Серия «Математика»
2026. Т. 56. С. 160—175

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 004.827
MSC 68T27, 68T30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.160

Взаимная независимость подмоделей размытой модели

Г. Э. Яхъяева[1]✉

[1] Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация
✉ gul_nara@mail.ru

Аннотация: Исследуется область теории размытых моделей, являющаяся методологией логической формализации предметных областей при условии неточности и неполноты знаний об этих предметных областях. Вводится понятие подмодели размытой модели как расширение понятия подмодели классической модели, а также определяется взаимная (попарная) независимость подмоделей: подмодели независимы, если события, описываемые сигнатурой одной модели, являются независимыми от событий, описываемых сигнатурой другой модели. Независимость подмоделей можно интерпретировать как взаимную независимость групп объектов предметной области, т. е. их автономность, отсутствие влияния друг на друга. Доказывается теорема, формализующая критерий (т. е. необходимое и достаточное условие) взаимной независимости подмоделей. На основе свойства независимости подмоделей размытые модели делятся на сепарабельные и запутанные. Каждая сепарабельная модель раскладывается в сепарабельное объединение своих подмоделей. Таких разложений для конкретной модели может быть несколько, среди которых выбирается «минимальное» разложение, названное нормальным, доказывается теорема об единственности нормального разложения. Приводится алгоритм нахождения нормального разложения размытой модели на сепарабельное объединение подмоделей, доказывается корректность этого алгоритма.

Ключевые слова: размытая модель, взаимно независимые подмодели, сепарабельная модель, запутанная модель

Ссылка для цитирования: Яхъяева Г. Э. Взаимная независимость подмоделей размытой модели // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 160–175.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.160

Research article

Pairwise Independence of the Blurry Model Submodels

Gulnara E. Yakhyaeva[1]✉

[1] Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation
✉ gul_nara@mail.ru

Abstract: This paper is devoted to research in the theory of blurry models, which serves as a methodology for the logical formalization of subject domains under conditions of imprecision and incompleteness of knowledge about these domains.
The article introduces the concept of a submodel of a blurry model as an extension of the notion of a submodel of a classical model, and also defines pairwise independence of submodels: submodels are independent if the events described by the signature of one model are independent from the events described by the signature of another model. The independence of submodels can be interpreted as the mutual independence of groups of objects within the subject domain, i.e., their autonomy and lack of influence on each other. A theorem is proven that formalizes the criterion (i.e., necessary and sufficient condition) for pairwise independence of submodels.
Based on the property of submodel independence, blurry models are divided into separable models and entangled models. Each separable model decomposes into a separable union of its submodels. There may be several such decompositions for a given model, among which a "minimal" decomposition, called normal, is selected; a theorem on the uniqueness of the normal decomposition is proven. An algorithm for finding the normal decomposition of a blurry model into a separable union of submodels is presented, and the correctness of this algorithm is proven.

Keywords: blurry model, pairwise independent submodels, separable model, entangled model

For citation: Yakhyaeva G. E. Pairwise Independence of the Blurry Model Submodels. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 56, pp. 160–175. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.160

1. Введение

Когда решения, принимаемые искусственным интеллектом, начинают оказывать влияние на жизнь людей, становится важно разобраться в механизмах, которые лежат в основе этих решений. Объяснимый искусственный интеллект (XAI) отвечает на эту потребность, предоставляя методы, позволяющие пользователям и разработчикам глубже понять работу моделей. Объяснимость помогает выявлять уязвимости и предвзятости, что способствует повышению эффективности и надежности моделей [4].

Один из методов развития объяснимого ИИ заключается в разработке семантических моделей для различных областей знаний (см., например, [8; 10; 12]. Такие модели способствуют структурированию и упорядочиванию информации, облегчая её понимание и анализ. Это особенно важно при работе с большими объёмами данных, где сложность информации может затруднять выявление ключевых закономерностей [6; 7].

Для разработки надёжных систем ИИ зачастую применяются логико-вероятностные подходы [1; 9] и семантическое программирование [2; 5]. В условиях быстрого технологического прогресса семантическое программирование даёт разработчикам возможность гибко адаптироваться к изменяющимся требованиям и условиям, используя более абстрактные представления данных и их взаимосвязей. Моделирование причинно-следственных связей в конкретных предметных областях становится более доступным и эффективным благодаря логико-вероятностным методам. Современные методы анализа данных позволяют создавать более сложные модели и обнаруживать скрытые взаимосвязи.

Ключевым понятием, лежащим в основе многих моделей вероятностных процессов, является понятие независимости событий. Правильное понимание и проверка независимости позволяют строить корректные математические модели, значительно упрощает анализ сложных явлений и позволяет получать устойчивые закономерности и качественные оценки [11].

Поведение объектов или групп объектов в математической модели предметной области можно описывать через вероятностные характеристики событий, связанных с этими объектами. Объекты, так же как и события их описывающие, могут быть зависимыми или независимыми. Они могут быть зависимыми в общем, но становиться независимыми при выполнении некоторого дополнительного условия или события. Независимость объектов может означать их автономность, отсутствие влияния друг на друга.

Так, например, при моделировании процесса производства компьютеров изготовление мониторов, корпусов, клавиатур и материнских плат может осуществляться разными поставщиками и происходить независимо друг от друга. Таким образом, (вероятностная) оценка рисков в одном звене производства не зависит от оценки рисков в другом звене. Оценочная модель рисков данного процесса производства будет сепарабельной.

Однако при моделировании цепочки поставок, управляемой единой глобальной ИТ-системой, создаваемая модель становится более сложной и запутанной. Например, кибератака, выводящая из строя ключевую ИТ-инфраструктуру, может привести к системному коллапсу во всей цепочке. Оценочная модель рисков такой системы будет запутанной.

Настоящие исследования продолжают работы, начатые в [3]. Данная статья посвящена исследованию и формальному описанию на языке размытых (нечетких) моделей понятия независимости групп объектов предметной области. Наш подход основан на семантическом описании предметной области с помощью размытой модели. Объекты предметной области задаются в виде носителя данной модели. Выделенные подгруппы объектов задаются с помощью подмоделей данной размытой модели. Рассматриваются свойства подмоделей, которые описывают взаимную независимость групп объектов.

2. Позитивная диаграмма размытой модели

Введем основные обозначения. В данной работе мы будем рассматривать различные размытые модели фиксированной сигнатуры σ, не содержащей функциональных символов. Через $S(\sigma)$ обозначим множество предложений этой сигнатуры.

Далее нам понадобится рассматривать различные подмножества множества предложений $S(\sigma)$. Введем обозначения для этих подмножеств:

$S_a(\sigma)$ — множество всех атомарных предложений сигнатуры σ;

$S_p(\sigma)$ — множество всех позитивных конъюнктов сигнатуры σ, т. е.

$$S_p(\sigma) = \big\{\psi \in S(\sigma) \mid \exists n \in N, \exists \varphi_1, ..., \varphi_n \in S_a(\sigma_A) : \psi = \varphi_1 \& ... \& \varphi_n, \big\};$$

$S_{qf}(\sigma)$ — множество всех бескванторных предложений сигнатуры σ.

Мы будем говорить об истинности формул на размытой модели $\mathfrak{A}$. Для удобства, для того чтобы говорить не об истинности произвольных формул на $\mathfrak{A}$, а только об истинности предложений, мы обогащаем сигнатуру σ новыми константами. Мы будем использовать сигнатуру $\sigma_A \rightleftharpoons \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\}$, где $\{c_a \mid a \in A\} \cap \sigma = \emptyset$. При этом на $\mathfrak{A}$ выполнено $c_a^{\mathfrak{A}} = a$.

На множестве предложений $S(\sigma)$ введем стандартным образом отношение семантической эквивалентности $\sim$. Через $\mathbb{S}(\sigma)$ обозначим алгебру Линденбаума – Тарского $\langle S(\sigma)/_{\sim}; \vee, \&; , \neg, \top, \bot\rangle$.

Определение 1. *[3] Тройка $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$ будет называться* ***размытой моделью****, если означивание $\mu : S(\sigma_A) \to [0, 1]$ является вероятностной мерой, определенной на алгебре Линденбаума – Тарского $\mathbb{S}(\sigma_A)$.*

Заметим, что если мера μ, описывающая размытую модель $\mathfrak{A}_\mu$, тривиальна (т. е. является отображением в множество из двух элементов $\{0, 1\}$), то модель $\mathfrak{A}_\mu$ является (классической) моделью логики предикатов. Такие модели далее в этой статье будут называться **точными** моделями сигнатуры σ.

Предложение 1. *[13] Пусть $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$ — размытая модель. Тогда для любых продолжений $\varphi, \psi \in S(\sigma_A)$ имеем*

1) $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$;

2) $\mu(\varphi \& \psi) \in \Big[\max\big\{0; \mu(\varphi) + \mu(\psi) - 1\big\}; \min\big\{\mu(\varphi); \mu(\psi)\big\}\Big]$;

3) $\mu(\varphi \vee \psi) \in \Big[\max\big\{\mu(\varphi); \mu(\psi)\big\}; \min\big\{1; \mu(\varphi) + \mu(\psi)\big\}\Big]$.

Таким образом, в отличие от классического случая, множество всех атомарных предложений (атомарная диаграмма модели) не задает однозначно размытую модель. Для этого нам понадобится понятие позитивной диаграммы модели.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$ — размытая модель. Тогда множество упорядоченных пар $PD(\mathfrak{A}_\mu) = \big\{(\varphi, \mu(\varphi)) \mid \varphi \in S_p(\sigma_A)\big\}$ будем называть* ***позитивной диаграммой*** *модели $\mathfrak{A}_\mu$.*

Теорема 1. *Если размытая модель $\mathfrak{A}_\mu = \langle A, \sigma, \mu\rangle$ не более чем счетна, то она однозначно задается своей позитивной диаграммой.*

3. Подмодели размытых моделей

При определении понятия подмодели размытой модели нам необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: для любого бескванторного предложения расширенной сигнатуры подмодели его значение истинности на подмодели совпадает со значением истинности на самой модели. Согласно Теореме 1 для этого нам достаточно потребовать, чтобы это свойство выполнялось для всех позитивных конъюнктов.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \langle A, \sigma, \mu_A\rangle$ и $\mathfrak{B}_{\mu_B} = \langle B, \sigma, \mu_B\rangle$ — размытые модели одной сигнатуры σ. Будем говорить, что размытая модель $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ является* ***подмоделью*** *размытой модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ (обозначение $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$), если:*

1) $B \subseteq A$;

2) для любой константы $c \in \sigma$ имеем $c^{\mathfrak{B}_{\mu_B}} = c^{\mathfrak{A}_{\mu_A}}$;

3) для любого позитивного конъюнкта $\varphi \in S_p(\sigma_B)$ имеем $\mu_B(\varphi) = \mu_A(\varphi)$.

Нетрудно понять, что (так же как и в классическом случае) пересечение двух подмоделей модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ является подмоделью модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$. Более того, если сигнатура σ содержит хотя бы один символ констант, то существует наименьшая подмодель модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$. Носителем наименьшей подмодели будет являться множество

$$A_{const} = \{a \in A \mid \exists c \in \sigma : c^{\mathfrak{A}_{\mu_A}} = a\}.$$

Заметим, что если сигнатура σ является чисто предикатной, то модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ не обладает наименьшей подмоделью и для любого подмножества $B \subseteq A$ $(B \neq \emptyset)$ возможно построить подмодель $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$.

Определение 4. *Подмодель $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ будем называть **ядерной**, если она является максимальной точной подмоделью модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, т. е. выполняются условия:*

1) модель $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ является точной;

2) любая модель $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ такая, что $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{C}_{\mu_C} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ не является точной.

Заметим, что у размытой модели может быть более одной ядерной модели. Объединение носителей всех ядерных подмоделей размытой $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ модели будем называть **ядром** модели и обозначать через $Ker(\mathfrak{A}_{\mu_A})$. Очевидно, что если $Ker(\mathfrak{A}_{\mu_A}) \neq \emptyset$, то $A_{const} \subseteq Ker(\mathfrak{A}_{\mu_A})$.

Нетрудно также понять, что если модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ является точной, то $A = Ker(\mathfrak{A}_{\mu_A})$. Однако обратное утверждение в общем случае неверно.

Если размытая модель не имеет ядерных подмоделей, т. е.

$$Ker(\mathfrak{A}_{\mu_A}) = \varnothing,$$

то будем ее называть **безъядерной** (или **с пустым ядром**).

Определение 5. *Рассмотрим размытые модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}, \mathfrak{B}_{\mu_B}, \mathfrak{C}_{\mu_C}$ такие, что $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$. Модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ будем называть **взаимно независимыми** подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, если для любых положительных конъюнктов $\varphi \in S_p(\sigma_B)$ и $\psi \in S_p(\sigma_C)$ выполняется условие*

$$\mu_A(\varphi \& \psi) = \mu_B(\varphi)\mu_C(\psi). \tag{3.1}$$

Предложение 2. *Если модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ являются взаимно независимыми подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, то условие (3.1) выполняется для любых конъюнктов сигнатур σ_B и σ_C.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi = \varphi_1 \& ... \& \varphi_l \& \neg\varphi_{l+1} \& ... \& \neg\varphi_{l+n} \quad \text{и} \quad \psi = \psi_1 \& ... \& \psi_k \& \neg\psi_{k+1} \& ... \& \neg\psi_{k+m},$$

где $\varphi_i \in S_a(\sigma_B)$ и $\psi_i \in S_A(\sigma_C)$. Покажем, что $\mu_A(\varphi \& \psi) = \mu_B(\varphi)\mu_C(\psi)$. Доказывать будем индукцией по количеству знаков отрицания. Рассмотрим случай, когда $n = 0$ и $m = 1$. Тогда имеем

$$\varphi = \varphi_1 \& ... \& \varphi_l \quad \text{и} \quad \psi = \psi_1 \& ... \& \psi_k \& \neg\psi_{k+1}.$$

По Определению 1 означивание μ_A является вероятностной мерой, а следовательно, обладает свойством аддитивности. Таким образом, мы получим

$$\mu_A(\varphi_1 \& ... \& \varphi_l \& \psi_1 \& ... \& \psi_k) =$$

$$\mu_A(\varphi_1\&...\&\varphi_l\&\psi_1\&...\&\psi_k\&\psi_{k+1}) + \mu_A(\varphi_1\&...\&\varphi_l\&\psi_1\&...\&\psi_k\&\neg\psi_{k+1}).$$

Следовательно, $\mu_A(\varphi\&\psi) =$

$$= \mu_A(\varphi_1\&...\&\varphi_l\&\psi_1\&...\&\psi_k) - \mu_A(\varphi_1\&...\&\varphi_l\&\psi_1\&...\&\psi_k\&\psi_{k+1}) =$$

$$= \mu_B(\varphi_1\&...\&\varphi_l)\mu_C(\psi_1\&...\&\psi_k) - \mu_B(\varphi_1\&...\&\varphi_l)\mu_C(\psi_1\&...\&\psi_k\&\psi_{k+1}) =$$
$$= \mu_B(\varphi_1\&...\&\varphi_l)\big(\mu_C(\psi_1\&...\&\psi_k) - \mu_C(\psi_1\&...\&\psi_k\&\psi_{k+1})\big) =$$
$$= \mu_B(\varphi_1\&...\&\varphi_l)\mu_C(\psi_1\&...\&\psi_k\&\neg\psi_{k+1}) = \mu_B(\varphi)\mu_C(\psi).$$

Далее, используя индукционные предположения, аналогичным образом можно доказать утверждение Предложения для любого количества знаков отрицания. □

Предложение 3. *Если модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ являются взаимно независимыми подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, то пересечение моделей $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ либо пусто, либо является точной моделью.*

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{B}_{\mu_B} \cap \mathfrak{C}_{\mu_C} \neq \emptyset$. Тогда для любого атомарного предложения $\varphi \in S_a(\sigma_{B\cap C})$ имеем

$$\mu_A(\varphi) = \mu_A(\varphi \ \& \ \varphi) = \mu_B(\varphi)\mu_C(\varphi) = \big(\mu_A(\varphi)\big)^2.$$

А это равенство выполняется только если $\mu_A(\varphi) = 0$ или $\mu_A(\varphi) = 1$. А значит, подмодель, определенная на множестве $B \cap C$ является точной. □

Следствие 1. *Любые точные подмодели модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ являются взаимно независимыми в модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.*

Следствие 2. *Любая точная подмодель модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ является взаимно независимой с любой подмоделью модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.*

4. Критерий взаимной независимости размытых подмоделей

Введем обозначение $K(A,\sigma)$ для класса всех размытых моделей сигнатуры σ с фиксированным основным множеством A. Через $K_{cr}(A,\sigma)$ будем обозначать подкласс всех точных моделей класса $K(A,\sigma)$.

Определение 6. *Рассмотрим класс размытых моделей $K \subseteq K(A,\sigma)$. Будем говорить, что размытая модель $\mathfrak{A}_\mu \in K(A,\sigma)$ раскладывается во* ***взвешенную сумму*** *размытых моделей из класса $K = \{\mathfrak{A}_{\mu_i}\}_{i\in I}$, если найдется такая последовательность чисел $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, что*

1) $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$;

2) для любого предложения $\varphi \in S(\sigma_A)$ выполняется

$$\mu(\varphi) = \sum_{i\in I}\alpha_i\mu_i(\varphi).$$

Теорема 2. *(о разложении) Любая не более чем счетная размытая модель единственным образом раскладывается во взвешенную сумму точных моделей.*

Пусть $\mathfrak{A}_\mu \in K(A,\sigma)$ и $K_{cr}(A,\sigma) = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in I}$. Тогда разложение модели $\mathfrak{A}_\mu$ во взвешенную сумму точных моделей будем записывать следующим образом:

$$\mathfrak{A}_\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathfrak{A}_i.$$

Пусть задано $\{K_i\}_{i\in T}$ — разбиение класса точных моделей $K_{cr}(A,\sigma)$ на непересекающиеся подклассы. Будем полагать, что

$$\sum_{\mathfrak{A}\in K_i} \alpha\mathfrak{A} = \beta_i K_i, \text{ где } \beta_i = \sum_{\mathfrak{A}\in K_i} \alpha.$$

Тогда разложение модели $\mathfrak{A}_\mu$ можно записать следующим образом:

$$\mathfrak{A}_\mu = \sum_{i\in T} \beta_i K_i.$$

Такое разложение будем называть **фактор-разложением**, заданным разбиением $\{K_i\}_{i\in T}$. Очевидно, что последовательность коэффициентов $\{\beta_i\}_{i\in T}$ отвечает условию нормировки, т. е. $\sum_{i\in T}\beta_i = 1$.

Рассмотрим размытые модели $\mathfrak{A}_{\mu_A} \in K(A,\sigma)$ и $\mathfrak{B}_{\mu_B} \in K(B,\sigma)$ такие, что $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$. Для каждой точной модели $\mathfrak{B}_i \in K_{cr}(B,\sigma)$ определим класс моделей

$$[\mathfrak{B}_i] = \{\mathfrak{A} \in K_{cr}(A,\sigma) \mid \mathfrak{B}_i \subseteq \mathfrak{A}\}.$$

Очевидно, что $\{[\mathfrak{B}_i]\}_{\mathfrak{B}_i\in K_{cr}(B,\sigma)}$ является разбиением класса точных моделей $K_{cr}(A,\sigma)$ на непересекающиеся подклассы, а следовательно, задает фактор-разложение модели $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \sum_{i\in I}\beta_i[\mathfrak{B}_i]$. Нетрудно проверить, что коэффициенты β_i в этом фактор-разложении совпадают с коэффициентами в разложении подмодели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$, т. е. $\mathfrak{B}_{\mu_B} = \sum_{i\in I}\beta_i\mathfrak{B}_i$.

Пусть даны размытые модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}, \mathfrak{B}_{\mu_B}, \mathfrak{C}_{\mu_C}$ такие, что $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$, $\mathfrak{C}_{\mu_C} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ и $\mathfrak{B}_{\mu_B} \neq \mathfrak{C}_{\mu_C}$. Рассмотрим разбиения $\{[\mathfrak{B}_i]\}_{i\in I_B}$ и $\{[\mathfrak{C}_j]\}_{j\in I_C}$, где I_B и I_C — индексации классов $K_{cr}(B,\sigma)$ и $K_{cr}(C,\sigma)$ соответственно.

Пересечение этих разбиений задает новое разбиение класса $K_{cr}(A,\sigma)$:

$$\{[\mathfrak{B}_i] \cap [\mathfrak{B}_j]\}_{(i,j)\in I_B\times I_C}.$$

Теорема 3. *(критерий взаимной независимости) Пусть $\mathfrak{B}_{\mu_B} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu_A}$ и заданы фактор-разложения модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$:*

$$\mathfrak{A}_{\mu_A} = \sum_{i\in I_B}\beta_i[\mathfrak{B}_i],\ \ \mathfrak{A}_{\mu_A} = \sum_{j\in I_C}\gamma_j[\mathfrak{C}_j],\ \ \mathfrak{A}_{\mu_A} = \sum_{(i,j)\in I_B\times I_C}\alpha_{ij}\Big([\mathfrak{B}_i]\cap[\mathfrak{C}_j]\Big).$$

Модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ являлись взаимно независимыми подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ тогда и только тогда, когда для любых $i \in I_B, j \in I_C$ выполняется условие $\beta_i\gamma_j = \alpha_{ij}$.

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ являлись взаимно независимыми подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$. Тогда для любых положительных конъюнктов $\varphi \in S_p(\sigma_B)$ и $\psi \in S_p(\sigma_C)$ выполняется условие (3.1).

Так как в начале статьи мы договаривались рассматривать не более чем счетные модели, то множества атомарных предложений $S_a(\sigma_B)$ и $S_a(\sigma_C)$ также не более чем счетны. Пусть $S_a(\sigma_B) = \{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ и $S_a(\sigma_C) = \{\psi_1, \psi_2, ...\}$.

Для каждой модели $\mathfrak{B} \in K_{cr}(B, \sigma)$ введем обозначения

$$\varphi_i^{\mathfrak{B}} = \begin{cases} \varphi_i & \mathfrak{A} \models \varphi_i; \\ \neg\varphi_i & \mathfrak{A} \not\models \varphi_i. \end{cases}$$

Так как последовательность предложений $\varphi_1^{\mathfrak{B}}, \varphi_2^{\mathfrak{B}}, ...$ является атомарной диаграммой модели $\mathfrak{B}$, то по Определению 6 мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_A(\varphi_1^{\mathfrak{B}} \& ... \& \varphi_n^{\mathfrak{B}}) = \beta,$$

где β — коэффициент при модели $\mathfrak{B}$ в разложении модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$.

Аналогично получим, что каждой модели $\mathfrak{C} \in K_{cr}(C, \sigma)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mu_A(\psi_1^{\mathfrak{C}} \& ... \& \psi_n^{\mathfrak{C}}) = \gamma,$$

где γ — коэффициент при модели $\mathfrak{C}$ в разложении размытой модели $\mathfrak{C}_{\mu_C}$.

Далее, используя Предложение 2, получим

$$\beta \cdot \gamma = \lim_{n\to\infty} \mu_A(\varphi_1^{\mathfrak{B}} \& ... \& \varphi_n^{\mathfrak{B}}) \cdot \lim_{n\to\infty} \mu_A(\psi_1^{\mathfrak{C}} \& ... \& \psi_n^{\mathfrak{C}}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\mu_A(\varphi_1^{\mathfrak{B}} \& ... \& \varphi_n^{\mathfrak{B}}) \cdot \mu_A(\psi_1^{\mathfrak{C}} \& ... \& \psi_n^{\mathfrak{C}}) \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(\mu_A(\varphi_1^{\mathfrak{B}} \& ... \& \varphi_n^{\mathfrak{B}} \& \psi_1^{\mathfrak{C}} \& ... \& \psi_n^{\mathfrak{C}}) \Big) = \alpha,$$

где α — коэффициент при классе $[\mathfrak{B}] \cap [\mathfrak{C}]$ в фактор-разложении размытой модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.

$\Leftarrow$) Пусть теперь для любых $i \in I_B, j \in I_C$ выполняется $\beta_i \gamma_j = \alpha_{ij}$.

Рассмотрим положительные конъюнкты $\varphi \in S_p(\sigma_B)$ и $\psi \in S_p(\sigma_C)$. Тогда, с одной стороны, по Определению 3 имеем: $\mu_A(\varphi) = \mu_B(\varphi)$ и $\mu_A(\psi) = \mu_C(\psi)$. А по Определению 6 получим

$$\mu_A(\varphi) = \sum_{\mathfrak{B}_i \models \varphi} \beta_i \ \text{и} \ \mu_A(\psi) = \sum_{\mathfrak{C}_j \models \varphi} \gamma_j.$$

А с другой стороны, получим

$$\mu_A(\varphi \& \psi) = \sum_{\mathfrak{B}_i \models \varphi, \mathfrak{C}_j \models \psi,} \alpha_{ij}.$$

Следовательно,

$$\mu_A(\varphi)\mu_A(\psi) = \sum_{\mathfrak{B}_i \models \varphi} \beta_i \cdot \sum_{\mathfrak{C}_j \models \varphi} \gamma_j = \sum_{\mathfrak{B}_i \models \varphi} \sum_{\mathfrak{C}_j \models \psi,} \beta_i \gamma_j =$$

$$= \sum_{\mathfrak{B}_i \models \varphi, \mathfrak{C}_j \models \psi,} \alpha_{ij} = \mu_A(\varphi \& \psi).$$

□

Следствие 3. *Если модели $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ и $\mathfrak{C}_{\mu_C}$ являются взаимно независимыми подмоделями модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, то условие (3.1) выполнялось для любых бескванторных предложений $\varphi \in S_{qf}(\sigma_B)$ и $\psi \in S_{qf}(\sigma_C)$.*

5. Сепарабельные модели

В этом параграфе мы введем новые характеристики размытой модели: сепарабельность и запутанность.

Определение 7. *Будем говорить, что модель $\mathfrak{A}_{\mu_A}$ **раскладывается в сепарабельное объединение** класса подмоделей $\{\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}\}_{i \in I}$ (и записывать $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$), если*

1) $A = \bigcup_{i \in I} B_i$;

2)для любых $i, j \in I (i \neq j)$ имеем $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \nsubseteq \mathfrak{B}_{\mu_{B_j}}$;

3)для любых $i, j \in I (i \neq j)$ модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ и $\mathfrak{B}_{\mu_{B_j}}$ взаимно-независимы в модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$.

Модель $\mathfrak{A}_\mu$ назовем **сепарабельной**, если существует хотя бы одно разложение этой модели в сепарабельное произведение своих подмоделей. В противном случае модель $\mathfrak{A}_\mu$ будем называть **запутанной**.

Предложение 4. *Если наименьшая подмодель модели $\mathfrak{A}_\mu$ является размытой (т. е. не является точной), то модель $\mathfrak{A}_\mu$ является запутанной.*

Доказательство следует непосредственно из Предложения 3.

Предложение 5. *Точная подмодель $\mathfrak{B}_{\mu_B}$ модели $\mathfrak{A}_\mu$ является сепарабельной, если $\|B\| \geq \|A_{const}\| + 2$.*

Доказательство. Так как подмодель с носителем A_{const} является наименьшей подмоделью модели $\mathfrak{A}_{\mu_A}$, то для того чтобы мы могли построить две подмодели, не являющимися подмоделями друг друга, нам необходимо иметь по крайней мере еще два элемента. □

Определение 8. *Разложение* $\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ *размытой модели* $\mathfrak{A}_\mu$ *в сепарабельное объединение подмоделей назовем* ***нормальным****, если каждая модель* $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} (i \in I)$ *является запутанной.*

Далее будем полагать, что если размытая модель запутанна, то ее нормальное разложение в сепарабельное объединение подмоделей совпадает с самой моделью.

Теорема 4. *(об единственности нормального разложения) Для любой размытой модели* $\mathfrak{A}_\mu$ *существует единственное нормальное разложение в сепарабельное объединение подмоделей.*

Доказательство. Допустим, что существует два нормальных разложения модели $\mathfrak{A}_\mu$ в сепарабельное объединение подмоделей:

$$\mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{i \in I_B} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \ \ \textit{и} \ \ \mathfrak{A}_{\mu_A} = \bigsqcup_{j \in I_C} \mathfrak{C}_{\mu_{C_j}}.$$

Так как для любых $i, j \in I_B$ модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ и $\mathfrak{B}_{\mu_{B_j}}$ взаимно независимы, то и модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \cap \mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ и $\mathfrak{B}_{\mu_{B_j}} \cap \mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ (для любого $k \in I_C$) должны быть взаимно независимы. Следовательно, получим

$$\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}} = \bigsqcup_{i \in I_B} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \cap \mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}.$$

Но это невозможно, так как модель $\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ запутанна.

Следовательно, найдется такой коэффициент $s \in I_B$, что

$$\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}} = \mathfrak{C}_{\mu_{C_k}} \cap \mathfrak{B}_{\mu_{B_s}} = \mathfrak{B}_{\mu_{B_s}}.$$

А остальные модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_i}} \cap \mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ либо вырожденные, либо являются подмоделями модели $\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$.

Таким образом, каждой модели $\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ $(k \in I_C)$ мы поставили в соответствие единственную модель $\mathfrak{B}_{\mu_{B_s}}$ $(s \in I_B)$. Симметричными рассуждениями можно показать, что каждой модели $\mathfrak{B}_{\mu_{B_s}}$ $(s \in I_B)$ ставится в соответствие единственная модель $\mathfrak{C}_{\mu_{C_k}}$ $(k \in I_C)$. А значит, данные нормальные разложения совпадают с точностью до нумерации моделей. □

Следствие 4. *Пусть* $\bigsqcup_{i \in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ *— нормальное разложение модели* $\mathfrak{A}_\mu$ *в сепарабельное объединение своих подмоделей. Тогда* $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{B}_{\mu_{B_i}}$ *являеся наименьшей подмоделью модели* $\mathfrak{A}_\mu$ *в случае, если сигнатура* σ *содержит символы констант, и является вырожденной моделью, в случае чисто предикатной сигнатуры.*

В завершение статьи приведем алгоритм нормального разложения размытой модели $\mathfrak{A}_\mu$ в сепарабельное объединение своих подмоделей.

Данный алгоритм описывается для случая, когда сигнатура σ содержит символы констант. В случае чисто предикатной сигнатуры алгоритм будет начинать свою работу с шага 1.

Алгоритм НРвСО:

Шаг 0. Проверяем условие, что для любого атомарного предложения $\varphi \in S_a(\sigma)$ выполняется $\mu(\varphi) \in \{0,1\}$. Если это условие не выполняется, то (согласно Предложению 4) модель $\mathfrak{A}_\mu$ является запутанной и алгоритм завершает работу.

Шаг 1. Рассмотрим множество $A' = A/Ker(\mathfrak{A}_\mu)$. Если $A' = \emptyset$, то переходим на шаг 4. Если же $A' \neq \emptyset$, то на множестве A' зададим отношение тождества R_0, т. е. будем полагать, что $aR_0b \Leftrightarrow a = b$.

Шаг 2. Отношение R_0 является отношением эквивалентности. Через $[a]$ будем обозначать класс эквивалентности, порожденный элементом $a \in A'$. На множестве A' зададим отношение R_1 следующим образом:

$$aR_1b \;\Leftrightarrow\; \exists\varphi \in S_p(\sigma_{[a]})\exists\psi \in S_p(\sigma_{[b]}) : \mu(\varphi\&\psi) \neq \mu(\varphi)\mu(\psi).$$

Очевидно, что отношение R_1 рефлексивно и симметрично. Однако свойством транзитивности в общем случае оно не обладает. Построим транзитивное замыкание R_1^T.

Шаг 3. Очевидно, что отношение R_1^T так же, как и отношение R_0, является отношением эквивалентности. Более того, каждый класс эквивалентности отношения R_1^T является либо классом эквивалентности отношения R_0, либо объединением (склейкой) некоторого числа классов эквивалентности отношения R_0.

Если $R_1^T = R_0$, т. е. при переходе от отношения R_0 к отношению R_1^T не произошло ни одной склейки классов, то полагаем, что $R = R_1^T$ и переходим на шаг 4.

В противном случае определяем $R_0 = R_1^T$ и переходим на шаг 2 алгоритма.

Шаг 4. Построенное бинарное отношение $R \subseteq (A')^2$ является отношением эквивалентности.

Рассмотрим множество $A'' = Ker(\mathfrak{A}_\mu)/A_{const}$. Доопределим отношение R на множестве A'' как отношение тождества, т. е для любых $a, b \in A''$ будем полагать $aRb \Leftrightarrow a = b$. Очевидно, что расширенное бинарное отношение $R \subseteq (A' \cup A'')^2$ также является отношением эквивалентности, а значит, разбивает множество $A' \cup A''$ на классы эквивалентности. Обозначим это разбиение $\{A_i\}_{i\in I}$.

Шаг 5. Мы получим разбиение множества A объектов модели $\mathfrak{A}_\mu$:

$$A = A_{const} \cup \bigcup_{i\in I} A_i. \tag{5.1}$$

Для каждого $i \in I$ построим подмодель $\mathfrak{A}_\mu^i = \langle A_{const} \cup A_i, \sigma, \mu\rangle$. Тем самым мы получим искомое нормальное разложение модели $\mathfrak{A}_\mu$

в сепарабельное объединение подмоделей:

$$\mathfrak{A}_\mu = \bigsqcup_{i\in I} \mathfrak{A}_\mu^i. \tag{5.2}$$

Теорема 5. *(о корректности алгоритма НРвСО) Разложение (5.2) действительно является нормальным разложением модели $\mathfrak{A}_\mu$ в сепарабельное объединение своих подмоделей.*

Доказательство. Сперва покажем выполнение свойств (1)–(3) из Определения 7.

Так как основным множество каждой модели $\mathfrak{A}_\mu^i$ является множество $A_{const} \cup A_i$, то свойство (1) следует непосредственно из (5.2).

Так как для любых $i, j \in I$ имеем $A_i \cap A_j = \emptyset$, то $\mathfrak{A}_\mu^i \nsubseteq \mathfrak{A}_\mu^j$. Следовательно, выполняется свойство (2).

По построению бинарного отношения $R \subseteq (A' \cup A'')^2$ имеем, что для любых $a, b \in A' \cup A''$ выполняется

$$\neg(aRb) \ \Leftrightarrow\ \forall\varphi \in [a]_R, \forall\psi \in [b]_R : \mu(\varphi \ \&\ \psi) = \mu(\varphi)\mu(\psi).$$

А значит модели $\mathfrak{A}_\mu^i = \langle A_{const} \cup [a]_R, \sigma, \mu\rangle$ и $\mathfrak{A}_\mu^j = \langle A_{const} \cup [b]_R, \sigma, \mu\rangle$ являются взаимно независимыми, т. е. выполняется свойство (3) из Определения 7.

Покажем теперь, что данное разложение является нормальным. Допустим, что это разложение не нормальное. Следовательно, найдется такое $i \in I$, что модель $\mathfrak{A}_\mu^i$ — не запутанна, т. е. раскладывается в сепарабельное объединение своих подмоделей.

Допустим, что $\mathfrak{A}_\mu^i = \mathfrak{A}_\mu^* \sqcup \mathfrak{A}_\mu^{**}$. Пусть A^* и A^{**} — носители моделей $\mathfrak{A}_\mu^*$ и $\mathfrak{A}_\mu^{**}$. Тогда, с одной стороны, для любых $a \in A^*$ и $b \in A^{**}$ по построению имеем $\neg(aRb)$. А с другой стороны, так как $A_i = A^* \cup A^{**}$, то aRb.

Таким образом, мы пришли к противоречию. Следовательно, модель $\mathfrak{A}_\mu^i$ является запутанной, а разложение (5.2) нормальным. □

6. Заключение

Данная работа посвящена исследованиям в области теории размытых моделей, являющейся методологией логической формализации предметных областей при условии неточности и неполноты знаний об этих предметных областях.

В работе описывается понятие подмодели размытой модели, которое является расширением понятия подмодели в классической теории моделей. Вводится понятие взаимно (попарно) независимых подмоделей размытой модели. Заметим, что введенное в статье понятие сепарабельности размытой модели носит локальный характер, т. е. рассматривается только попарная независимость объектов предметной области. В глобальном же смысле эти группы объектов могут быть зависимы. Дальнейшие наши исследования мы видим в изучении свойства глобальной сепарабельности размытой модели.

Список источников

1. Гаврилина Д. Э., Гаврилин Д. Н. Об интеграции объектных онтологий и логико-вероятностного вывода // Синтаксис и семантика логических систем : материалы 8-й Всерос. конф., посвящ. памяти И. К. Шаранхаева. Иркутск, 2024. С. 28–29.
2. Малых А. А., Манцивода А. В. Онтологии, метаданные и семантическое программирование // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, № 2. С. 29–51.
3. Яхъяева Г. Э. Классы нечетких моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 151–166. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.151
4. Boya Marqas R., Almufti S. M., Azad Yusif R. Unveiling explainability in artificial intelligence: a step to-wards transparent AI // International Journal of Scientific World. 2025. Vol. 11, N 1. P. 13–20. https://doi.org/10.14419/f2agrs86
5. The expressiveness of looping terms in the semantic programming / S. S. Goncharov, S. Ospichev, D. K. Ponomaryov, D. I. Sviridenko // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2020. Vol. 17. P. 380–394. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.024
6. Palchunov D. E. Methodological Aspects of the Application of Model Theory in Knowledge Engineering and Artificial Intelligence // Proceedings of the 2022 Ural-Siberian Conference on Computational Technologies in Cognitive Science, Genomics and Biomedicine (CSGB). Novosibirsk, 2022. P. 210–215. https://doi.org/10.1109/CSGB56354.2022.9865602
7. Palchunov D. E. Model Theory of Subject Domains. II // Algebra and Logic. 2022. Vol. 61, N 4, P. 341–347. https://doi.org/10.1007/s10469-023-09702-5
8. Pesquita C. Towards Semantic Integration for Explainable Artificial Intelligence in the Biomedical Domain // Proceedings of the 14th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies (BIOSTEC 2021). 2021. Vol 5. P. 747–753. https://doi.org/10.5220/0010389707470753
9. Vityaev E. E. Consciousness as a logically consistent and prognostic model of reality // Cognitive Systems Research. 2020. Vol. 59. P. 231–246. https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2019.09.021
10. The Role and Applications of Semantic Interoperability Tools and eXplainable AI in the Development of Smart Food Systems: Findings from a Systematic Literature Review / D. Xhani, G. Sedrakyan, A. Gavai, R. Guizzardi, J. Hillegersberg // Intelligent Systems with Applications. 2025. Vol. 27. https://doi.org/10.1016/j.iswa.2025.200547.
11. Xi Chen, Weidong Liu. Testing independence with high-dimensional correlated samples // Ann. Statist. Vol. 46, N 2. P. 866–894. https://doi.org/10.1214/17-AOS1571

12. Yakhyaeva G., Karmanova A., Ershov A. Application of the Fuzzy Model Theory for Modeling QA-Systems // Computing and Informatics. 2021. Vol. 40, N 6. P. 1197–1216. https://doi.org/10.31577/cai_2021_6_1197
13. Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge // Pattern Recognition and Image Analysis. 2023. Vol. 33, N 3. P. 529–535. https://doi.org/10.1134/S105466182303046X

References

1. Gavrilina D.E., Gavrilin D.N. On the integration of object ontologies and logical-probabilistic inference. *Syntax and semantics of logical systems. Proceedings of the 8th All-Russian conference dedicated to the memory of I.K. Sharankhaev*, Irkutsk, 2024, pp. 28–29.
2. Malykh A.A., Mantsivoda A.V. Ontologies, metadata and semantic programming. *Bulletin of NSU. Series Mathematics, mechanics, informatics*, 2007, vol. 7, no. 2, pp. 29–51.
3. Yakhyaeva G.E. Classes of fuzzy models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 151–166. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.151
4. Boya Marqas R., Almufti S.M., Azad Yusif R. Unveiling explainability in artificial intelligence: a step to-wards transparent AI. *International Journal of Scientific World*, 2025, vol. 11, no. 1, pp. 13–20. https://doi.org/10.14419/f2agrs86
5. Goncharov S.S., Ospichev S., Ponomaryov D.K., Sviridenko D.I. The expressiveness of looping terms in the semantic programming. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2020, vol. 17, pp. 380–394. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.024
6. Palchunov D.E. Methodological Aspects of the Application of Model Theory in Knowledge Engineering and Artificial Intelligence. *Proceedings of the 2022 Ural-Siberian Conference on Computational Technologies in Cognitive Science, Genomics and Biomedicine (CSGB)*, Novosibirsk, 2022, pp. 210–215. https://doi.org/10.1109/CSGB56354.2022.9865602
7. Palchunov D.E. Model Theory of Subject Domains II. *Algebra and Logic*, 2022, vol. 61, no. 4, pp. 341–347. https://doi.org/10.1007/s10469-023-09702-5
8. Pesquita C. Towards Semantic Integration for Explainable Artificial Intelligence in the Biomedical Domain. *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies (BIOSTEC 2021)*, 2021, vol. 5, pp. 747–753. https://doi.org/10.5220/0010389707470753
9. Vityaev E.E. Consciousness as a logically consistent and prognostic model of reality. *Cognitive Systems Research*, 2020, vol. 59, pp. 231–246. https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2019.09.021
10. Xhani D., Sedrakyan G., Gavai A., Guizzardi R., Hillegersberg J. The Role and Applications of Semantic Interoperability Tools and eXplainable AI in the Development of Smart Food Systems: Findings from a Systematic Literature Revie. *Intelligent Systems with Applications*, 2025, vol. 27. https://doi.org/10.1016/j.iswa.2025.200547.
11. Xi Chen, Weidong Liu. Testing independence with high-dimensional correlated samples. *Ann. Statist*, vol. 46, no. 2, pp. 866–894. https://doi.org/10.1214/17-AOS1571
12. Yakhyaeva G., Karmanova A., Ershov A. Application of the Fuzzy Model Theory for Modeling QA-Systems. *Computing and Informatics*, 2021, vol. 40, no 6, pp. 1197–1216. https://doi.org/10.31577/cai_2021_6_1197

13. Yakhyaeva G.E., Palchunova O.D. Fuzzy Models as a Formalization of Expert's Evaluative Knowledge. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2023, vol. 33, no. 3, pp. 529–535. https://doi.org/10.1134/S105466182303046X

Об авторах

Яхъяева Гульнара Эркиновна, канд. физ.-мат. наук, доц., Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, 630073, Российская Федерация, gul_nara@mail.ru

About the authors

Gulnara E. Yakhyaeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, gul_nara@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 25.08.2025
Поступила после рецензирования / Revised 12.10.2025
Принята к публикации / Accepted 31.10.2025