contact Circuits

Evgenii K. Mikhalev¹, Sergei A. Lozhkin^{1✉}

¹ Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

✉ lozhkin@cs.msu.ru

Abstract: The paper considers a class of generalized contact circuits of rank r , in which contacts are controlled only by linear logic algebra functions that depend on no more than r Boolean variables, as well as two of its subclasses with additional restrictions on the location of contacts. The complexity of the implementation of the linear boolean function l_n from n boolean variables in the specified classes of generalized contact circuits is investigated. For a fixed r and $n = 1, 2, \dots$, upper and lower estimates of the complexity of the implementation of l_n in each of the two above-mentioned subclasses of the class of generalized contact circuits are obtained. Moreover, in the first subclass, the estimates obtained are asymptotically equal to $4\sqrt{\frac{n}{r}}$ and differ from each other by the amount of $O(\sqrt{\frac{n}{r}})$, and in the second subclass they give its exact value of the form $4\lceil\frac{n}{r}\rceil - 4$.

Keywords: generalized contact circuit, linear boolean function, complexity

Acknowledgements: The authors research is supported by the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics of Lomonosov Moscow State University under agreement (No 075-15-2025-345).

For citation: Mikhalev E. K., Lozhkin S. A. On the Complexity of the Linear Boolean Function in Some Classes of Generalized Contact Circuits. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 57, pp. 128–142. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.128>

1. Введение

В рамках данной работы решается задача индивидуального синтеза, а именно синтеза обобщенных контактных схем, реализующих линейную функцию алгебры логики (далее — функция). В ней рассматривается класс обобщенных контактных схем ранга r , т. е. класс контактных схем (далее — схемы) в базисе, содержащем контакты, реализующие все различные функции, зависящие от r , или меньше чем от r , булевых переменных (далее — переменные). Исследуется сложность реализации линейной функции в данном классе схем.

Линейная функция является частым объектом исследования. Изучение сложности реализации линейной функции в обобщенном контактном базисе является актуальным, потому что линейная функция применяется в различных вычислительных устройствах, в том числе и в СБИС. При этом обобщенные схемы являются моделью схем транзисторного типа и могут использоваться при проектировании вычисли-

тельных устройств, в частности СБИС, изготавливаемых по так называемой КМОП-технологии.

Некоторые интересные свойства линейной функции, связанные с её возможностью моделирования функций от меньшего числа переменных, установлены в [1]. Существует множество задач, связанных с оценкой сложности линейной функции в различных классах (см., например, [6; 10]). Свойства обобщенных контактных схем, связанных с тестированием, изучались в работах [7; 8]. Известны исследования сложности реализации некоторых функций алгебры логики в обобщенных контактных схемах (см., например, в [2; 9]).

Ранее [12] (см. также [11]) была установлена сложность линейной функции в классе контактных схем в стандартном базисе (базисе, содержащем замыкающий и размыкающий контакты). Было доказано, что сложность минимальной контактной схемы, реализующей линейную функцию от n переменных, равна $4n - 4$. При этом верхняя оценка указанного вида получается с помощью метода каскадов (см. например [11] или [4]), а нижняя была доказана в [12] (более простое доказательство, предложенное С. А. Ложкиным, см., например, в [11]).

В данной работе рассматривается задача индивидуального синтеза в классе обобщенных контактных схем ранга r , введенного в [3], в котором функции проводимости контактов существенно зависят не более чем от r переменных и являются линейными функциями. Кроме того, будем считать, что в любой схеме из данного класса схем на любой проводящей цепи, идущей от входа к выходу, множества переменных любых 2 контактов схемы либо совпадают, либо не пересекаются. Также рассматривается подкласс данного класса, в котором множества переменных любых 2 контактов схемы либо совпадают, либо не пересекаются. Указанные структурные ограничения для этого подкласса и всего класса схем будем называть раздельным управлением контактами и раздельным управлением контактами на проводящих цепях соответственно.

Настоящая работа продолжает и в некоторой степени уточняет одноименную тезисную публикацию авторов [5], сопровождая все сформулированные утверждения полными доказательствами. Рассматриваемая в ней задача синтеза заключается в том, чтобы исследовать сложность реализации линейной функции в двух указанных классах обобщенных схем ранга r над базисом из всех линейных функций, т. е. получить верхнюю и нижнюю оценки её сложности в данных классах.

В работе установлены верхняя и нижняя оценки сложности реализации линейной функции $l_n = x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ в классе обобщенных схем ранга r с раздельным управлением контактами на проводящих цепях над базисом из всех линейных функций от r переменных. Эти оценки формируют асимптотически точную оценку сложности реализации линейной функции l_n в рассматриваемом классе обобщенных КС, которая

при фиксированном r и $n = 1, 2, \dots$ асимптотически равна $4\frac{n}{r}$ и имеет относительную погрешность $O(\sqrt{\frac{n}{r}})$. При этом установлено точное значение сложности l_n в одном из «естественных» подклассов данного класса схем — классе схем с раздельным управлением контактами.

2. Основные определения и обозначения, формулировка полученных результатов

Пусть $B = \{0, 1\}$, а $B^n = \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_n$ — его n -я декартова степень, или, иначе, единичный n -мерный куб, т. е. множество наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in B$ при всех $i \in [1, n]$.

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ — счетный упорядоченный алфавит переменных, X — конечное множество, элементами которого являются переменные из $\mathcal{X}$, а $|X|$ — его мощность, т. е. число переменных, которые в нём содержатся. Множество переменных $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ будем обозначать через $X(n)$, а множество всех функций от переменных из $X(n)$, отображающих куб $B^n(X(n))$ в B , — через $P_2(n)$.

Под *обобщенной* контактной схемой (КС) ранга r от переменных из $X(n)$ понимается схема с 1 входом и 1 выходом, контакты которой управляются функциями, существенно зависящими не более чем от r переменных из $X(n)$. Под *множеством переменных контакта* будем понимать множество переменных, от которых существенно зависит функция, управляющая этим контактом.

Набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in B^n$ будем называть *четным*, если в нем содержится четное число единиц, т. е. число α_i , таких, что $\alpha_i = 1$, является четным, $i = 1, \dots, n$. В противном случае набор α будем называть *нечетным*.

Функция $l_r = l_r^{(0)}$ (соответственно $\bar{l}_r = l_r^{(1)}$) называется *линейной нечетной* (соответственно *линейной четной*) функцией ранга r , если она существенно зависит от r переменных и принимает значение 1 только на всех нечетных (четных) наборах значений её существенных переменных. Контакт, управляемый такой функцией, называется *линейным контактом ранга r* соответствующей четности.

В работе рассматривается подкласс $\tilde{U}_r^{Kl}$ класса обобщенных схем ранга r , включающий в себя все контактные схемы, которые характеризуются раздельным управлением контактами на проводящих цепях и состоят только из линейных контактов ранга не больше чем r , где $r \geq 1$. Класс $\tilde{U}_r^{Kl}$ назовем *линейным классом схем ранга r с раздельным управлением контактами на проводящих цепях*.

Сложностью $L(\Sigma)$ контактной схемы Σ будем, как обычно, называть число её контактов, а *сложностью* $\tilde{L}_r^{Kl}(f)$ функции f в классе

схем $\tilde{U}_r^{Kl}$ — минимальную сложность схем из $\tilde{U}_r^{Kl}$, реализующих данную функцию f .

В работе также рассматривается специальный подкласс $\hat{U}_r^{Kl}$ класса $\tilde{U}_r^{Kl}$, который состоит из всех таких схем Σ , $\Sigma \in U_r^{Kl}$, которые характеризуются раздельным управлением контактами, когда множества переменных любых 2 контактов Σ либо совпадают, либо не пересекаются.

Класс $\hat{U}_r^{Kl}$ назовем *линейным классом схем с раздельным управлением контактами*. Аналогично тому, как было сделано выше, сложность функции f в классе $\hat{U}_r^{Kl}$ обозначим через $\hat{L}_r^{Kl}(f)$.

Заметим, что класс обычных контактных схем совпадает с классами $\tilde{U}_1^{Kl}$ и $\hat{U}_1^{Kl}$.

Класс схем называется *полным*, если для любой функции f из $P_2(n)$ в классе существует схема, реализующая функцию f . Заметим, что все введенные выше классы схем являются полными при любом r , $r \geq 1$, так как каждый из них содержит в себе класс обычных КС.

В работе исследуется сложность реализации линейных функций l_n , $\bar{l}_n$ в классах $\tilde{U}_r^{Kl}$ и $\hat{U}_r^{Kl}$. Очевидно, что в случае, когда $n \leq r$, реализовать любую линейную функцию $l_n^{(\sigma)}$, $\sigma \in B$, в любом из классов $\hat{U}_r^{Kl}$, $\tilde{U}_r^{Kl}$ можно с помощью КС, состоящей из одного контакта, управляемого функцией $l_n^{(\sigma)}$. Поэтому в данном «тривиальном» случае при любом $\sigma \in B$ верно равенство

$$\hat{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) = \tilde{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) = 1. \quad (2.1)$$

Для «нетривиального» случая, когда $n > r$, в работе получены следующие результаты.

Теорема 1. При любых натуральных n и r , где $n > r$, а также при любом $\sigma \in B$ имеет место равенство

$$\hat{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) = 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4 \quad (2.2)$$

Используются следующие обозначения асимптотических относительно натурального параметра $n = 1, 2, \dots$ равенств вида $a(n) \sim b(n)$, означающего, что $a(n) = b(n)(1 + \varepsilon(n))$ для некоторой последовательности $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. При любых натуральных n и r , где $n > r$, а также при любом $\sigma \in B$, имеют место неравенства:

$$4 \frac{n}{r} - 10 \sqrt{\frac{n}{r}} \leq \tilde{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \leq 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4. \quad (2.3)$$

Следствие 1. При любом натуральном r , и любом $\sigma \in B$, для последовательности натуральных чисел $n = 1, 2, \dots$ имеет место асимптотическое равенство

$$L_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \sim 4 \frac{n}{r}$$

3. Обоснование полученных результатов

Учитывая (2.1), рассмотрим «нетривиальный» случай, когда $n > r$, в рамках которого докажем теоремы 1 и 2. Установим сначала верхнюю оценку равенства (2.2), из которой в силу того, что $\hat{U}_r^{Kl} \subseteq \tilde{U}_r^{Kl}$, следует верхняя оценка неравенства (2.3).

Лемма 1. В случае $n > r$ для сложности линейной функции $l_n^{(\sigma)}$, $\sigma \in B$ из $P_2(n)$ в классе $\hat{U}_r^{Kl}$ верна следующая верхняя оценка:

$$\hat{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \leq 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4. \quad (3.1)$$

Доказательство. Разобьем множество $X(n)$ переменных функции $f = l_n^{(\sigma)}$ на $m = \lceil \frac{n}{r} \rceil$ непересекающихся подмножеств $X_1 = (x_1, x_2, \dots, x_r)$; $X_2 = (x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_{2r})$; $\dots$; $X_m = (x_{(m-1)r+1}, x_{(m-1)r+2}, \dots, x_n)$. Заметим, что мощность каждого из этих подмножеств, за исключением последнего, равна r , а мощность множества X_m не больше r . Для всех $i = 1, \dots, m$, и $\sigma \in B$, обозначим через $\lambda_i^{(\sigma)}$ линейную функцию от переменных X_i , равную сумме по модулю 2 всех этих переменных, и константы σ , а затем отметим, что для указанных функций выполняется равенство

$$\lambda_1^{(0)} \oplus \dots \oplus \lambda_{m-1}^{(0)} \oplus \lambda_m^{(\sigma)} = l_n^{(\sigma)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Следовательно, из «обычной» схемы $\hat{\Sigma}$, реализующей функцию $l_m^{(\sigma)}(y_1, y_2, \dots, y_m)$, в результате замены её контактов вида y_i^σ на обобщенные контакты с пометкой $\lambda_i^{(\sigma)}$, можно получить схему Σ из класса $\hat{U}_r^{Kl}$, которая реализует функцию $l_n^{(\sigma)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Так как при этом $L(\Sigma) = L(\hat{\Sigma})$, то для получения оценки (3.1) достаточно взять схему $\hat{\Sigma}$ сложности $4m - 4$, т. е., например, схему Кардо из [12]. $\square$

Следствие 2. Из того, что класс $\hat{U}_r^{Kl}$ является подклассом $\tilde{U}_r^{Kl}$, вытекает следующая верхняя оценка для линейной функции $l_n^{(\sigma)}$, $\sigma \in B$ в классе $\tilde{U}_r^{Kl}$:

$$\tilde{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \leq 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4.$$

Лемма 2. В случае $n > r$ для линейной функции $l_n^{(\sigma)}$, $\sigma \in B$, из $P_2(n)$ в классе $\widehat{U}_r^{Kl}$ верна следующая нижняя оценка сложности:

$$\widehat{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \geq 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4$$

Доказательство. Заметим, что функция $l_n^{(\sigma)}$ существенно зависит от всех своих переменных из множества $X(n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и рассмотрим произвольную схему $\Sigma \in \widehat{U}_r^{Kl}$, которая её реализует со сложностью $\widehat{L}_r^{Kl}(l_n)$. В силу особенностей структуры схем из класса $\widehat{U}_r^{Kl}$, схема Σ будет состоять только из контактов, помеченных линейными функциями с непересекающимися или совпадающими множествами переменных $X_1, X_2, \dots, X_m$, где $m \geq \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$, и $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m = X(n)$. Для каждого $j = 1, \dots, m$, и $\sigma \in B$, обозначим через $\lambda_j^{(\sigma)}$ сумму по модулю 2 переменных из X_j и константы σ , а затем отметим, что любой контакт Σ помечен одной из функций вида $\lambda_j^{(\sigma)}$. Выделим в каждом множестве X_j , $j = 1, \dots, m$, одну переменную, которую обозначим через y_j , после чего подставим в схему Σ константы 0 вместо всех переменных, за исключением выделенных, и заметим, что при этом обобщенная схема Σ перейдет в «обычную» схему $\widehat{\Sigma}$ той же сложности, которая реализует функцию $l_m^{(\sigma)}(y_1, y_2, \dots, y_m)$.

Следовательно, согласно известной нижней оценке (см., например, [12])

$$L(\widehat{\Sigma}) = \widehat{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \geq 4 \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil - 4.$$

□

Из доказанных Следствия 2 и Леммы 2 вытекает справедливость Теоремы 1.

Определение 1. Функцию f из $P_2(n)$ будем называть α -сферической, где $\alpha \in B^n$, если для любых наборов β и γ из B^n , отличающихся от α ровно в одном и ровно в двух разрядах соответственно, $f(\beta) = 0$ и $f(\gamma) = 1$, а $\tilde{0}$ -сферическую функцию будем считать просто сферической, где $\tilde{0} \in B^n$ — нулевой набор. При этом КС, реализующую α -сферическую функцию, тоже будем называть α -сферической, а КС, реализующую сферическую функцию, — сферической.

Определение 2. Линейный контакт k с множеством переменных $X \subseteq X(n)$ будем называть замыкающим относительно $\alpha \in B^n(X(n))$ контактом, или, иначе, α -замыкающим контактом, если он проводит на наборах, отличающихся от α ровно в одном разряде, соответствующем одной из переменных множества X . В противном случае контакт k будем называть размыкающим относительно α контактом, или, иначе, α -размыкающим контактом.

Заметим, что α -замыкающий контакт не проводит, а α -размыкающий контакт проводит на наборе α . В дальнейшем по умолчанию будем считать, что набор α в определениях 1 и 2 — нулевой набор, и отметим, что в этом случае размыкающими контактами являются четные контакты, а замыкающими — нечетные.

Рассмотрим произвольную сферическую схему $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, $\Sigma \in \tilde{U}_r^{Kl}$, и введем ряд связанных с ней определений и обозначений. Пусть, в частности, $L^+(\Sigma)$ и $L^-(\Sigma)$ — число замыкающих и размыкающих контактов схемы Σ соответственно, а $C_{i,j}$, где $1 \leq i < j \leq n$, — одна, выбранная произвольным образом, цепь схемы Σ , которая идет от входа к выходу и проводит на наборе $\alpha_{i,j} \in B^n$, с 2 единицами, размещенными в разрядах с номерами i и j .

Обозначим через S и C множества указанных наборов $\alpha_{i,j}$ и цепей $C_{i,j}$ соответственно. При этом множество C будем называть *базовым множеством* схемы Σ , а входящие в него цепи $C_{i,j}$ — её *базовыми цепями*. Заметим, что базовая цепь $C_{i,j}$ содержит как контакт, в множество переменных которого входит переменная x_i , так и контакт, в множество переменных которого входит переменная x_j .

Действительно, если в контактах цепи $C_{i,j}$ не встречается переменная x_k , где $k \in \{i, j\}$, то цепь $C_{i,j}$ будет проводить как на наборе $\alpha_{i,j}$, так и на наборе с одной единицей, который отличается от $\alpha_{i,j}$ в k -м разряде и не может являться проводящей цепью схемы Σ .

Цепь $C_{i,j}$ будем называть *плохой*, если в ней есть контакт, содержащий как переменную x_i , так и переменную x_j , иначе цепь $C_{i,j}$ будем называть *хорошей*. Заметим, что в любой плохой цепи $C_{i,j}$ контакт, содержащий как переменную x_i , так и переменную x_j , является четным, а в любой хорошей цепи $C_{i,j}$ есть нечетный контакт, содержащий переменную x_i , и есть нечетный контакт, содержащий переменную x_j , иначе цепь $C_{i,j}$ не могла бы проводить на наборе $\alpha_{i,j}$. Кроме того, если цепь $C_{i,j}$ хорошая, то каждый нечетный контакт этой цепи содержит либо переменную x_i , либо переменную x_j .

Лемма 3. *Первый замыкающий контакт одной хорошей базовой цепи сферической схемы $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, $\Sigma \in \tilde{U}_r^{Kl}$, не может быть последним замыкающим контактом другой хорошей базовой цепи схемы Σ .*

Доказательство. Пусть контакт k схемы Σ является первым замыкающим контактом хорошей базовой цепи $C_1 = C_{i_1, j_1}$ и последним замыкающим контактом хорошей базовой цепи $C_2 = C_{i_2, j_2}$ схемы Σ . Если, двигаясь от входа схемы Σ к её выходу, эти цепи проходят через контакт k в одном и том же направлении, то построим цепь $\tilde{C} = C'_1 k C''_2$, которая от входа Σ до контакта k включительно идет по начальному отрезку $C'_1 k$ цепи C_1 , а затем переходит на заключительный отрезок C''_2 цепи C_2 от контакта k , не включая его, до выхода Σ . В противном

случае построим цепь $\hat{C} = C'_1 C''_2$, которая идет от входа Σ по цепи C_1 до первой концевой вершины k , а затем переходит на цепь C_2 .

Докажем, что как цепь $\tilde{C}$, так и цепь $\hat{C}$ при описанных выше условиях проводят хотя бы на одном наборе из множества B^n с одной единицей, что противоречит сферичности схемы Σ . По определению хороших базовых цепей в контакт k входит одна переменная с номером из множества $\{i_1, j_1\}$ и одна переменная с номером из множества $\{i_2, j_2\}$. Положим для определенности, что контакт k содержит переменную x_{i_1} и переменную x_{i_2} . В силу того, что контакт k является первым замыкающим контактом в цепи C_1 , её подцепь C'_1 состоит из размыкающих контактов, не содержащих переменную x_{i_1} , так как в противном случае цепь C_1 не могла бы проводить на наборе α_{i_1, j_1} , с 2 единицами, размещенными в разрядах с номерами i_1 и j_1 . Значит, подцепь C'_1 проводит на наборе с одной единицей, размещенной в разряде с номером i_1 .

Теперь докажем, что и подцепь C''_2 цепи C_2 состоит из размыкающих контактов, не содержащих переменную x_{i_1} . Так как контакт k является последним замыкающим контактом в хорошей базовой цепи C_2 , её подцепь C''_2 состоит из размыкающих контактов, не содержащих переменную x_{i_2} , так как в противном случае цепь C_2 не могла бы проводить на наборе α_{i_2, j_2} . Теперь если переменная x_{i_1} совпадает с переменной x_{i_2} , то C''_2 состоит из размыкающих контактов, не содержащих переменную x_{i_1} . Если же переменная x_{i_1} не совпадает с переменной x_{i_2} , то в силу раздельности множеств переменных, управляющих контактами цепи C_2 , переменная x_{i_1} , как и переменная x_{i_2} , не входит в контакты подцепи C''_2 , а значит, C''_2 проводит на наборе с одной единицей, размещенной в разряде с номером i_1 .

Таким образом, подцепи C'_1 и C''_2 , а также замыкающий контакт k проводят на наборе β с одной единицей, размещенной в разряде с номером i_1 . Тогда по построению цепи $\tilde{C}$ и $\hat{C}$ проводят на наборе β , а значит, в схеме Σ присутствует цепь, проводящая на наборе β . $\square$

Лемма 4. Для сферической схемы $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, где $\Sigma \in \tilde{U}_r^{Kl}$, справедливо неравенство

$$L^+(\Sigma) \geq \frac{2n}{r} - \frac{1 + \sqrt{2(r-1)rL^-(\Sigma) + 1}}{r} \quad (3.2)$$

Доказательство. Пусть K_1 и K_2 — множества первых и последних замыкающих контактов хороших цепей из базового множества схемы Σ соответственно. Обозначим через X_1 и X_2 объединение множеств переменных всех контактов из K_1 и K_2 соответственно, а затем введем множества

$$Z = X(n) \setminus (X_1 \cup X_2); \hat{X} = X_1 \cap X_2; Y_i = X_i \setminus \hat{X}, \quad (3.3)$$

где $i \in \{1, 2\}$. Положим далее

$$|Z| = d; |\hat{X}| = a; |Y_i| = b_i \Rightarrow |X_i| = a + b_i, \quad (3.4)$$

где $i \in \{1, 2\}$, заметив, что при этом в силу (3.3) и (3.4) выполняются равенства

$$|X_1| + |X_2| = 2a + b_1 + b_2 = 2n - b_1 - b_2 - 2d. \quad (3.5)$$

Используя введенные обозначения и соотношения (3.3), (3.4), получим нижние оценки сложностей $L^+(\Sigma)$ и $L^-(\Sigma)$. Заметим, что каждая переменная из множества X_i , где $i \in \{1, 2\}$, входит хотя бы в один из контактов множества K_i , а каждая переменная из $\hat{X}$ входит хотя бы в один из контактов множества K_1 и хотя бы в один из контактов множества K_2 .

Так как согласно Лемме 3 $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, а множество переменных одного контакта содержит не более чем r переменных, то с учетом (3.3)–(3.5) будет выполняться неравенство

$$L^+(\Sigma) \geq \frac{|X_1| + |X_2|}{r} = \frac{2a + b_1 + b_2}{r} = \frac{2n - \varphi(b_1, b_2, d)}{r}, \quad (3.6)$$

где

$$\varphi(b_1, b_2, d) = b_1 + b_2 + 2d.$$

Переходя к нижней оценке $L^-(\Sigma)$, заметим, что в соответствии с определением пар переменных x_i и x_j , которые принадлежат множеству $Y_1 \cup Y_2 \cup Z$, но не входят при этом в различные множества Y_1 и Y_2 , соответствует плохая базовая цепь $C_{i,j}$, проходящая через размыкающий контакт, содержащий как переменную x_i , так и переменную x_j .

Так как при этом один контакт содержит не более чем $\frac{r(r-1)}{2}$ неупорядоченных пар различных переменных, то выполняется неравенство

$$L^-(\Sigma) \geq \frac{C_{b_1+b_2+d}^2 - b_1 b_2}{\frac{r(r-1)}{2}},$$

которое равносильно неравенству

$$r(r-1)L^-(\Sigma) \geq 2C_{b_1+b_2+d}^2 - 2b_1 b_2 = b_1^2 + b_2^2 + d^2 + 2d(b_1 + b_2) - b_1 - b_2 - d$$

и, следовательно,

$$r(r-1)L^-(\Sigma) \geq b_1^2 + b_2^2 + d^2 + 2d(b_1 + b_2) - b_1 - b_2 - 2d = \psi(b_1, b_2, d).$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов Лагранжа можно доказать, что максимум функции $\varphi(b_1, b_2, d) = b_1 + b_2 + 2d$ от действительных неотрицательных переменных b_1, b_2, d при условии

$$\psi(b_1, b_2, d) \leq r(r-1)L^-(\Sigma) = A$$

достигается при $b_1 = b_2 = b$, $d = 0$ и равен $2b$, где $2b^2 + 2b = A$, и, следовательно,

$$b = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2A+1}{4}}; \varphi(b_1, b_2, d) \leq 2b = 1 + \sqrt{2A+1} = 1 + \sqrt{2(r-1)rL^-(\Sigma) + 1},$$

из чего, в соответствии с (3.6), вытекает (3.2). □

Замечание 1. В случае $r = 1$, когда, как уже говорилось, классы $\hat{U}_1^{kl}$ и $\tilde{U}_1^{kl}$ совпадают с классом «обычных» КС, неравенство (3.2) имеет вид

$$L^+(\Sigma) \geq 2n - 2. \quad (3.7)$$

Замечание 2. Неравенства (3.2) и (3.7) будут справедливы и для α -сферической схемы Σ , при замене сложностей $L^+(\Sigma)$ и $L^-(\Sigma)$ числами $L^+(\Sigma, \alpha)$ и $L^-(\Sigma, \alpha)$, которые определяются, как число α -замыкающих и число α -размыкающих контактов в схеме Σ соответственно.

Лемма 5. Для сферической схемы $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$, где $\Sigma \in \tilde{U}_r^{Kl}$, в случае $r > 1$ имеет место следующее неравенство:

$$L^+(\Sigma) \geq \frac{2n}{r} - \frac{5}{2}\sqrt{L^-(\Sigma)}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $L^-(\Sigma) = 0$, т. е. когда сферическая схема Σ не содержит размыкающих контактов. Тогда все цепи $C_{i,j}$ из её базового множества C — хорошие базовые. Докажем, что в этом случае верно неравенство (3.8), т. е.

$$L^+(\Sigma) \geq \frac{2n}{r}. \quad (3.9)$$

Если каждая переменная из $X(n)$ содержится хотя бы в 2 контактах сферической схемы Σ , то неравенство (3.9) верно. Заметим, что в случае, когда все цепи базового множества C хорошие, множества переменных X_1 и X_2 , т. е. объединения множеств переменных первых и последних замыкающих контактов соответственно, из Леммы 4 содержат не менее $n - 1$ переменных. Действительно, пусть переменные x_i и x_j , где $1 \leq i < j \leq n$, не входят в X_1 . Тогда хорошая базовая цепь $C_{i,j}$ должна содержать первый замыкающий контакт, содержащий либо переменную x_i , либо переменную x_j , что противоречит тому, что обе переменные отсутствуют во множестве X_1 . Аналогично две разные

переменные не могут отсутствовать во множестве X_2 , значит, множества переменных X_1 и X_2 содержат не менее $n - 1$ переменных. Так как $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то все переменные, кроме, может быть, двух, содержатся как в первом замыкающем контакте какой-то хорошей базовой цепи множества C , так и в последнем замыкающем контакте какой-то хорошей базовой цепи C , т. е. хотя бы в 2 контактах схемы Σ . Тогда верно следующее неравенство:

$$L^+(\Sigma) \geq 2 \frac{n-2}{r} + 2 = \frac{2n-2r-4}{r}$$

что при $r > 1$ соответствует неравенству (3.9).

Теперь рассмотрим случай, когда $L^-(\Sigma) > 0$, т. е. $L^-(\Sigma) \geq 1$. Тогда выполняется неравенство

$$A = r(r-1)L^-(\Sigma) \geq 2,$$

из которого, как легко убедиться, следует неравенство

$$1 + \sqrt{2A+1} < \frac{5}{2}\sqrt{A},$$

дающее, с учетом (3.2), неравенство (3.8). $\square$

Замечание 3. Неравенство (3.8) будет справедливо и для α -сферической схемы Σ , аналогично замечанию 2.

Для доказательства нижней оценки сложности линейной функции $l_n^{(\sigma)}$ в классе $\tilde{U}_r^{kl}$, следуя [3], используем среднюю проводимость КС.

Определение 3. Для натурального r будем называть множество наборов $\delta \subseteq B^n$ r -равномерным, если для каждого $t \in [1, r]$ и любых различных натуральных чисел $i_1, i_2, \dots, i_t$ отрезка $[1, n]$ число тех наборов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из δ , для которых $\alpha_{i_1} \oplus \alpha_{i_2} \oplus \dots \oplus \alpha_{i_t} = 0$, равно $\frac{|\delta|}{2}$.

Заметим, что множества $B_{\text{чет}}^n$ и $B_{\text{неч}}^n$, состоящие из всех четных и нечетных наборов куба B^n соответственно, являются равномерными при $n \geq 2$. Заметим также, что при $n \geq 2$ любой контакт схемы $\Sigma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из U_r^{kl} проводит ровно на половине наборов из r -равномерного множества δ , и следовательно, выполняются следующие очевидные равенства:

$$\frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} L^+(\Sigma, \alpha) = \frac{1}{|\delta|} \sum_{\alpha \in \delta} L^-(\Sigma, \alpha) = \frac{1}{2} L(\Sigma), \quad (3.10)$$

где величины $L^+(\Sigma, \alpha)$ и $L^-(\Sigma, \alpha)$ определяются аналогично тому, как это было сделано в Замечании 2.

Лемма 6. При $n > r$ и любом $\sigma \in B$ для сложности линейной функции $l_n^{(\sigma)}$ из $P_2(n)$ в классе $\tilde{U}_r^{Kl}$ верна следующая оценка:

$$\tilde{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)}) \geq 4\frac{n}{r} - 10\sqrt{\frac{n}{r}}.$$

Доказательство. Пусть схема $\Sigma \in \tilde{U}_r^{Kl}$ реализует линейную функцию $l_n^{(\sigma)}$ со сложностью $\tilde{L}_r^{Kl}(l_n^{(\sigma)})$, которая, в силу Следствия 2 и Леммы 1, не больше чем $\frac{4n}{r}$. Выберем в качестве множества наборов δ множество $B_{\text{неч}}^n$, если $\sigma = 1$, и $B_{\text{чет}}^n$, если $\sigma = 0$. При этом схема Σ будет α -сферической по отношению к любому набору α из δ . Заметим, что в случае $r = 1$, в силу Замечания 1 и Замечания 2, выполняется неравенство

$$L^+(\Sigma, \alpha) \geq \frac{2n}{r} - 2$$

и, согласно (3.10), верно неравенство

$$L(\Sigma) \geq \frac{4n}{r} - 4.$$

Если же $r > 1$, то, в силу Леммы 5 и Замечания 3, будет выполняться неравенство

$$L^+(\Sigma, \alpha) \geq \frac{2n}{r} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{4n}{r}},$$

так как при этом $L(\Sigma) \leq \frac{4n}{r}$ в силу минимальности схемы Σ .

Следовательно, согласно (3.10), справедливо неравенство

$$L(\Sigma) \geq \frac{4n}{r} - 10\sqrt{\frac{n}{r}}.$$

□

Из доказанных Леммы 1 и Леммы 6 вытекает справедливость Теоремы 2.

4. Заключение

В работе исследована сложность реализации линейной функции в классах $\hat{U}_r^{Kl}$ и $\tilde{U}_r^{Kl}$ обобщенных контактных схем. Получена точная оценка сложности линейной функции l_n в классе $\hat{U}_r^{Kl}$ и ее асимптотически точная оценка сложности в классе $\tilde{U}_r^{Kl}$.

Список источников

1. Вороненко А. А. Об одном свойстве линейных булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2021. № 2, С. 43–44
2. Ложкин С. А., Кошкин Н. А. О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными и обобщёнными контактными схемами // Lecture Notes in Computer Science. 1987. Т. 28, С. 293–296
3. Ложкин С. А., Кошкин Н. А. О сложности реализации некоторых систем функций алгебры логики контактными многополюсниками // Докл. АН СССР 1988. Т. 298, № 4, С. 807–811
4. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. М.: МГУ, 2004. 253 с.
5. Ложкин С. А., Михалев Е. К. О сложности линейной функции алгебры логики в некоторых классах обобщённых контактных схем // Проблемы теоретической кибернетики: материалы XX Международной научной конференции (Москва 5–8 декабря 2024г.) М.:МАКС Пресс. 2025. С. 82–84 <https://doi.org/10.29003/m4678.978-5-317-07402-9>
6. Подольская О. В. Сложность линейных функций и функции голосования в базе антицепных функций // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика. 2016. Т. 71, № 2, С. 51–52 <https://doi.org/10.3103/S002713221602008X>
7. Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах для схем переключательного типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 1 (33). С. 5–23
8. Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах константной длины для обобщённых итеративных контактных схем // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 42–50.
9. Рычков К. Л. О сложности обобщённых контактных схем. Дискретн. анализ и исслед. опер., 16:5, 2009. С. 78–87
10. Чашкин А. В. О сложности одной системы линейных булевых функций // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, механика. 2025. № 2, С. 76–79 <https://doi.org/10.3103/S0027132225700329>
11. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. М.: Высшая школа, 2007. 191 с.
12. Cardot C. Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais. // Ann. Telecomm. 1952. Vol. 7, N. 2. P. 75–84.

References

1. Voronenko A.A. On one property of linear boolean functions. *Bulletin of the Moscow University. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2021, no. 2, pp. 43–44.
2. Lozhkin S. A., Koshkin N. A. On the complexity of the implementation of some systems of boolean functions by contact and generalized contact circuits. *Lecture Notes in Computer Science*, 1987, vol. 28, pp. 293–296.
3. Lozhkin S. A., Koshkin N. A. On the complexity of the implementation of some systems of functions of logic algebra by contact multipolytes. *Rep. USSR Academy of Sciences*, 1988, vol. 298, no. 4, pp. 807–81.
4. Lozhkin S. A. Lectures on the basics of cybernetics. Moscow, MSU, 2004. 253 p.

5. Lozhkin S. A., Mikhalev E. K. On the complexity of the linear boolean function in some classes of generalized contact circuits. *Problems of theoretical cybernetics: proceedings of the XX International Scientific Conference (Moscow, December 5–8, 2024)* Moscow: MAKS Press, 2025, pp. 82–84 <https://doi.org/10.29003/m4678.978-5-317-07402-9>
6. Podolskaya O. V. Complexity of linear and majority functions in the basis of antichain functions. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2016, vol. 71, pp. 82–83. <https://doi.org/10.3103/S002713221602008X>
7. Romanov D. S., Romanova E. Yu. On single detecting test sets for circuits of switching type. *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. Mathematics*, 2015, no. 1 (33). pp. 5–23.
8. Romanov D. S., Romanova E. Yu. On the single fault detection test sets of constant cardinality for generalized iterative switching circuits. *Bulletin of the Moscow University. Computational Mathematics and Cybernetics*, 2015, no. 3, pp. 42–50.
9. Rychkov K. L. On the complexity of generalized contact circuits. *Diskretn. Analiz and Issled. Oper.*, 2009, vol. 16, no. 5, pp. 78–87.
10. Chashkin A. V. On the Complexity of One System of Linear Boolean Functions. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2025, vol. 80, pp. 133–135. <https://doi.org/10.3103/S0027132225700329>
11. Yablonskij S.V. Elements of mathematical cybernetics. Moscow: Higher School, 2007. 191 p.
12. Cardot C. Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais. *Ann. Telecomm.*, 1952, vol. 7, no. 2, pp. 75–84.

Об авторах

Михалев Евгений

Константинович, студент,
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, 119991, Российская
Федерация,
genya.mikhalev@gmail.com

Ложкин Сергей Андреевич, д-р
физ.-мат. наук, проф., Московский
государственный университет им. М.
В. Ломоносова, Москва, 119991,
Российская Федерация,
lozhkin@cs.msu.ru
<https://orcid.org/0000-0002-8952-6046>

About the authors

Evgenii K. Mikhalev, Student,
Lomonosov Moscow State University,
Moscow, 119991, Russian Federation,
genya.mikhalev@gmail.com

Sergei A. Lozhkin, Dr. Sci.
(Phys.-Math.), Prof., Lomonosov
Moscow State University, Moscow,
119991, Russian Federation,
lozhkin@cs.msu.ru
<https://orcid.org/0000-0002-8952-6046>

Поступила в редакцию / Received 16.11.2025

Поступила после рецензирования / Revised 24.12.2025

Принята к публикации / Accepted 12.01.2026