



Серия «Математика»
2026. Т. 56. С. 64–80

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.55

MSC 32A05, 32A15, 32A27

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.64>

О числе вещественных корней системы трансцендентных уравнений в заданной области

А. М. Кытманов¹✉, О. В. Ходос¹

¹ Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ akytmanov@sfu-kras.ru

Аннотация: Исследуется число вещественных корней общих систем трансцендентных уравнений с вещественными коэффициентами Тейлора в некоторой области D многомерного вещественного пространства. Для заданной целой функции φ вводится понятие результата R_φ , построенного по степенным суммам корней системы в отрицательной степени и коэффициентам Тейлора функции φ . Для таких степенных сумм получены формулы их вычисления с помощью вычетных интегралов. Показано, что если результат R_φ имеет простые корни, то число вещественных корней системы в D совпадает с числом вещественных корней результата R_φ в некотором интервале.

Ключевые слова: системы трансцендентных уравнений, результат, простые корни, вычетные интегралы

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00023.

Ссылка для цитирования: Кытманов А. М., Ходос О. В. О числе вещественных корней системы трансцендентных уравнений в заданной области // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 64–80. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.64>

Research article

On the Number of Real Roots of a System of Trancendental Equations in a Given Domain

Alexander M. Kytmanov¹✉, Olga V. Khodos¹

¹ Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ akytmanov@sfu-kras.ru

Abstract: The paper is devoted to the study of the number of real roots of general systems of transcendental equations with real Taylor coefficients in some domain D of multidimensional real space. For a given entire function φ we introduce the notion of a resultant R_φ constructed by the power sums of the roots of the system in the negative degree and the Taylor coefficients of the function φ . For such power sums we obtain formulas for their computation by means of residue integrals. It is shown that if the resultant R_φ has simple roots, then the number of real roots of the system in D coincides with the number of real roots of the resultant R_φ in some interval.

Keywords: system of transcendental equations, resultant, simple roots, residue integrals.

Acknowledgements: The research was financially supported by the Russian Scientific Found, (Project No. 24-21-00023).

For citation: Kytmanov A. M., Khodos O. V. On the Number of Real Roots of a System of Trancendental Equations in a Given Domain. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 56, pp. 64–80. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.64>

1. Введение

В предыдущей работе авторов [13] была рассмотрена задача о нахождении числа вещественных корней простейших систем трансцендентных уравнений в заданной области D многомерного вещественного пространства. Предполагая, что число корней системы дискретно, для заданной целой функции φ и системы уравнений вводилось понятие результата R_φ , используя степенные суммы корней системы в отрицательной степени, найденных с помощью вычетов интегралов и коэффициентов Тейлора функции φ . Если результат не имеет кратных нулей, то было показано, что число вещественных корней системы в D равно числу вещественных нулей этого результата в некотором интервале. В данной работе мы продолжаем это исследование, рассматривая общие системы трансцендентных уравнений. Это предположение усложняет исследование, поскольку рассматриваемые вычеты интегралы гораздо сложнее таких интегралов в предыдущей работе авторов.

Нахождение числа вещественных корней многочленов с вещественными коэффициентами является классической задачей алгебры. Ей посвящены метод Эрмита квадратичных форм [4, гл. 16, §9], [5, Дополнение I], теорема Штурма, правило знаков Декарта, теорема Бюдана – Фурье (см., например, учебник [7, гл. 9]). Дальнейшее развитие этих методов для многочленов можно найти в обзоре Крейна и Наймарка [20] и монографии Джури [19]. Для целых функций вопрос о локализации вещественных положительных корней рассматривался в классических работах Н. Г. Чеботарёва [15, с. 3–18, 29–56].

Для систем уравнений число вещественных корней исследовалось в статьях [1; 9] без конкретных вычислений.

В монографии [18] рассмотрены алгебраические системы уравнений различного вида.

Системы трансцендентных уравнений возникают, например, при изучении уравнений химической кинетики [3]. Одна из возникающих там задач — это задача о числе вещественных положительных корней системы уравнений в многограннике реакции.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим систему трансцендентных уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ \dots \\ f_n(z) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $f_1(z), \dots, f_n(z)$ являются целыми функциями от комплексных переменных $z = (z_1, \dots, z_n)$ в \mathbb{C}^n .

Для алгебраических систем уравнений существуют процедуры (например, метод базисов Гребнера – Ширшова), позволяющие определять дискретность множества корней. Для трансцендентных систем уравнений этот вопрос открытый. Здесь можно только привести утверждение из [16, §18, следствие].

Следствие 1. Пусть A — аналитическое множество в поликруге U , такое, что A входит в $U \cup \Gamma$ (Γ — остов поликруга), и A не пересекается с осями координат, тогда A не более чем счетно.

В дальнейшем будем считать, что множество корней системы дискретно, тогда оно не более чем счетно.

Обозначим через \mathcal{E} множество корней с ненулевыми координатами $w_{(\nu)} = (w_{1(\nu)}, \dots, w_{n(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \dots$, занумерованных в порядке возрастания модулей: $|w_{(1)}| \leq |w_{(2)}| \leq \dots \leq |w_{(\nu)}| \leq \dots$.

Рассмотрим степенные суммы корней S_α из \mathcal{E} , где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — неотрицательный мультииндекс (все компоненты неотрицательные и целые числа) и $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n > 0$, вида

$$S_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}^{\alpha_1} \cdot w_{2(\nu)}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot w_{n(\nu)}^{\alpha_n}}.$$

Будем считать, что ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α , $\|\alpha\| > 0$.

Понятие степенных сумм для различных типов трансцендентных систем уравнений было рассмотрено в работах [11–13]. Результаты этих

статей были основаны на представлении степенных сумм через так называемые вычетные интегралы [24].

В статье [12] доказано утверждение.

Лемма 1. *Ряды S_α абсолютно сходятся для любых мультииндексов α , $\|\alpha\| > 0$, тогда и только тогда, когда ряды $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{w_{n(\nu)}}$ абсолютно сходятся.*

Эта лемма позволяет определить понятие результата системы (2.1) (см. [13]), а именно введем целую функцию нулевого рода ([14], глава 7):

$$R(z_1) = z_1^s \cdot \prod_{\eta=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z_1}{w_{1(\eta)}}\right), \quad (2.2)$$

где s — кратность нуля системы (2.1) в точке ноль, $s \geq 0$.

В формуле (2.2) бесконечное произведение абсолютно и равномерно сходится на комплексной плоскости \mathbb{C} , если выполнена лемма 1.

Функцию $R(z_1)$ будем называть *результантом* системы (2.1) по переменной z_1 . Понятие результата для систем трансцендентных уравнений не является общепринятым. Для случая двух уравнений похожее определение было введено Н. Г. Чеботарёвым [15, с. 18–27]. В последние годы оно рассматривалось с различных точек зрения в работах [21; 22].

Пусть все коэффициенты разложения Тейлора в точке 0 функций системы (2.1) — вещественные.

Теорема 1 ([12]). *Если система (2.1) с вещественными коэффициентами такова, что все нули $R(z_1)$ простые, кроме точки $z_1 = 0$, то число вещественных корней системы (2.1) в \mathcal{E} совпадает с числом вещественных корней функции $R(z_1)$.*

В статье [13] была рассмотрена более общая ситуация. Пусть $\varphi(z)$ — целая функция с вещественными коэффициентами разложения Тейлора в точке $z = 0$. Если $z \in \mathbb{C}^n$ и $\text{Im } z = 0$, то $z = x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $D_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \varphi(x) < b\}$.

Как определить число вещественных корней системы (2.1), лежащих в $D_{a,b}$?

Данная задача была поставлена в работе [13].

Введем числа $\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right)$, $w_{(\nu)} \in \mathcal{E}$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Нам нужно найти степенные суммы вида

$$S_\varphi^j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi^j\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right), \quad j \geq 1, \quad (2.3)$$

и проверить эти ряды на сходимость. Справедливо утверждение (см. [13]).

Лемма 2. *Ряды (2.3) абсолютно сходятся для всех $j \geq 1$.*

Предположим, что S_φ^j найдены. Тогда мы можем применить к ним рекуррентные формулы Ньютона для целых функций одного комплексного переменного (см. [18, Ch. 1]).

Таким образом мы найдем целую функцию $R_\varphi(u) = f(u)$ одного комплексного переменного u , имеющую корни $\varphi\left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}}\right)$, где $\nu = 1, 2, \dots$.

3. Вспомогательные утверждения

Нашей основной целью является нахождение степенных сумм $\sigma_j = S_\varphi^j$ для общих систем уравнений. Для простейших систем уравнений это было сделано в статье [13].

Мы рассмотрим (см. [10]) систему уравнений

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

состоящую из целых функций, где P_j — младшая однородная часть разложения Тейлора функции $f_j(z)$ в точке 0. Степень всех ненулевых мономов (по совокупности переменных), входящих в P_j , равна m_j , $j = 1, \dots, n$. В функциях Q_j степени всех ненулевых мономов строго больше чем m_j . Обозначим степень наименьшего монома в Q_j через $\text{ord } Q_j = s_j$. Тогда $m_j < s_j$, $j = 1, \dots, n$.

Разложение функций Q_j , P_j , $j = 1, \dots, n$, в окрестности нуля в ряды Тейлора, сходящиеся абсолютно и равномерно в этой окрестности, имеют вид

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > m_j} a_\alpha^j z^\alpha, \quad (3.2)$$

$$P_j(z) = \sum_{\|\beta\| = m_j} b_\beta^j z^\beta, \quad (3.3)$$

$$j = 1, \dots, n,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндексы, т. е. α_j и β_j — неотрицательные целые числа, $j = 1, \dots, n$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\|\beta\| = \beta_1 + \dots + \beta_n$, мономы $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot z_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n}$.

В дальнейшем будем предполагать, что система многочленов $P_1(z), \dots, P_n(z)$ невырождена, т. е. ее общим нулем служит только точка 0 — начало координат.

Рассмотрим компактный цикл Γ_P (остов специального аналитического полиэдра [2, гл. 2]) вида

$$\Gamma_P(r_1, \dots, r_n) = \Gamma_P(r) = \{z : |P_j(z)| = r_j, \quad j = 1, \dots, n\}.$$

В работе [10] показано, что степенные суммы S_α равны некоторым вычетным интегралам при ряде дополнительных предположений на систему.

Рассмотрим эти предположения. Сначала возьмем случай, когда все $Q_j(z)$ — многочлены.

Предположим, что для каждого j -го уравнения из (3.1) выполнены условия

$$\deg_{z_j} P_j < \text{ord}_{z_j} Q_j, \quad \deg_{z_k} P_j \geq \text{ord}_{z_k} Q_j, \quad k \neq j. \quad (3.4)$$

Здесь $\deg_{z_j} P(z)$ степень многочлена P по переменной z_j при фиксированных остальных переменных, а $\text{ord}_{z_j} Q$ — порядок (т. е. степень наименьшего монома) многочлена Q по переменной z_j при фиксированных остальных переменных.

Имеем $\deg P_k = m_k$, $\text{ord} Q_k = s_k$. Обозначим $\deg_{z_j} P_k = m_k^j$, $\text{ord}_{z_j} Q_k = s_k^j$. Тогда $m_k < s_k$, $m_k^k < s_k^k$, $k = 1, \dots, n$. Кроме того, $m_k^j \geq s_k^j$ при $j \neq k$. Не исключены случаи, когда $\sum_{j=1}^n m_k^j > m_k$.

Сделаем во всех функциях $f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z)$, $j = 1, 2, \dots, n$, замену $z_k = \frac{1}{u_k}$, предполагая, что все $u_k \neq 0$. Получим

$$P_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{u_1^{m_k^1}} \cdots \frac{1}{u_n^{m_k^n}} \sum_{\|\beta\|=m_k} b_\beta^k u_1^{m_k^1 - \beta_1} \cdots u_n^{m_k^n - \beta_n},$$

а

$$Q_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) = \frac{1}{u_1^{s_k^1}} \cdots \frac{1}{u_n^{s_k^n}} \sum_{\|\alpha\| > m_k} a_\alpha^k u_1^{s_k^1 - \alpha_1} \cdots u_n^{s_k^n - \alpha_n}.$$

Многочлен

$$\tilde{Q}_j(u_1, u_2, \dots, u_n) = \tilde{Q}_j(u) = u^{\beta_j + s_j e^j} \cdot Q_j \left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \dots, \frac{1}{u_n} \right)$$

имеет степень (по совокупности переменных) строго меньшую, чем s_j (в силу условий, наложенных на многочлены $Q_j(z)$).

Имеем

$$\begin{aligned} f_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) &= P_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) + Q_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) = \\ &= \frac{1}{u_1^{m_k^1} \cdots u_k^{s_k^k} \cdots u_n^{m_k^n}} \cdot \left(\tilde{P}_k(u) + \tilde{Q}_k(u) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где \tilde{P}_k — однородные многочлены

$$\tilde{P}_k(u_1, \dots, u_n) = u_1^{m_k^1} \cdots u_k^{s_k^k} \cdots u_n^{m_k^n} \cdot P_k \left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n} \right) =$$

$$= u_k^{s_k^k - m_k^k} \sum_{\|\beta\|=m_k} b_\beta^k u_1^{m_k^1 - \beta_1} \dots u_n^{m_k^n - \beta_n} = u_k^{s_k^k - m_k^k} \cdot \tilde{P}_k,$$

а \tilde{P}_k — однородные многочлены

$$\tilde{P}_k = \sum_{\|\beta\|=m_k} b_\beta^k u_1^{m_k^1 - \beta_1} \dots u_n^{m_k^n - \beta_n}.$$

В \tilde{P}_k за знак суммы не выносятся ни u_1, \dots , ни u_n .

Многочлены \tilde{Q}_k имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(u_1, \dots, u_n) &= u_1^{m_k^1} \dots u_k^{s_k^k} \dots u_n^{m_k^n} \cdot Q_k\left(\frac{1}{u_1}, \dots, \frac{1}{u_n}\right) = \\ &= u_1^{m_k^1 - s_k^1} \dots [u_k] \dots u_n^{m_k^n - s_k^n} \cdot \sum_{\|\alpha\|>m_k} a_\alpha^k w_1^{m_k^1 - \alpha_1} \dots w_n^{m_k^n - \alpha_n}. \end{aligned}$$

Обозначим через \tilde{f}_k функции

$$\tilde{f}_k(u) = \tilde{P}_k(u) + \tilde{Q}_k(u) = u_k^{s_k^k - m_k^k} \cdot \tilde{P}_k + \tilde{Q}_k(u), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Имеем $\deg \tilde{P}_k = s_k^k - m_k^k + m_k \leq s_k$, а

$$\deg \tilde{P}_k > \deg \tilde{Q}_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Справедливы утверждения из [10].

Лемма 3. Система

$$\tilde{P}_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

имеет только одно решение начало координат, т. е. она невырожденная.

Лемма 4. Рассмотрим систему

$$\tilde{P}_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.9)$$

Если для любого набора индексов i_1, \dots, i_k , $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k = 1, \dots, n$, системы уравнений

$$\tilde{P}_{j_1}(u) = 0, \quad \dots \quad \tilde{P}_{j_{n-k}} = 0$$

при $u_{i_1} = 0, \dots, u_{i_k} = 0$ и при $j_p \neq i_q$ являются невырожденными, то система (3.9) также невырождена.

Будем в дальнейшем считать, что для функций $f_j(z)$ выполнены условия лемм 3, 4.

Поскольку система функций $\tilde{P}_1(u), \dots, \tilde{P}_n(u)$ невырождена, то хорошо известна теорема Безу (см., например, [16, §10]), говорящая о том, что система уравнений

$$\tilde{f}_j(u) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

имеет конечное число корней (считая каждый корень столько раз, какова его кратность), и это число равно произведению степеней многочленов $\tilde{P}_j(u)$.

Обозначим корни системы (3.10) с учетом их кратностей, не лежащие на координатных плоскостях, через $u_{(k)} = (u_{1(k)}, u_{2(k)}, \dots, u_{n(k)})$, $k = 1, 2, \dots, M$, $M \leq s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$. Тогда точки $w_{(k)} = \left(\frac{1}{u_{1(k)}}, \frac{1}{u_{2(k)}}, \dots, \frac{1}{u_{n(k)}} \right)$ и только они являются корнями системы (3.1), не лежащими на координатных плоскостях (т. е. $w_{(k)} \in \mathcal{E}$). Отсюда справедливо утверждение.

Лемма 5. Система (3.1) с функциями f_j и многочленами Q_j вида (3.2), (3.4) имеет конечное число корней (с учетом их кратностей) $w_{(1)}, w_{(2)}, \dots, w_{(M)}$, не лежащих на координатных плоскостях $\{z_s = 0\}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Пусть

$$\sigma_\beta = \sigma_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{u_{1(k)}^{\beta_1} \cdot u_{2(k)}^{\beta_2} \cdot \dots \cdot u_{n(k)}^{\beta_n}},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — некоторый мультииндекс.

Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, системы (3.1), но в отрицательной степени (т. е. степенной суммой от обратных величин корней).

Обозначим через $\Gamma_{\tilde{P}} = \Gamma_{\tilde{P}}(\varepsilon)$ цикл

$$\Gamma_{\tilde{P}} = \{u \in \mathbb{C}^n : |\tilde{P}_k| = \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0, \quad k = 1, \dots, n\}. \quad (3.11)$$

Этот цикл, в силу следствия из [10], не пересекается с координатными плоскостями при почти всех ε_k , $k = 1, \dots, n$.

Рассмотрим вычетные интегралы вида

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_P} \frac{1}{z^\gamma} \cdot \frac{df(z)}{f(z)}, \quad \tilde{J}_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{\tilde{P}}} u^\gamma \frac{df(1/u)}{f(1/u)}, \quad (3.12)$$

где

$$\frac{1}{z^\gamma} = \frac{1}{z_1^{\gamma_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{z_n^{\gamma_n}}, \quad u^\gamma = u_1^{\gamma_1} \cdot \dots \cdot u_n^{\gamma_n}, \quad f(z) = f_1 \cdot \dots \cdot f_n,$$

$$\begin{aligned}df(z) &= df_1(z_1, \dots, z_n) \wedge \dots \wedge df_n(z_1, \dots, z_n), \\f(1/u) &= f_1(1/u_1, \dots, 1/u_n) \cdots f_n(1/u_1, \dots, 1/u_n), \\df(1/u) &= df_1(1/u_1, \dots, 1/u_n) \wedge \dots \wedge df_n(1/u_1, \dots, 1/u_n).\end{aligned}$$

Фактически \tilde{J}_γ получается из интеграла J_γ (3.12) с помощью замены в подинтегральном выражении $z_j = 1/u_j$, $j = 1, \dots, n$, и замены цикла интегрирования Γ_P на цикл $\Gamma_{\tilde{P}}$. Следующая лемма приведена в [10].

Лемма 6. *Выполняется равенство*

$$J_\gamma = (-1)^n \tilde{J}_\gamma$$

для неотрицательных мультииндексов γ с условием $\|\gamma\| > 0$.

В качестве функции φ рассмотрим многочлен степени N с вещественными коэффициентами.

В этом случае степенные суммы S_φ^j примут вид

$$S_\varphi^j = \sum_{\nu \geq 1} \varphi^j \left(\frac{1}{w_{1(\nu)}}, \dots, \frac{1}{w_{n(\nu)}} \right) = \sum_{\nu \geq 1} \varphi^j(u_{1(\nu)}, \dots, u_{n(\nu)}), \quad j \geq 1,$$

Для дальнейшего нам нужна обобщенная формула преобразования вычета Гротендика (см. [8]), ее алгебраическое доказательство было дано в [17], форма преобразования, приведенная здесь, взята из [18, Ch. 2]).

Теорема 2 ([8]). *Пусть $h(u)$ — многочлен, а многочлены $f_k(u)$ и $g_m(u)$, $m, k = 1, \dots, n$, связаны соотношениями*

$$g_m = \sum_{k=1}^n a_{mk} f_k, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

где матрица $A = \|a_{mk}\|_{m,k=1}^n$ состоит из многочленов. Системы функций f и g имеют дискретное число нулей. Рассмотрим циклы

$$\Gamma_f = \{u : |f_m(u)| = r_m, \quad m = 1, \dots, n\}, \Gamma_g = \{u : |g_m(u)| = r_m, \quad m = 1, \dots, n\},$$

где все $r_m > 0$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_f} h(u) \frac{du}{f^{\alpha+I}} = \sum_K \frac{\beta!}{\prod_{s,m=1}^n (k_{sm})!} \int_{\Gamma_g} h(u) \frac{\det A \prod_{s,m=1}^n a_{sm}^{k_{sm}} du}{g^{\beta+I}}, \quad (3.13)$$

где $\beta! = \beta_1! \beta_2! \dots \beta_n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, суммирование в формуле ведется по всем целочисленным неотрицательным матрицам $K = \|k_{sm}\|_{s,m=1}^n$ с условиями, что сумма $\sum_{s=1}^n k_{sm} = \alpha_m$, $\alpha_\beta = \sum_{m=1}^n k_{ms}$.

Здесь $f^{\alpha+I} = f_1^{\alpha_1+1} \dots f_n^{\alpha_n+1}$, $g^{\beta+I} = g_1^{\beta_1+1} \dots g_n^{\beta_n+1}$, $I = (1, \dots, 1)$.

4. Основные результаты

Поскольку система однородных многочленов $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ имеет только один общий ноль — начало координат, то по теореме Гильберта о нулях (см., например, [25]) существуют такие натуральные числа N_1, \dots, N_n , что

$$u_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^n a_{mk} \tilde{P}_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $a_{mk}(u)$ — некоторые многочлены. Так что в качестве функций $g_m(u)$ можно взять мономы $u_m^{N_m+1}$. По теореме Маколея (см. [23]) эти числа N_m можно выбрать с условием $N_m \leq \deg \tilde{P}_1 + \dots + \deg \tilde{P}_n - n$.

Отсюда из теоремы 2 и теоремы 6 ([10]) получаем утверждение.

Теорема 3. *Верны формулы*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot z_{jn}^{\gamma_n}} = \sum_{j=1}^p u_{1(j)}^{\gamma_1} \cdot u_{2(j)}^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot u_{n(j)}^{\gamma_n} = \\ & = \sum_{\|\alpha\| \leq \|\gamma\|} \frac{(-1)^{n+\|\alpha\|}}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{\tilde{P}}} u_1^{\gamma_1} \cdot u_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot u_n^{\gamma_n} \cdot \frac{\tilde{\Delta} \cdot \tilde{Q}_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \tilde{Q}_n^{\alpha_n} du}{\tilde{P}_1^{\alpha_1+1} \cdot \dots \cdot \tilde{P}_n^{\alpha_n+1}} = \\ & = \sum_{\|K\| \leq \|\gamma\|} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n k_{sm} \right)!}{\prod_{s,m=1}^n (k_{sm})!} \mathfrak{M} \left[\frac{u^\gamma \tilde{\Delta} \det A \tilde{Q}^\alpha \prod_{s,m=1}^n a_{sm}^{k_{sm}}}{\prod_{m=1}^n u_m^{\beta_m N_m + \beta_m + N_m}} \right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\|K\| = \sum_{s,m=1}^n k_{sm}$, $\tilde{\Delta}$ — якобиан системы (3.10), а функционал \mathfrak{M} сопоставляет многочлену Лорана его свободный член.

Тогда

Следствие 2. *Степенная сумма $S_\varphi^j =$*

$$= \sum_{\|K\| \leq N \cdot j} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n k_{sm} \right)!}{\prod_{s,m=1}^n (k_{sm})!} \mathfrak{M} \left[\frac{\varphi^j \tilde{\Delta} \det A \tilde{Q}^\alpha \prod_{s,m=1}^n a_{sm}^{k_{sm}}}{\prod_{m=1}^n u_m^{\beta_m N_m + \beta_m + N_m}} \right], \tag{4.2}$$

$N \cdot j$ — степень многочлена φ^j .

Если $u_{(j)}$ — корень системы (3.10) из \mathcal{E} , не все координаты которого вещественные, то $\tilde{u}_{(j)}$ также корень системы (3.10). Если

$$\varphi(u_{1(\nu)}, \dots, u_{n(\nu)})$$

— вещественное число, то то же самое можно сказать о равном ему числе

$$\varphi(\bar{u}_{1(\nu)}, \dots, \bar{u}_{n(\nu)}).$$

Таким образом, число

$$\varphi(u_{1(\nu)}, \dots, u_{n(\nu)})$$

является кратным нулем функции $R_\varphi(u)$.

Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема 4. *Если система (3.1) имеет вещественные коэффициенты и если функция $R_\varphi(u)$ имеет только простые нули, то число вещественных корней системы (3.1) в области $D_{a,b}$ совпадает с числом вещественных нулей функции $R_\varphi(u)$ на интервале (a, b) .*

Данная теорема является естественным обобщением теоремы 1. Для случая простейших систем уравнений она была приведена в [13].

Рассмотрим для системы (3.1) в качестве функции φ функцию

$$P_1^{2k_1}(z) + \dots + P_n^{2k_n}(z).$$

Тогда $D_{a,b}$ примет вид

$$D_{a,b} = \{x : a < P_1^{2k_1}(x) + \dots + P_n^{2k_n}(x) < b\}.$$

Поскольку у нас справедливы равенства в корнях системы (3.10)

$$\tilde{P}_j^{2k_j}(z) = \tilde{Q}_j^{2k_j}(z), \quad j = 1, \dots, n,$$

то в силу следствия 2 имеем утверждение

Теорема 5. *Верна формула*

$$\begin{aligned} S_\varphi^j &= \sum_{\|K\| \leq M} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n k_{sm} \right)!}{\prod_{s,m=1}^n (k_{sm})!} \times \\ &\times \mathfrak{M} \left[\frac{(\tilde{P}_1^{2k_1}(u) + \dots + \tilde{P}_n^{2k_n}(u))^j \cdot \tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot \tilde{Q}^\alpha \prod_{s,m=1}^n a_{sm}^{k_{sm}}}{\prod_{m=1}^n u_m^{\beta_m N_m + \beta_m + N_m}} \right] = \quad (4.3) \\ &= \sum_{\|K\| \leq M} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod_{s=1}^n \left(\sum_{m=1}^n k_{sm} \right)!}{\prod_{s,m=1}^n (k_{sm})!} \times \end{aligned}$$

$$\times \mathfrak{M} \left[\frac{(\tilde{Q}_1^{2k_1}(u) + \dots + \tilde{Q}_n^{2k_n}(u))^j \cdot \tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot \tilde{Q}^\alpha \prod_{s,m=1}^n a_{sm}^{k_{sm}}}{\prod_{m=1}^n u_m^{\beta_m N_m + \beta_m + N_m}} \right],$$

где суммирование ведется по всем матрицам K , у которых $\|\alpha\|$ не превосходит максимальной степени многочленов \tilde{Q}_j умноженной на j , $M = \max_{1 \leq j \leq n} 2k_j m_j$.

В последней формуле гораздо меньше слагаемых, чем в предыдущей.

Пусть теперь $\varphi(z)$ — целая функция с вещественными коэффициентами Тейлора в точке 0. Разложим ее в ряд Тейлора по многочленам $\varphi_N(z)$ степени N $\varphi(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \varphi_N(z)$. Поскольку по лемме 2 ряды для S_{φ}^j сходятся, то применяя для $S_{\varphi_N}^j$ следствие 2, получим

Теорема 6. *Справедлива формула*

$$S_{\varphi}^j = \sum_{N=0}^{\infty} S_{\varphi_N}^j,$$

где $S_{\varphi_N}^j$ определяются формулами (4.2).

Рассмотрим теперь случай, когда $Q_j(z)$ не многочлены. Пусть

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

где $f_j^{(1)}(z), f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в \mathbb{C}^n , разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно и абсолютно сходящиеся в \mathbb{C}^n

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{js}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $P_j(z) + Q_j(z)$, а $P_j(z), Q_j(z)$ — функции вида (3.4).

Для всякого набора индексов $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$ и всякого набора чисел i_1, \dots, i_n , равных 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)} = 0, \quad f_{2j_2}^{(i_2)} = 0, \dots, f_{nj_n}^{(i_n)} = 0 \quad (4.5)$$

имеют согласно лемме 5 конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем, не лежащие на координатных плоскостях, составляют не более чем счетное множество. Перенумеруем их с учетом кратностей $z_{(1)}, \dots, z_{(l)}, \dots$. Будем предполагать, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{1(l)}| \cdot |z_{2(l)}| \cdots |z_{n(l)}|} \quad (4.6)$$

сходится. Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \dots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(k)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(k)}^{\beta_n+1}}. \quad (4.7)$$

Здесь β_1, \dots, β_n , как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_j равен $+1$, если в систему (4.5), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{js}^{(2)}$, и равен -1 , если входит нечетное число функций $f_{js}^{(2)}$.

Ряды (4.7) сходятся в силу условия, наложенного на ряд (4.6).

Справедливо утверждение

Теорема 7. Верно равенство $J_{\beta} = (-1)^n \sigma_{\beta+I}$.

5. Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_1(z_1, z_2) = a_1 z_1 - a_2 z_2 + z_1^2 = 0, \\ f_2(z_1, z_2) = b_1 z_1 + b_2 z_2 + z_2^2 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Все коэффициенты предполагаются вещественными.

Она удовлетворяет условиям на $P_j(z)$, $Q_j(z)$ вида (3.4). Будем считать, что $a_1 b_2 + a_2 b_1 \neq 0$, т. е. система младших однородных многочленов невырожденная.

Функция $\varphi = (a_1 z_1 - a_2 z_2)^2 + (b_1 z_1 + b_2 z_2)^2$.

Сделаем замену переменных $z_1 = 1/u_1$, $z_2 = 1/u_2$. Система (5.1) примет вид

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(u) = -a_2 u_1^2 + a_1 u_1 u_2 + u_2 = 0, \\ \tilde{f}_2(u) = b_2 u_1 u_2 + b_1 u_2^2 + u_1 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Эта система имеет 4 корня, на координатных плоскостях лежит 1 корень $-(0,0)$.

Якобиан системы (5.2) равен

$$\tilde{\Delta} = -2a_2 b_2 u_1^2 - 4a_2 b_1 u_1 u_2 + 2a_1 b_1 u_2^2 - a_1 u_1 - b_2 u_2 - 1.$$

Заметим, что $\tilde{Q}_1 = u_2$, $\tilde{Q}_2 = u_1$, $\tilde{P}_1 = -a_2u_1^2 + a_1u_1u_2$, $\tilde{P}_2 = b_2u_1u_2 + b_1u_2^2$.

Для нахождения матрицы A используем пример 8.3 из [18]. Согласно ему получаем, что матрица A равна

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (-a_2b_1^2 - a_1b_1b_2)u_1 - a_1b_1^2u_2 & a_1^2b_1u_1 \\ -a_2b_2^2u_2 & -a_2^2b_2u_1 + (a_2^2b_1 + a_1a_2b_2)u_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда, как нетрудно проверить, $u_1^3 = a_{11}\tilde{P}_1 + a_{12}\tilde{P}_2$, $u_2^3 = a_{21}\tilde{P}_1 + a_{22}\tilde{P}_2$. Числа $N_m = 2$, $m = 1, 2$.

$$\text{Вычислим } \det A : \det A = \frac{1}{\Delta} (a_2b_2u_1^2 - a_2b_1u_1u_2 - a_1b_1u_2^2).$$

По теореме 3

$$S_\varphi^0 = \sum_{\|K\| \leq 0} \frac{(-1)^{\|K\|} \cdot (k_{11} + k_{12})! \cdot (k_{21} + k_{22})!}{k_{11}! \cdot k_{12}! \cdot k_{21}! \cdot k_{22}!} \times \\ \times \mathfrak{M} \left[\frac{\tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot \tilde{Q}_1^{k_{11}+k_{21}} \cdot \tilde{Q}_2^{k_{12}+k_{22}} \cdot a_{11}^{k_{11}} \cdot a_{12}^{k_{12}} \cdot a_{21}^{k_{21}} \cdot a_{22}^{k_{22}}}{u_1^{3(k_{11}+k_{12})+2} \cdot u_2^{3(k_{21}+k_{22})+2}} \right].$$

Несложные вычисления (использующие определение функционала \mathfrak{M}) дают, что $S_\varphi^0 = 4$, т. е. числу корней системы.

В силу теоремы 5 имеем

$$S_\varphi^j = \sum_{\|K\| \leq 2j} \frac{(-1)^{\|K\|} \prod_{s=1}^2 \binom{2}{\sum_{m=1}^2 k_{sm}}!}{\prod_{s,m=1}^2 (k_{sm})!} \\ \mathfrak{M} \left[\frac{(u_1^2 + u_2^2)^j \cdot \tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot \prod_{s,m=1}^2 a_{sm}^{k_{sm}}}{u_1^{3k_{11}+3k_{12}-k_{22}-k_{21}+2} \cdot u_2^{3k_{22}+3k_{21}-k_{11}-k_{12}+2}} \right], \quad (5.3)$$

где K — матрица с неотрицательными целыми элементами $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$.

Найдем S_φ^1 . Вычисления дают

$$S_\varphi^1 = \frac{1}{a_2b_1(a_2b_1 + a_1b_2)^3} \cdot (3a_1^4b_1b_2 - 5a_1^4b_2^2 + a_1^3a_2b_1^2 - 6a_1^3a_2b_1b_2 - \\ - 6a_1^3a_2b_2^2 - 9a_1^2b_1b_2^2 + 10a_1^3b_2^3 - 3a_1^2a_2^2b_1b_2 - 9a_1^2a_2b_1^2b_2 + 10a_1^2a_2b_1b_2^2 + \\ + 9a_1^2a_2b_2^3 + 6a_1^2b_1b_2^3 - 5a_1^2b_2^4 - 4a_1a_2^2b_1^3 + 9a_1a_2^2b_1b_2^2 + 6a_1a_2b_1^2b_2^2 - 6a_1a_2b_1b_2^3 - \\ - 3a_1a_2b_2^4 + 4a_2^3b_1^2b_2 - 3a_2^2b_1^2b_2^2). \quad (5.4)$$

Для вычисления остальных степенных сумм нужно пользоваться системами компьютерной алгебры. После этого строится многочлен R_φ , вещественные корни которого лежат в интервале, а следовательно, вещественные корни системы (5.1) лежат в эллипсе, определяемом функцией φ .

Список источников

1. Айзенберг Л. А., Болотов В. А., Цих А. К. О решении систем нелинейных алгебраических уравнений с использованием многомерного логарифмического вычета. О разрешимости в радикалах // Доклады АН СССР. 1980. Т. 252, № 1. С. 11–14.
2. Айзенберг Л. А., Южаков А. П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск : Наука, 1979. 366 с.
3. Быков В. И., Цыбенова С. Б. Нелинейные модели химической кинетики. М. : КРАСАНД, 2011. 387 с.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 577 с.
5. Иохвидов И. С. Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М. : Наука, 1974. 264 с.
6. Куликов В. Р., Степаненко В. А. О решениях и формулах Варинга для систем n алгебраических уравнений от n неизвестных // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 200–214. <https://doi.org/10.1090/spmj/1361>
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1971. 428 с.
8. Кытманов А. М. О формуле преобразования вычета Гротендика и некоторых ее приложениях // Сибирский математический журнал. 1988. Т. 29, № 3. С. 198–202.
9. Кытманов А. М. О числе вещественных корней систем уравнений // Известия вузов. Математика. 1991. № 6. С. 20–23.
10. Кытманов А. М., Мышкина Е. К. Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений // Известия вузов. Математика. 2019. № 5, С. 40–55. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-40-55>
11. Кытманов А. М., Потапова З. Е. Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций // Известия вузов. Математика. 2005. № 8. С. 39–48.
12. Кытманов А. М., Ходос О. В. Об одном подходе к определению результата двух целых функций // Известия вузов. Математика. 2018. № 4. С. 49–59. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18040059>
13. Кытманов А. М., Ходос О. В. О вещественных корнях систем трансцендентных уравнений с вещественными коэффициентами // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 89–103. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.90>
14. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2. М. : Наука, 1968. 626 с.
15. Чебогарев Н. Г. Собрание сочинений. М. ; Л. : АН СССР, 1949. Т. 2. 417 с.
16. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М. : Наука, 1985. 274 с.
17. Berenstein C. A., Yger A. Residue calculus and effective Nullstellensatz // American Journal of Mathematics. 1999, Vol. 121, N 4. P. 723–796.
18. Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra / eds.: V. Bykov, A. Kytmanov, M. Lazman, M. Passare. Dordrecht : Springer science : Business media, 1998. 254 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5302-7>

19. Jury E. I. *Inners and stability of dynamic systems*. New York ; London ; Sydney ; Toronto : Wiley, 1974. 308 p.
20. Krein M. G., Naimark M. A. *The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation // Linear Multilin. Algebra*. 1981. Vol. 10, N 4. P. 265–308.
21. Kytmanov A. M., Khodos O. V. On the roots of systems of transcendental equations // *Probl. Anal.* 2024. Vol. 13, N 1. P. 37–49. <https://doi.org/10.15393/j3.art.2024.14430>
22. Kytmanov A. M., Naprienko Ya. M. One approach to finding the resultant of two entire function // *Complex variables and elliptic equations*. 2017. Vol. 62. P. 269–286. <https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218855>
23. Macaulay F. S. *Algebraic theory of modular systems*, Cambridge : Cambridge University Press, 1916. 112 p.
24. Passare M., Tsikh A. Residue integrals and their Melin transforms // *Can. J. Math.* 1995. Vol. 47. P. 515–529.
25. Van der Waerden B. L. *Algebra*. Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer Verlag, 1971. 285 p.

References

1. Ajzenberg L.A., Bolotov V.A., Tsikh A.K. On the solution of systems of nonlinear algebraic equations using the multidimensional logarithmic residue. On the solvability in radicals. *Sov. Math. Dokl.*, 1980, vol. 21, pp. 645–648.
2. Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P. *Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, 366 p.
3. Bykov V.I., Tsybenova S.B. *Nonlinear models of chemical kinetics*, Moscow, KRASAND Publ., 2011, 387 p. (in Russian)
4. Gantmakher F.R. *Theory of Matrices*. New York, Chelsea Pub. Co., 1959, 298 p.
5. Iokhvidov I.S. *Hankel and Toeplitz matrices and forms*. Springer, 1982, 244 p.
6. Kulikov V.R., Stepanenko V.A. On solutions and Waring's formulas for systems of n algebraic equations for n unknowns. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2014, vol. 26, no. 5. pp. 200–214. <https://doi.org/10.1090/spmj/1361>
7. Kurosh A.G. *Higher Algebra*. Central Books Ltd, 1972. 431 p.
8. Kytmanov A.M. A transformation formula for Grothendieck residue and some of its applications. *Sib. Math. J.*, 1988, vol. 169, pp. 495–499.
9. Kytmanov A.M. On the number of real roots of systems of equations. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1991, vol. 35, no. 6, pp. 19–22.
10. Kytmanov A.M., Myshkina E.K. Residue integrals and Waring formulas for algebraic and transcendent systems of equations. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 2019, vol. 63, no. 5, pp. 36–50. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-5-40-55>
11. Kytmanov A.M., Potapova Z.E. Formulas for finding power sums of roots of systems of meromorphic functions. *Izv. vuzov. Matematika*, 2005, no. 8, pp. 39–48. (in Russian)
12. Kytmanov A.M., Khodos O.V. On the roots of systems of transcendental equations. *Probl. Anal.*, 2024, vol. 13, no. 1, pp. 37–49. <https://doi.org/10.15393/j3.art.2024.14430>
13. Kytmanov A.M., Khodos O.V. On Real Roots of Systems of Transcendental Equations with Real Coefficients. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 89–103. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.90> (in Russian)

14. Markushevich A.I. *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. 2. Prentice-Hall, 1965, 333 p.
15. Chebotarev N.G. *Work Collection*, Moscow, Leningrad, AN SSSR Publ., 1949, vol. 2, 417 p. (in Russian)
16. Chirka E.M. *Complex Analytic Sets*. Dordrecht, Kluwer, 1986, 372 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-2366-9>
17. Berenstein C.A., Yger A. Residue calculus and effective Nullstellensatz. *American Journal of Mathematics*, 1999, vol. 121, no. 4, pp. 723–796 .
18. Bykov V., Kytmanov A., Lazman M., Passare M. (eds.). *Elimination Methods in Polynomial Computer Algebra*. Dordrecht, Springer science, Business media, 1998, 254 p.
19. Jury E.I. *Inners and stability of dynamic systems*. New York, London, Sydney, Toronto, Wiley, 1974, 308 p.
20. Krein M.G., Naimark M.A., The Method of Symmetric and Hermitian Forms in the Theory of the Separation of the Roots of Algebraic Equation. *Linear Multilin. Algebra*, 1981, vol. 10, no. 4, pp. 265–308.
21. Kytmanov A.M., Khodos O.V. An approach to the determination of the resultant of two entire functions. *Izvestiya VUZ. Matematika [Russian Math]*, 2019, vol. 62, no. 4, pp. 42–51. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18040059>
22. Kytmanov A.M., Naprienko Ya.M. One approach to finding the resultant of two entire function. *Complex variables and elliptic equations*, 2017, vol. 62, pp. 269–286. <https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1218855>
23. Macaulay F.S. *Algebraic theory of modular systems*. Cambridge, Cambridge University Press, 1916, 112 p.
24. Passare M., Tsikh A. Residue integrals and their Melin transforms. *Can. J. Math.*, 1995, vol. 47, pp. 515–529.
25. Van der Waerden B.L. *Algebra*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1971, 285 p.

Об авторах

Кытманов Александр

Мечиславович, д-р физ.-мат. наук, проф., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, akytmanov@sfu-kras.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-1480>

Ходос Ольга Вениаминовна,

канд. физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, 660041, Российская Федерация, Красноярск, khodos_olga@mail.ru

About the authors

Alexander M. Kytmanov, Dr. Sci.

(Phys.-Math.), Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, akytmanov@sfu-kras.ru, <https://orcid.org/0000-0002-7394-1480>

Olga V. Khodos, Cand. Sci.

(Phys.-Math.), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, khodos_olga@mail.ru

Поступила в редакцию / Received 14.07.2025

Поступила после рецензирования / Revised 02.09.2025

Принята к публикации / Accepted 09.09.2025