



Серия «Математика»  
2026. Т. 57. С. 35–47

Онлайн-доступ к журналу:  
<http://mathizv.isu.ru>

---

---

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского  
государственного  
университета

---

---

Научная статья

УДК 517.977

MSC 49M25, 49N10

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.35>

## Задача оптимизации набора квадратичных критериев относительно линейной многошаговой системы управления

В. А. Срочко<sup>1</sup>, В. Г. Антоник<sup>1</sup>, А. В. Аргучинцев<sup>1✉</sup>

<sup>1</sup> Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация  
✉ [arguch@math.isu.ru](mailto:arguch@math.isu.ru)

**Аннотация:** Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления в дискретной формализации и многокритериальной постановке: линейная система, набор квадратичных по состоянию и управлению целевых функций, многоцелевая оптимизация, Парето-оптимальные решения. На основе линейной свертки критериев проводится редукция к параметрической задаче скалярной оптимизации с необходимостью глобального решения без предположений о выпуклости. Снимается зависимость суммарной целевой функции от переменных состояния. На основе экстремальных собственных значений формулируются условия на параметры, которые обеспечивают свойство выпуклости скалярной задаче. Формулируются две задачи оптимизации по параметрам, которые улучшают определяющую матрицу итоговой квадратичной формы по части обусловленности и сходимости. В результате предлагаемой процедуры регуляризации из многоэкстремального семейства задач выделяются задачи выпуклого программирования с квадратичной целевой функцией, допускающие обоснованное решение. Это решение является Парето-оптимальным управлением для исходной невыпуклой линейно-квадратичной задачи.

**Ключевые слова:** линейно-квадратичная задача оптимального управления, дискретный вариант, многоцелевая постановка, разрешающая задача скалярной оптимизации, выделение выпуклых задач

**Ссылка для цитирования:** Срочко В. А., Антоник В. Г., Аргучинцев А. В. Задача оптимизации набора квадратичных критериев относительно линейной многошаговой системы управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 57. С. 35–47.  
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.35>

Research article

## The Problem of Optimizing a Set of Quadratic Criteria Relative to a Linear Multi-Step Control System

Vladimir A. Srochko<sup>1</sup>, Vladimir G. Antonik<sup>1</sup>,  
Alexander V. Arguchintsev<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup> Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

✉ arguch@math.isu.ru

**Abstract:** A linear-quadratic problem of optimal control in a discrete-time formulation and multi-objective setting is considered: a linear system, a set of quadratic objective functions in state and control variables, multi-objective optimization, and Pareto-optimal solutions. Based on a linear scalarization of criteria, a reduction to a parametric scalar optimization problem is performed, requiring a global solution without any convexity assumptions. The dependence of the aggregate objective function on state variables is eliminated. Using extremal eigenvalues, conditions on the parameters that ensure the convexity property in the scalar problem are formulated. Furthermore, two optimization problems with respect to the parameters are announced; these problems improve the defining matrix of the resulting quadratic form in terms of conditioning and convergence. As a result of the proposed regularization procedure, a family of multi-extremal problems is reduced to convex programming problems with a quadratic objective function that admit a guaranteed solution. This solution constitutes a Pareto-optimal control for the original non-convex linear-quadratic problem.

**Keywords:** linear-quadratic problem of optimal control, discrete-time variant, multi-objective formulation, auxiliary scalar optimization problem, extraction of convex problems

**For citation:** Srochko V. A., Antonik V. G., Arguchintsev A. V. The Problem of Optimizing a Set of Quadratic Criteria Relative to a Linear Multi-Step Control System. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 57, pp. 35–47. (in Russian)

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.57.35>

### 1. Введение

Многие задачи оптимального управления связаны с линейными системами и продолжают сохранять свою привлекательность для исследований. На этом фоне традиционно выделяются постановки с квадратичными функционалами на минимум тех или иных отклонений (невязок) от желаемых (идеальных) режимов по переменным состояниям и управления. При этом стандартная ситуация непременно связана с предположением выпуклости определяющих функционал квадратичных форм, что обеспечивает возможность глобального решения задачи на основе итерационных методов принципа максимума и выпуклого программирования. Невыпуклые (нестандартные) линейно-квадратичные задачи

допускают гарантированное решение на уровне управлений, удовлетворяющих принципу максимума [7]. Определенные достижения в этой области продемонстрировали методы, связанные с реализацией условий глобальной оптимальности в невыпуклых задачах специальной структуры (d.c.-оптимизация) [10;12]. Основные подходы к решению данного класса задач в традиционной постановке вместе со ссылками на соответствующие публикации обзорно представлены в статьях авторов [2;9], полнотекстовые варианты которых находятся в открытом доступе.

Конструктивным подходом к проблеме глобального решения линейно-квадратичных задач является, на наш взгляд, обоснованная коррекция стандартных формулировок уже на уровне постановки задачи. В этой связи можно отметить статьи [1;3], в которых результативно используются определенные отклонения от «стандарта» при сохранении выпуклости задачи. Обновленная формализация невыпуклой ситуации проводится в [2;9], где рассматривается традиционный многочленный функционал, но с положительными параметрами при квадратичных формах со знаконеопределенными матрицами. Более того, представляется целесообразной и даже необходимой параметризация множества допустимых управлений: кусочно-постоянные или кусочно-линейные вектор-функции на заданной сетке узлов. В результате задача приобретает конечномерный формат: минимизация квадратичной функции с параметрами в определяющей матрице на выпуклом множестве. Остается сформулировать условия на параметры, которые обеспечивают неотрицательную (положительную) определенность и приемлемую обусловленность этой матрицы. Тем самым из параметрического семейства многоэкстремальных линейно-квадратичных задач выделяются выпуклые (сильно выпуклые) задачи, допускающие решение с помощью известных методов и программ.

В данной статье реализуется новая интерпретация описанной технологии. Оказывается, что процедура параметризации многочленного квадратичного функционала является следствием альтернативной постановки задачи. Это многокритериальная задача по набору стандартных квадратичных функционалов с решением в смысле Парето. Иными словами, линейно-квадратичная задача в векторной постановке состоит в поиске Парето-оптимальных управлений. При этом стандартная скаляризация задачи (линейная свертка целевых функционалов) приводит к суммарному функционалу с параметрами, который фигурирует в [2;9] в стартовой постановке. В результате глобальное решение задачи на минимум параметрического функционала является Парето-оптимальным решением линейно-квадратичной задачи.

Такой подход к постановке и решению линейно-квадратичной задачи для дифференциальной системы управления анонсирован в [8]. В данной статье эта технология реализуется в дискретном варианте.

## 2. Постановка задачи и подход к решению

Пусть связь между управлением  $u(k) \in \mathcal{R}^r$  и состоянием  $x(k) \in \mathcal{R}^n$  в моменты с нумерацией  $k = 0, 1, \dots, N-1$  представляется соотношением

$$x(k+1) = A_k x(k) + B_k u(k), \quad x(0) = x^0, \quad (2.1)$$

в котором  $A_k \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $B_k \in \mathcal{R}^{n \times r}$ .

Введем блочный вектор-столбец управляющих воздействий (управление)

$$u = (u(0), \dots, u(N-1)) \in \mathcal{R}^{Nr}.$$

Поставим ограничение на управление  $u \in U$ , где  $U$  — выпуклое компактное множество.

На множестве  $U$  с учетом взаимосвязи  $u(k) \rightarrow x(k+1)$  определим набор квадратичных функций (целевые функции)

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \langle x(N), C_N x(N) \rangle, \quad F_2(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle x(k+1), C_k x(k+1) \rangle, \\ F_3(u) &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle u(k), D_k u(k) \rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $C_N, C_k, D_k$  — симметричные матрицы.

Сформируем вектор-функцию  $F(u) = (F_1(u), F_2(u), F_3(u))$  и поставим задачу векторной (многоцелевой) оптимизации

$$F(u) \rightarrow \min, \quad u \in U \quad (2.3)$$

с решением в смысле Парето [6; 11].

Таким образом, линейно-квадратичная задача (2.3) для дискретной системы (2.1) с целевыми функциями (2.2) состоит в нахождении Парето-оптимальных (П-оптимальных) управлений. Напомним, что управление  $u^*$  называется П-оптимальным, в задаче (2.3), если не существует управления  $u \in U$  с условием  $F(u) \neq F(u^*)$ , для которого  $F(u) \leq F(u^*)$ .

Пусть  $U_*$  — множество П-оптимальных управлений в задаче (2.3). Для характеристики и поиска таких управлений, согласно стандартной схеме проведем параметризацию задачи (2.3) на основе линейной комбинации критериев.

Пусть  $p = (p_1, p_2, p_3) > 0$  — вектор параметров. Введем линейную свертку целевых функций

$$f_p(u) = \langle p, F(u) \rangle = \sum_{i=1}^3 p_i F_i(u)$$

и сформулируем параметрическую задачу скалярной оптимизации

$$f_p(u) \rightarrow \min, \quad u \in U. \quad (2.4)$$

Обозначим через  $u^p$  глобальное решение ( $p$ -оптимальное решение) этой задачи.

Связь между решениями задач (2.3) и (2.4) состоит в следующем [6; 11]:  $u^p \in U_*$  для всех  $p > 0$ .

Таким образом, любое  $p$ -оптимальное решение задачи (2.4) является  $P$ -оптимальным в задаче (2.3). Проблема заключается в необходимости глобального решения параметрической задачи (2.4). Как известно, такое решение гарантированно допускают, вообще говоря, только выпуклые задачи относительно функции  $f_p(u)$  и множества  $U$ . В наших условиях (матрицы  $C_N, C_k, D_k, k = 0, 1, \dots, N - 1$ , в наборе целевых функций (2.2) симметричны без знакоопределенности) свойство выпуклости функции  $f_p(u)$ ,  $p > 0$ , вообще говоря, не имеет места. В этой связи возникает проблема: найти условия на вектор параметров  $p > 0$ , которые обеспечивают функции  $f_p(u)$  как минимум свойство выпуклости.

В рамках линейно-квадратичной задачи (2.3) такая проблема конструктивно разрешима. Для ее реализации необходимо в первую очередь получить явные выражения целевых функций  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$  через управление  $u$ . Для дискретной системы (2.1) это проводится достаточно просто.

Предварительно выделим класс линейно-квадратичных задач, которым соответствует выпуклая функция  $f_p(u)$  для всех  $p > 0$ . Это задачи с условием неотрицательной определенности всех матриц в наборе (2.2) (здесь и далее для краткости неравенство  $\geq 0$ , примененное к матрицам, будет обозначать неотрицательную определенность соответствующих матриц):

$$C_N \geq 0, \quad C_k \geq 0, \quad D_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.5)$$

В этом случае целевые функции  $F_i(u)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , являются выпуклыми на  $\mathcal{R}^{Nr}$  [4]. Как следствие, параметрическая функция  $f_p(u)$  очевидно становится выпуклой для всех  $p > 0$ , т. е. задача (2.4) фактически допускает глобальное решение на основе методов выпуклого программирования.

В качестве дополнительной информации приведем формулу для градиента минимизируемой функции. Пусть

$$\hat{f}_p(u) = 1/2 f_p(u), \quad u = (u(0), \dots, u(N - 1)).$$

Тогда имеют место следующие выражения для частных производных [4; 5]:

$$\frac{\partial \hat{f}_p(u)}{\partial u(k)} = B_k^T \psi(k) + p_3 D_k u(k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Здесь сопряженные переменные  $\psi(k) \in \mathcal{R}^n$  определяются соотношениями (обратная нумерация)

$$\psi(N-1) = (p_1 C_N + p_2 C_{N-1})x(N),$$

$$\psi(k-1) = A_k^T \psi(k) + p_2 C_{k-1} x(k), \quad k = N-1, N-2, \dots, 1.$$

Данное выражение является альтернативным вариантом формулы для градиента, связанным с теорией оптимального управления, и может конструктивно использоваться при реализации соответствующих численных методов оптимизации.

**Замечание 1.** Каждая целевая функция в задаче (2.3) может иметь некоторый содержательный смысл в рамках приложений. Это, например, мера отклонения (невязка) от желательных и нежелательных состояний  $(F_1(u), F_2(u))$ , ресурс управляющих воздействий или затраты на реализацию многошагового процесса  $(F_3(u))$ . В таком контексте допустима ранжировка целевых функций по значимости. Кроме того, имеется, конечно, возможность изменения и дополнения набора критериев с сохранением их квадратичности. Например, можно дополнительно использовать билинейную функцию

$$F_4(u) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle x(k+1), G_k u(k) \rangle,$$

связывающую состояние и управление.

### 3. Преобразование целевых функций и параметрические задачи

В рамках дискретной системы (2.1) последовательно получаем

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_k A_{k-1} x(k) + A_k B_{k-1} u(k) + B_k u(k) = \\ &= A_k A_{k-1} A_{k-2} x(k-2) + A_k A_{k-1} B_{k-2} u(k-2) + A_k B_{k-1} u(k-1) + B_k u(k) = \\ &= \dots = A_k \dots A_0 x(0) + A_k \dots A_1 B_0 u(0) + A_k \dots A_2 B_1 u(1) + \\ &\quad + \dots + A_k B_{k-1} u(k-1) + B_k u(k). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Для  $k = 0, 1, \dots, N-1$  введем матричные обозначения

$$Y_k = A_k \dots A_0, \quad Y_{kj} = A_k \dots A_{j+1} B_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \quad Y_{kk} = B_k.$$

Образует  $(n \times Nr)$ -матрицы  $X_0, X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , следующей структуры по  $(n \times r)$ -блокам:

$$X_0 = [B_0, O, \dots, O],$$

$$X_k = [Y_{ko}, Y_{k1}, \dots, Y_{kk}, O, \dots, O].$$

Отметим, что матрица  $X_k$  содержит  $N - (k + 1)$  нулевых блоков  $O$ .

С учетом введенных обозначений на основании выражения (3.1) приходим к представлению

$$x(k+1) = Y_k x(0) + \sum_{j=0}^k Y_{kj} u(j).$$

Используя полный вектор управления  $u = (u(0), \dots, u(N-1))$ , получаем итоговую формулу для текущего состояния

$$x(k+1) = Y_k x(0) + X_k u, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

Дополнительно к этой формуле полезно указать рекуррентные соотношения для матриц  $Y_k, X_k$ . Образует  $(n \times Nr)$ -матрицу  $\hat{B}_{k+1}, k = 0, 1, \dots, N-2$ , содержащую  $N$  блоков размеров  $(n \times r)$  согласно следующему правилу:  $(n \times r)$ -матрица  $B_{k+1}$  расположена на позиции  $(k+2)$ , остальные блоки нулевые. Формулы пересчета матриц из (3.2) имеют вид

$$Y_{k+1} = A_{k+1} Y_k, \quad X_{k+1} = A_{k+1} X_k + \hat{B}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-2.$$

Рассмотрим далее целевые функции  $F_1(u), F_2(u)$  при условии (3.2). После очевидных преобразований получаем следующие представления:

$$F_1(u) = \langle u, S_1 u \rangle + 2\langle u, S_{12} x(0) \rangle + \langle x(0), S_{11} x(0) \rangle,$$

$$S_1 = X_{N-1}^T C_N X_{N-1}, \quad S_1 = S_1^T,$$

$$S_{12} = X_{N-1}^T C_N Y_{N-1}, \quad S_{11} = Y_{N-1}^T C_N Y_{N-1};$$

$$F_2(u) = \langle u, S_2 u \rangle + 2\langle u, S_{21} x(0) \rangle + \langle x(0), S_{22} x(0) \rangle,$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T C_k X_k), \quad S_2 = S_2^T,$$

$$S_{21} = \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T C_k Y_k), \quad S_{22} = \sum_{k=0}^{N-1} (Y_k^T C_k Y_k).$$

Функцию  $F_3(u)$  представим в требуемой форме  $F_3(u) = \langle u, S_3 u \rangle$ , где  $S_3$  – блочно-диагональная матрица с блоками  $D_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ :

$$S_3 = \text{diag}(D_0, \dots, D_{N-1}), \quad S_3 = S_3^T.$$

Учитывая эти представления, получаем соответствующее выражение для параметрической функции

$$f_p(u) = p_1 F_1(u) + p_2 F_2(u) + p_3 F_3(u) =$$

$= \langle u, S(p)u \rangle + 2\langle u, (p_1 S_{12} + p_2 S_{21})x(0) \rangle + \langle x(0), (p_1 S_{11} + p_2 S_{22})x(0) \rangle$   
с управляющей матрицей

$$S(p) = p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3, \quad S(p) = S^T(p). \quad (3.3)$$

**Замечание 2.** Отметим сохранение свойств знакоопределенности матриц в процессе преобразования задачи (2.3):

$$C_N \geq 0 \Rightarrow S_1 \geq 0, \quad C_k \geq 0 \Rightarrow S_2 \geq 0, \quad D_k \geq 0 \Rightarrow S_3 \geq 0.$$

Следовательно, заявленные ранее матричные неравенства (2.5) действительно обеспечивают выпуклость целевых функций  $F_i(u)$  ( $S_i \geq 0$ ) вместе с параметрической функцией  $f_p(u)$  ( $S(p) \geq 0$ ).

#### 4. Выбор параметров. Выделение выпуклых задач

Перейдем к формулировке условий на введенный ранее вектор параметров  $p = (p_1, p_2, p_3) > 0$ , которые обеспечивают свойство выпуклости параметрической функции  $f_p(u)$ . Соответствующие соотношения будем оформлять через экстремальные собственные значения  $\lambda_{\min}(\cdot), \lambda_{\max}(\cdot)$  полученных матриц.

Предварительно отметим известные неравенства — оценки, связанные с выражением (3.3) [2; 9]:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(S(p)) &\geq \sum_{i=1}^3 p_i \lambda_{\min}(S_i) = \Delta_{\min}(p), \\ \lambda_{\max}(S(p)) &\leq \sum_{i=1}^3 p_i \lambda_{\max}(S_i) = \Delta_{\max}(p). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выпуклость квадратичной функции  $f_p(u)$  эквивалентна спектральному неравенству для управляющей матрицы (неотрицательная определенность)

$$\lambda_{\min}(S(p)) \geq 0. \quad (4.2)$$

Достаточное условие выпуклости, согласно (4.1), имеет вид (линейное неравенство)

$$\Delta_{\min}(p) \geq 0. \quad (4.3)$$

Отметим, что строгие неравенства в (4.2), (4.3) обеспечивают сильную выпуклость функции  $f_p(u)$  (положительная определенность  $S(p)$ ).

Выделим из условия (4.3) характерные случаи, имеющие актуальное значение:

1. Пусть выполнено условие разных знаков

$$\lambda_{\min}(S_1) + \lambda_{\min}(S_2) = \mu_{12} > 0, \quad \lambda_{\min}(S_3) = \mu_3 < 0.$$

Положим  $p_1 = p_2$ ,  $p_3 = 1$ . Тогда получаем неравенство выпуклости  $p_1\mu_{12} + \mu_3 \geq 0$  и оценку снизу для параметра  $p_1 \geq \frac{|\mu_3|}{\mu_{12}}$ .

В терминологии исходных матриц данное предположение обеспечивается, например, условиями знакоопределенности:

$$C_N > 0, \text{ rank } X_{N-1} = \min\{n, Nr\},$$

$$C_k \geq 0, \quad D_k < 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отсюда получаем  $S_1 + S_2 > 0$ ,  $S_3 < 0$ , что соответствует выпуклово-вогнутому случаю относительно квадратичных форм  $\langle u, (S_1 + S_2)u \rangle$ ,  $\langle u, S_3 u \rangle$ , составляющих определяющую часть параметрической функции  $f_p(u)$  (d.c.-ситуация [10]).

В содержательном плане это может означать ориентировку на максимизацию энергетического ресурса управления в рамках многоцелевой постановки:  $|F_3(u)| \rightarrow \max$ ,  $u \in U$ . Такая установка представляется вполне разумной при наличии ограничений на управление: максимизировать усилия по управлению для достижения определенной цели по состоянию (минимизация невязки).

2. Симметричный вариант определяется соотношениями  $\mu_{12} < 0$ ,  $\mu_3 > 0$ . Полагая  $p_1 = p_2 = 1$ , получаем условие  $\mu_{12} + p_3\mu_3 \geq 0$  вместе с оценкой  $p_3 \geq \frac{|\mu_{12}|}{\mu_3}$ .

В этом случае необходимо минимизировать энергию управляющего воздействия вместе с максимизацией некоторой невязки по состоянию.

Отметим, что оценки сверху для параметров будут заложены в постановках оптимизационных задач, представленных ниже.

Далее заметим, что указанные неравенства выделяют, вообще говоря, некоторые множества параметров. В этой связи возникает возможность постановки оптимизационных задач, связанных с данной ситуацией.

Первую задачу формулируем следующим образом:

$$\text{cond}(S(p)) = \frac{\lambda_{\max}(S(p))}{\lambda_{\min}(S(p))} \rightarrow \min, \quad p > 0, \quad (4.4)$$

$$\lambda_{\min}(S(p)) > 0, \quad \lambda_{\max}(S(p)) < 1.$$

Здесь  $\text{cond}(S(p))$  — спектральное число обусловленности матрицы  $S(p)$ ,  $\lambda_{\max}(S(p))$  — ее спектральный радиус (при условии  $\lambda_{\min}(S(p)) > 0$ ).

Целевые установки задачи (4.4) состоят в следующем:

1) за счет уменьшения числа обусловленности матрицы  $S(p)$  повысить вычислительную устойчивость решения выпуклой задачи (2.4) относительно погрешности входных данных (функция  $f_p(u)$ ) и арифметических операций;

2) неравенство  $\lambda_{\max}(S(p)) < 1$  дополнительно к положительной определенности обеспечивает свойство сходимости для матрицы  $S(p)$ :

$$S^k(p) \rightarrow O, \quad k \rightarrow \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} S^k(p) = (E - S(p))^{-1}$$

( $E$  — единичная матрица) и асимптотическую устойчивость для дискретной системы:

$$y(k+1) = S(p)y(k), \quad y(0) \neq 0 \Rightarrow y(k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Вторая задача связана с процедурой линеаризации и предполагает минимизацию оценки сверху для числа обусловленности

$$\text{cond}(S(p)) \leq \frac{\Delta_{\max}(p)}{\Delta_{\min}(p)} \rightarrow \min, \quad p > 0, \quad (4.5)$$

$$\Delta_{\min}(p) > 0, \quad \Delta_{\max}(p) < 1.$$

В связи с задачами (4.4), (4.5) полезно также рассмотреть параметрическую задачу (2.4) без ограничений на управление:

$$f_p(u) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{R}^{Nr}.$$

При условии сильной выпуклости ( $S(p) > 0$ ) задача эквивалентна линейной системе

$$S(p)u + (p_1 S_{12} + p_2 S_{21})x(0) = 0.$$

Ее приемлемое решение (в плане погрешности) во многом определяется хорошей обусловленностью матрицы  $S(p)$ , что и отражается в задачах (4.4), (4.5).

Подведем итоги:

1. Спектральные условия-неравенства на параметры (4.2), (4.3) обеспечивают функции  $f_p(u)$  ключевое свойство выпуклости либо сильной выпуклости.

2. Предлагаемые оптимизационные задачи (4.4), (4.5) на множестве параметров (4.2) или (4.3) позволяют улучшить матрицу  $S(p)$  квадратичной функции  $f_p(u)$  в плане обусловленности и сходимости. Приближенное решение этих задач можно проводить, например, в рамках дискретного перебора значений целевых функций на допустимой сетке параметров  $(p_1, p_2, p_3)$  с некоторым условием нормировки (например,  $p_3 = 1$ ).

3. В результате из  $p$ -параметрического семейства многоэкстремальных задач (2.4) выделяются задачи выпуклого программирования с квадратичной целевой функцией, в которых с помощью современных программных комплексов могут быть найдены глобальные решения. Например, в стандартном случае, когда ограничения на управление

описываются линейными неравенствами, получаем задачу квадратичного программирования, которая решается за конечное число итераций. Любое решение  $u^*(p)$  выпуклой задачи (2.4) является искомым П-оптимальным управлением в невыпуклой линейно-квадратичной задаче (2.3).

4. В рамках представленного подхода легко обрабатываются линейные ограничения на состояние через редукцию к аналогичным условиям на управление

$$H_k x(k+1) + h_k \leq 0 \Rightarrow \hat{H}_k u(k) + \hat{h}_k \leq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

с применением прямой подстановки  $x(k+1)$  по формуле (3.2). В результате параметрическая задача (2.4) дополняется линейными ограничениями на управление, что по существу не меняет ее характеристик.

5. Следует подчеркнуть, что определяющие выпуклость неравенства (4.2), (4.3) в строгом исполнении выделяют сильно выпуклые параметрические функции  $f_p(u)$ , для которых разрешающие задачи (2.4) имеют единственное решение относительно выпуклого замкнутого множества  $U$  (без условия ограниченности). При этом ряд задач из параметрического семейства (2.4) может вообще не иметь глобального решения в силу неограниченности снизу функции  $f_p(u)$  на множестве  $U$ . По части корректности условий (4.2), (4.3) на параметры отметим, что эти неравенства в области  $p > 0$  содержательны (непустые множества), если по крайней мере одна из матриц  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , положительно определена, т. е. число  $\lambda_{\min}(\cdot)$  положительно. Если же все матрицы  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , отрицательно определены, то функция  $f_p(u)$  является вогнутой и выбор параметров невозможен. В этом случае остается использовать специальные методы «вогнутой минимизации» (например, [10]).

## 5. Заключение

Предлагаемый формат постановки невыпуклой линейно-квадратичной задачи (многоцелевая оптимизация) позволяет расширить возможности преодоления «барьера невыпуклости» без использования условий глобальной оптимальности. Естественная редукция к параметрической задаче без переменных состояния и конструктивный выбор параметров обеспечивают ключевое свойство выпуклости для квадратичной функции вместе с хорошей обусловленностью соответствующей матрицы.

Это позволяет в определенной степени решить проблему отыскания П-оптимальных управлений в исходной невыпуклой задаче.

## Список источников

1. Антипин А. С., Хорошилова Е. В. Синтез регулятора для линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64, № 9. С. 1618–1634. <https://doi.org/10.31857/S0044466924090049>
2. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 5–16. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16>
3. Ащепков Л. Т. Аналитическое конструирование регулятора с амплитудным ограничением // Автоматика и телемеханика. 2022. № 7. С. 49–58. <https://doi.org/10.31857/S0005231022070030>
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. Кн. 2. М. : МЦНМО, 2011. 433 с.
5. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
6. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М. : Наука, 1982. 254 с.
7. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : Физматлит, 2000. 160 с.
8. Срочко В. А. Линейно-квадратичная задача в формате многокритериальной оптимизации // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения : материалы 7-й Междунар. конф. Иркутск, 2025. С. 93–96.
9. Срочко В. А., Аргучинцев А. В. Параметрическая регуляризация функционала в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 32–44. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32>
10. Стрекаловский А. С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск : Наука, 2003. 356 с.
11. Стрекаловский А. С., Орлов А. В. Биматричные игры и билинейное программирование. М. : Физматлит, 2007. 224 с.
12. Стрекаловский А. С., Янулевич М. В. Глобальный поиск в задаче оптимального управления с целевым терминальным функционалом, представленным разностью двух выпуклых функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 7. С. 1187–1201.

## References

1. Antpin A.S., Khoroshilova E.V. Synthesis of a regulator for a linear-quadratic optimal control problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2024, vol. 64, no. 9, pp. 1921–1938. <https://doi.org/10.1134/S0965542524700970>
2. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Solution of a linear-quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parameterization of the functional. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. S43–S53. <https://doi.org/10.1134/S0081543822060050>
3. Ashchepkov L.T. Analytical synthesis of an amplitude-constrained controller. *Autom. Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 7, pp. 1050–1058. <https://doi.org/10.1134/S0005117922070037>
4. Vasil'ev F.P. *Optimization Methods. Book 2*. Moscow, MTSNMO Publ., 2011, 433 p. (in Russian)

5. Gabasov R., Kirillova F.M., Alseovich V.V. et al. *Optimization Methods*. Minsk, Four Quarters Publ., 2011, 472 p. (in Russian)
6. Podinovski V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal Solutions of Multicriterial Problems*. Moscow, Nauka Publ., 1982, 254 p. (in Russian)
7. Srochko V.A. *Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 160 p. (in Russian)
8. Srochko V.A. A linear-quadratic problem in the format of multicriteria optimization. *Proc. of 7th International Conf. «Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications»*. Irkutsk, 2025, pp. 93–96. (in Russian)
9. Srochko V.A., Arguchintsev A.V. Parametric regularization of the functional in a linear-quadratic optimal control problem. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 32–44. (in Russian) <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32>
10. Strekalovsky A.S. *Elements of Nonconvex Optimization*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2003, 356 p. (in Russian)
11. Strekalovsky A.S., Orlov A. V. *Bimatrix Games and Bimatrix Programming*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 224 p. (in Russian)
12. Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V. Global search in the optimal control problem with a terminal objective functional represented as the difference of two convex functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1119–1132.

## Об авторах

**Срочко Владимир Андреевич**,  
д-р физ.-мат. наук, проф.,  
Иркутский государственный  
университет, Иркутск, 664003,  
Российская Федерация,  
[srochko@math.isu.ru](mailto:srochko@math.isu.ru)

**Антоник Владимир Георгиевич**,  
канд. физ.-мат. наук, доц.,  
Иркутский государственный  
университет, Иркутск, 664003,  
Российская Федерация,  
[vga@math.isu.ru](mailto:vga@math.isu.ru)

**Аргучинцев Александр  
Валерьевич**, д-р физ.-мат. наук,  
проф., Иркутский государственный  
университет, Иркутск, 664003,  
Российская Федерация,  
[arguch@math.isu.ru](mailto:arguch@math.isu.ru),  
<https://orcid.org/0000-0002-9314-485X>

## About the authors

**Vladimir A. Srochko**, Dr. Sci.  
(Phys.-Math.), Prof., Irkutsk State  
University, Irkutsk, 664003, Russian  
Federation, [srochko@math.isu.ru](mailto:srochko@math.isu.ru)

**Vladimir G. Antonik**, Cand. Sci.  
(Phys.-Math.), Assoc. Prof., Irkutsk  
State University, Irkutsk, 664003,  
Russian Federation, [vga@math.isu.ru](mailto:vga@math.isu.ru)

**Alexander V. Arguchintsev**, Dr.  
Sci. (Phys.-Math.), Prof., Irkutsk  
State University, Irkutsk, 664003,  
Russian Federation,  
[arguch@math.isu.ru](mailto:arguch@math.isu.ru),  
<https://orcid.org/0000-0002-9314-485X>

*Поступила в редакцию / Received 16.03.2026*  
*Поступила после рецензирования / Revised 21.05.2026*  
*Принята к публикации / Accepted 25.05.2026*