



Серия «Математика»  
2026. Т. 56. С. 33–46

Онлайн-доступ к журналу:  
<http://mathizv.isu.ru>

---

---

ИЗВЕСТИЯ  
Иркутского  
государственного  
университета

---

---

Научная статья

УДК 519.852.2

MSC 52B12, 90C05

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.33>

## Алгоритм построения решения в параллелепипеде системы линейных уравнений с параметром из прямоугольника

А. Р. Маматов<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup> Самаркандский государственный университет им. Ш. Рашидова, Самарканд,  
Узбекистан

✉ [akmm1964@rambler.ru](mailto:akmm1964@rambler.ru), [akmalm1964@gmail.com](mailto:akmalm1964@gmail.com)

**Аннотация:** Рассматривается задача построения в параллелепипеде решений системы линейных уравнений, зависящих от параметра, заданного в прямоугольнике. Сначала определяется, существуют ли решения системы линейных уравнений в параллелепипеде при некотором значении параметра в прямоугольнике. Если такое значение параметра существует, то для этого значения решается задача линейного программирования. С помощью опоры, идентифицирующей это решение, определяется область, при параметрах из которой система линейных уравнений имеет решения в параллелепипеде. Определяются области, соседние к границам этой области (многоугольника), при параметрах из которых система линейных уравнений имеет решения в параллелепипеде. Рассматриваемая задача решается в результате конечного числа повторений этого процесса.

**Ключевые слова:** системы линейных уравнений, параллелепипед, параметр, линейное программирование

**Ссылка для цитирования:** Маматов А. Р. Алгоритм построения решения в параллелепипеде системы линейных уравнений с параметром из прямоугольника // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 33–46.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.33>

Research article

## Algorithm for Constructing a Solution in a Parallelepiped of a System of Linear Equations with a Parameter from a Rectangle

Akmal R. Mamatov<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup> Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

✉ akmm1964@rambler.ru, akmal1964@gmail.com

**Abstract:** The problem under consideration involves constructing solutions within a parallelepiped for a system of linear equations that depends on a parameter defined within a rectangle. First, it is determined whether the system of linear equations has a solution in the parallelepiped for some value of the parameter within the rectangle. If such a parameter value is found, a linear programming problem is solved for that parameter. Using the basis that identifies this solution, the region of parameter values for which the system of linear equations has solutions in the parallelepiped is determined. The neighboring regions along the boundaries of this region (a polygon) are then identified, where the system also has solutions within the parallelepiped. By repeating this process a finite number of times, the problem under consideration is solved.

**Keywords:** systems of linear equations, parallelepiped, parameter, linear programming

**For citation:** Mamatov A. R. Algorithm for constructing a solution in a parallelepiped of systems of linear equations with parameters from a rectangle. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 56, pp. 33–46. (in Russian)

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.33>

### 1. Введение

Как отмечается в [10], теория, методы и практические приложения линейного программирования, начатые в новаторских работах Л. В. Канторовича, не остались в прошлом, они развиваются в наши дни, когда к многочисленным экономическим, техническим и военным приложениям присоединились задачи, связанные с проблемами создания систем искусственного интеллекта и обработки больших объемов данных. Важной частью задачи линейного программирования является задача построения начального плана — неотрицательного решения системы линейных алгебраических уравнений или решения системы линейных алгебраических уравнений из параллелепипеда. Общая теория систем линейных равенств приведена в учебниках по алгебре, например в [11], алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений систем линейных уравнений приведен в [20], алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств приведен в [21], общая теория систем линейных неравенств приведена в [19], методы решения систем линейных неравенств приведены

в [19; 22; 23]. Методы нахождения неотрицательных решений системы линейных уравнений приведены в [4; 9; 10; 17]. Методы нахождения решений систем линейных уравнений из параллелепипеда приведены в [6; 8].

Задача определения непустоты множества решений систем линейных уравнений с параметрами из параллелепипеда рассмотрена в [13; 14]. Методы построения ортогональной проекции многогранного множества в пространство меньшей размерности приведены в [2; 3; 12; 18].

В данной работе предлагается алгоритм построения решения в параллелепипеде системы линейных уравнений с параметром из прямоугольника.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим множества

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\} \text{ и } Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, Ax + By = b\},$$

где  $x = x(J)$ ,  $f_* = f_*(J)$ ,  $f^* = f^*(J) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y = y(K)$ ,  $g_* = g_*(K)$ ,  $g^* = g^*(K) \in \mathbb{R}^l$ ,  $b = b(I) \in \mathbb{R}^m$ ,  $B = B(I, K) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ,  $\text{rank} B = m < l$ ,  $A = A(I, J) \in \mathbb{R}^{m \times 2}$ ,  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, 2\}$ ,  $K = \{1, 2, \dots, l\}$ .

Требуется для каждого параметра  $x \in X$ , при котором  $Y(x) \neq \emptyset$ , построить  $Y(x)$ , т. е. решить систему линейных уравнений  $Ax + By = b$  в параллелепипеде  $g_* \leq y \leq g^*$ .

## 3. Алгоритм решения систем линейных неравенств с параметрами

### 3.1. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм основан на использовании адаптивного метода решения задачи линейного программирования, в котором основным инструментом является понятие опоры. Вначале, используя задачи первой фазы линейного программирования, определяется, существуют ли решения системы линейных неравенств

$$Ax + By = b, g_* \leq y \leq g^* \quad (3.1)$$

при некотором значении параметра  $x \in X$ . Если такое значение параметра существует, то для этого значения параметра решается задача линейного программирования. С помощью опоры  $K_{op}$ , идентифицирующей это решение  $(y(K_{op}), y(K_n))$ , определяется область  $S_{K_{op}}$ , при параметрах  $x \in S_{K_{op}}$ , из которой система линейных неравенств (3.1) имеет

решения. Используя теорию двойственности линейного программирования определяются области  $S_{\overline{K}_{op}}$ , соседние к границам этой области (многоугольника)  $S_{K_{op}}$ , при параметрах  $x \in S_{\overline{K}_{op}}$ , из которых система линейных неравенств (3.1) имеет решения. С этой целью составляется множество «критических» индексов  $K_{kr}$ , множество индексов  $K_*$ , соответствующих максимально допустимому двойственному шагу  $\sigma_{k_*}$ , множество индексов  $K_n^+$  ( $K_n^-$ ), соответствующих неотрицательным (неположительным) компонентам вектора оценок  $\delta(K)$  соответствующих задач линейного программирования. Повторяя этот процесс конечное число раз, определяются опоры  $K_{op}^\alpha$ , соответствующие им области  $S_{K_{op}^\alpha}$ , а также решения систем линейных неравенств (3.1) при значениях параметров из  $S_{K_{op}^\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{1, \tau}$ .

Приведем необходимые сведения, используемые при описании алгоритма.

Пусть  $x \in X$ ,  $d = (-1, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^l$ .

**Определение 1.** Совокупность  $K_{op} = \{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subset K$  называется опорой [5] задачи

$$\begin{cases} d'y \rightarrow \max, \\ By = b - Ax, \\ g_* \leq y \leq g^*, \end{cases} \quad (3.2)$$

если  $\det B(I, K_{op}) \neq 0$ .

По опоре  $K_{op}$  построим векторы  $\mu(I)$ ,  $\Delta(K)$  следующим образом:

$$\mu'(I) = d'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}, \delta'(K) = \mu'(I)B(I, K) - d'(K). \quad (3.3)$$

Согласно [5], справедлива

**Теорема 1.** Вектор  $y \in Y(x)$  является оптимальным в задаче (3.2) тогда и только тогда, когда существует такая опора  $K_{op}$ , что для вектора  $\delta'(K)$ , построенного по формуле (3.3), выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} \delta_k &\geq 0 \text{ при } y_k = g_{*k}; \delta_k \leq 0 \text{ при } y_k = g_k^*; \\ \delta_k &= 0 \text{ при } g_{*k} < y_k < g_k^*, k \in K_n = K \setminus K_{op}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Определение 2.** Опора  $K_{op}$  называется оптимальной опорой в задаче (3.2), если на паре  $\{y, K_{op}\}$  справедливы соотношения (3.3).

Пусть  $K_{op}^0$  — опора задачи (3.2).

**Шаг 1.** Для определения непустоты множества

$$Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, Ax + By = b\}$$

при некотором  $x \in X$  положим  $y^0 := g_*$ ,  $x^0 := f_*$ , вычислим:  $\omega = b - Ax^0 - By^0$  и решим задачу линейного программирования (задачу первой фазы задачи линейного программирования) [8]

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^m y_{l+i} \rightarrow \max, \\ A(i, J)x(J) + B(i, K)y + c_{il+i}y_{l+i} = b_i, i = \overline{1, m} \\ g_* \leq y \leq g^*, 0 \leq y_{l+i} \leq |\omega_i|, i = \overline{1, m}, e' = (1, 1, \dots, 1), \\ (c_{il+i} = 1 \text{ если } \omega_i \geq 0, c_{il+i} = -1 \text{ если } \omega_i < 0, i = \overline{1, m}) \end{cases} \quad (3.5)$$

конечной модификацией адаптивного метода [5] с начальным опорным планом  $\{(y^0, x^0, y_{l+i} = |\omega_i|, i = \overline{1, m}), K_{op}\}$ ,  $K_{op} = \{l+1, l+2, \dots, l+m\}$ . Если в решении задачи (2.1)  $y^0, x^0, y_{sv}^0, (y_{sv}^0 = (y_{l+i}^0, i = \overline{1, m}))'$  отлично от нуля, то  $\forall x \in X, Y(x) = \emptyset$ . В противном случае переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Решим задачу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ Ax + By = b, \\ g_* \leq y \leq g^*, f_* \leq x \leq f^*, \end{cases} \quad (3.6)$$

конечной модификацией адаптивного метода [5] с начальным опорным планом  $\{(y^0, x^0), K_{op}^0\}$ . Решение задачи (2.2) обозначим через  $(y^0, x^0)$  и переходим к шагу 3.

**Шаг 3.** Решим задачу

$$\begin{cases} d'y \rightarrow \max, \\ By = b - Ax^0, \\ g_* \leq y \leq g^* \end{cases} \quad (3.7)$$

конечной модификацией адаптивного метода [5] с начальным опорным планом  $\{y^0, K_{op}^0\}$ . Решение задачи (3.1) обозначим через  $y^0$ , а через  $K_{op}$  — опору, идентифицирующую оптимальность  $y^0$ . Положим  $K_{op}^p := K_{op}, \overline{K_{op}^p} := K_{op}$  и построим множества (решим систему из  $m$  неравенств с двумя переменными):

$$S_{K_{op}} = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*, g_*(K_{op}) \leq [B(I, K_{op})]^{-1}[b(I) - A(I, J)x(J) - B(I, K_n)y^0(K_n)] \leq g^*(K_{op})\}.$$

Решение системы (3.1) при  $x \in S_{K_{op}}$  определим следующим образом:  $y = (y(K_{op}), y^0(K_n)), y(K_{op}) = [B(I, K_{op})]^{-1}[b(I) - A(I, J)x(J) - B(I, K_n)y^0(K_n)], K_n = K \setminus K_{op}$ .

Построим  $K_{kr} = \{k \in K_{op} \mid y_k = g_{*k} \text{ либо } y_k = g_k^*\}$  (индексы  $k \in K_{op}$ , при которых  $y_k = g_{*k}$  и  $y_k = g_k^*$  будем «дважды» вносить в множество  $K_{kr}$ ). Если  $K_{kr} = \emptyset$ , то остановим процесс решения рассматриваемой задачи. В противном случае положим  $\tau = 1$  и переходим к шагу 4.

**Шаг 4.** Выберем некоторое  $k_0 \in K_{kr}$ . Положим  $z_{k_0} = 1$ , если  $y_{k_0} = g_{*k_0}$ ;  $z_{k_0} = -1$ , если  $y_{k_0} = g_{k_0}^*$ ;  $z_k = 0$ ,  $k \in K_{op} \setminus \{k_0\}$ , и вычислим:

$$\begin{aligned} z'(K_n) &= z'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}B(I, K_n), \\ \delta'(K) &= \mu'(I)B(I, K) - d'(K), \mu'(I) = d'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}, \\ \sigma_k &= \begin{cases} -\delta_k/z_k, \text{ если } k \in K_n^+ \text{ и } z_k < 0 \text{ или } k \in K_n^- \text{ и } z_k > 0; \\ \infty, \text{ если } k \in K_n^+ \text{ и } z_k \geq 0 \text{ или } k \in K_n^- \text{ и } z_k \leq 0, \end{cases} \\ K_n^+ &= \{k \in K_n \mid \delta_k \geq 0\}, K_n^- = \{k \in K_n \mid \delta_k \leq 0\}, \\ K_n &= K_n^- \cup K_n^+, K_n^- \cap K_n^+ = \emptyset. \end{aligned}$$

Найдем  $\sigma_{k_*} = \min \sigma_k, k \in K_n$ . Переходим к шагу 5.

**Шаг 5.** Построим множества  $K_* = \{k \in K_n \mid \sigma_{k_*} = \sigma_k, \sigma_{k_*} < \infty\}$ . Если  $K_* = \emptyset$ , то исключим элемент  $k_0$  из  $K_{kr}$ . Если  $K_{kr} = \emptyset$  и  $\tau = 1$ , то остановим процесс решения рассматриваемой задачи. Если  $K_{kr} \neq \emptyset$ , то переходим к шагу 4. В случае  $K_* \neq \emptyset$  для каждого  $\bar{k} \in K_*$  построим множества  $K_{op}^* = K_{op} \setminus \{k_0\} \cup \{\bar{k}\}$  и элементы из них, не принадлежащие множествам  $K_{op}^p$ , добавим в множества  $K_{op}^p, K_{op}^p := K_{op} \cup K_{op}^*$ . Значение  $\tau$  увеличиваем до количества таких множеств. Исключим элемент  $k_0$  (если включили этот элемент «один» раз) из  $K_{kr}$ . Положим  $K_{kr} := K_{kr} \setminus \{k_0\}$ . Если  $K_{kr} \neq \emptyset$ , то переходим к шагу 4. В противном случае переходим к шагу 6.

**Шаг 6.** Если для всех  $K_{op} \in K_{op}^p$  построены  $S_{K_{op}}$ , то остановим процесс решения рассматриваемой задачи. В противном случае при опоре  $K_{op} \in K_{op}^p, K_{op} \in \overline{K_{op}^p}$  построим множества (решим систему из  $m$  неравенств с двумя переменными):

$$\begin{aligned} S_{K_{op}} &= \{x \mid f_* \leq x \leq f^*, g_*(K_{op}) \leq [B(I, K_{op})]^{-1}[b(I) - \\ &\quad - A(I, J)x(J) - B(I, K_n)y^0(K_n)] \leq g^*(K_{op})\} \\ y^0(K_n) &= (y_k^0, k \in K_n = K \setminus K_{op}), \\ y_k^0 &= g_{*k}, \text{ если } k \in K_n^+ = \{k \in K_n \mid \delta_k \geq 0\}, \\ y_k^0 &= g_k^*, \text{ если } k \in K_n^- = \{k \in K_n \mid \delta_k \leq 0\}, \\ K_n &= K_n^+ \cup K_n^-, K_n^+ \cap K_n^- = \emptyset, \\ \delta'(K) &= \mu'(I)B(I, K) - d'(K), \mu'(I) = d'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}. \end{aligned}$$

Решение системы (3.1) при  $x \in S_{K_{op}}$  определим следующим образом:  $y = (y(K_{op}), y^0(K_n)), y(K_{op}) = [B(I, K_{op})]^{-1}[b(I) - A(I, J)x(J) - B(I, K_n)y^0(K_n)], K_n = K \setminus K_{op}$ . Положим  $K_{op}^p := \overline{K_{op}^p} \cup K_{op}$ . Построим  $K_{kr} = \{k \in K_{op} \mid y_k = g_{*k} \text{ либо } y_k = g_k^*\}$  (индексы  $k \in K_{op}$ , при которой  $y_k = g_{*k}$  и  $y_k = g_k^*$  будем «дважды» вносить в множество  $K_{kr}$ ). Переходим к шагу 7.

**Шаг 7.** Выберем некоторое  $k_0 \in K_{kr}$ . Положим  $z_{k_0} = 1$ , если  $y_{k_0} = g_{*k_0}$ ;  $z_{k_0} = -1$ , если  $y_{k_0} = g_{k_0}^*$ ;  $z_k = 0, k \in K_{op} \setminus \{k_0\}$ , и вычислим:

$$z'(K_n) = z'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1}B(I, K_n),$$

$$\delta'(K) = \mu'(I)B(I, K) - d'(K), \mu'(I) = d'(K_{op})[B(I, K_{op})]^{-1},$$

$$\sigma_k = \begin{cases} -\delta_k/z_k, & \text{если } k \in K_n^+ \text{ и } z_k < 0 \text{ или } k \in K_n^- \text{ и } z_k > 0; \\ \infty, & \text{если } k \in K_n^+ \text{ и } z_k \geq 0 \text{ или } k \in K_n^- \text{ и } z_k \leq 0, \end{cases}$$

$$K_n^+ = \{k \in K_n | \delta_k \geq 0\}, K_n^- = \{k \in K_n | \delta_k \leq 0\},$$

$$K_n = K_n^- \cup K_n^+, K_n^- \cap K_n^+ = \emptyset.$$

Найдем  $\sigma_{k_*} = \min \sigma_k, k \in K_n$ . Переходим к шагу 8.

**Шаг 8.** Построим множества  $K_* = \{k \in K_n | \sigma_{k_*} = \sigma_k, \sigma_{k_*} < \infty\}$ . Если  $K_* = \emptyset$ , то исключим (если включили этот элемент «один» раз) элемент  $k_0$  из  $K_{kr}$ . Если  $K_{kr} = \emptyset$ , то переходим к шагу 6. Если  $K_{kr} \neq \emptyset$ , то переходим к шагу 7. В случае  $K_* \neq \emptyset$  для каждого  $\bar{k} \in K_*$  построим множества  $K_{op}^* = K_{op} \setminus \{k_0\} \cup \{\bar{k}\}$  и элементы из них, не принадлежащие множествам  $K_{op}^p$  добавим в множества  $K_{op}^p, K_{op}^p := K_{op} \cup K_{op}^*$ . Значение  $\tau$  увеличиваем до количества таких множеств. Исключим элемент  $k_0$  из  $K_{kr}$ . Положим  $K_{kr} := K_{kr} \setminus \{k_0\}$ . Если  $K_{kr} \neq \emptyset$ , то переходим к шагу 7. В противном случае переходим к шагу 6.

**Утверждение 1.** Матрицы  $B(I, K_{op}^0) (B(I, K_{op}))$  в ходе работы алгоритма всегда являются невырожденными.

Действительно, существует  $K_{op}^0$ , при которой  $\det B(I, K_{op}) \neq 0$ , поскольку  $\text{rank} B = m$ . В шаге 1 начальная матрица  $B(I, K_{op})$  является единичной матрицей, а при переходе от одной  $K_{op}$  к другой  $\bar{K}_{op}$  матрица  $B(I, \bar{K}_{op})$  при решении задач (2.1), (2.2), (3.1) является невырожденной [5]. Матрица  $B(I, \bar{K}_{op})$  в других случаях также является невырожденной, поскольку [5; 24]

$$(B(I, \bar{K}_{op}))^{-1}(B(I, K_{op}))^{-1} - (B(I, K_{op}))^{-1}(B(I, k_*) - B(I, k_0))e'_{k_0}(B(I, K_{op}))^{-1}/z_{k_*}.$$

### 3.2. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА

**Определение 3.** Переход от одной опоры  $K_{op}$  задачи (2.1) ((2.2) или (3.1)) к другой опоре  $\bar{K}_{op}$  задачи (2.1) ((2.2) или (3.1)) назовем итерацией.

**Теорема 2.** При любых  $A, B, b, f_*, f^*, g_*, g^*, m < \infty, l < \infty$  алгоритм через конечное число итераций либо определяет, что  $\forall x \in X, Y(x) =$

$\emptyset$ , либо для каждого параметра  $x \in X$ , при котором  $Y(x) \neq \emptyset$  строит  $Y(x)$ , т. е. решает систему линейных уравнений  $Ax + By = b$  в параллелепипеде  $g_* \leq y \leq g^*$  путем разбиения  $S = \{x \in X | Y(x) \neq \emptyset\}$  на множества

$$S_{K_{op}^\alpha} = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*, g_*(K_{op}^\alpha) \leq [B(I, K_{op}^\alpha)]^{-1}[b(I) - A(I, J)x(J) - B(I, K_n)y^0(K_n^\alpha)] \leq g^*(K_{op}^\alpha)\}, \alpha = \overline{1, \tau}$$

так, что  $S = \cup_{\alpha=1}^{\tau} S_{K_{op}^\alpha}$ .  $S$  является выпуклым множеством, притом  $S_{K_{op}^i}, S_{K_{op}^j}, i \neq j, i, j = \overline{1, \tau}$  могут иметь только общие границы. Решение системы (3.1) при  $x \in S_{K_{op}^\alpha}, \alpha = \overline{1, \tau}$  определяются следующим образом:

$$y = (y(K_{op}^\alpha), y^0(K_n^\alpha)),$$

$$y(K_{op}^\alpha) = [B(I, K_{op}^\alpha)]^{-1}[b(I) - A(I, J)x(J) - B(I, K_n^\alpha)y^0(K_n^\alpha)], \quad (3.8)$$

$$K_n^\alpha = K \setminus K_{op}^\alpha, \alpha = \overline{1, \tau}.$$

Здесь  $y^0(K_n^\alpha)$  – неопорные компоненты решения задачи (3.1) при  $x \in S_{K_{op}^\alpha}, \alpha = \overline{1, \tau}$ .

*Доказательство.* Действительно, для итерации алгоритма возможны следующие варианты последовательности шагов: а) 1; б) 1–3; в) 1–3, (4,5)+; г) 1–3, (4,5)+, (6,7,8)+; д) 1–3, (4,5)+, (6, (7,8)+)+. В случае а) определяется, что  $\forall x \in X, Y(x) = \emptyset$ . В остальных случаях для каждого параметра  $x \in X$ , при котором  $Y(x) \neq \emptyset$  алгоритм строит  $Y(x)$  (т. е. решает систему линейных уравнений  $Ax + By = b$  в параллелепипеде  $g_* \leq y \leq g^*$ ). Конечность алгоритма следует из конечности числа итерации решения задач (2.1), (2.2), (3.1), а также из конечности опор  $K_{op} \in K_{op}^p$  (не более  $C_l^m = [(l)!]/[m!(l-m)!]$ ) для построения областей  $S_{K_{op}}$ . Согласно [7; 8], если оптимальная опора невырождена, т. е.  $g_{*k} < y_k < g_k^*, k \in K_{op}$ , то она единственна. Следовательно на области  $S_{K_{op}}$  задача (3.2) обладает свойством: для любой внутренней точки  $x$  области  $S_{K_{op}}$  опора  $K_{op}$  остается оптимальной опорой задачи (3.2), а для граничных точек этой области могут быть и другие оптимальные опоры  $K_{op}^*$  [7; 15]. Таким образом, две области  $S_{K_{op}^i}, S_{K_{op}^j}, i \neq j$ , соответствующие двум оптимальным опорам задачи (3.2), могут иметь только общие границы. В этом случае опоры  $K_{op}^i, K_{op}^j$  отличаются на один элемент.

Теперь докажем, что  $S$  выпукло. Действительно, пусть  $x^i \in S, i = \overline{1, 2}$ . Покажем, что  $\forall \lambda \in [0, 1], x(\lambda) = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in S$ . Поскольку  $Y(x^i) \neq \emptyset, i = \overline{1, 2}$ , то  $\exists y^1, y^2, g_* \leq y^1 \leq g^*, Ax^1 + By^1 = b, g_* \leq y^2 \leq g^*, Ax^2 + By^2 = b$ . Отсюда имеем  $g_* \leq \lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2 \leq g^*, Ax(\lambda) + B(\lambda y^1 + (1 - \lambda)y^2) = b$ , который означает, что  $x(\lambda) \in S$ . Путем подстановки убеждаемся, что  $y$ , определенная по (3.2), является решением системы (3.1) при  $x \in S_{K_{op}^\alpha}, \alpha = \overline{1, \tau}$ .  $\square$

**Замечание 1.** Множества  $S_{K_{op}^j}, S_{K_{op}^j}, i \neq j, i, j = \overline{1, \tau}$  могут иметь общие границы, а для внутренних точек являются непересекающимися.

Обозначим через  $Y^\alpha(x)$  множества решений системы (3.1), построенные по формуле (3.2) при  $x \in S_{K_{op}^\alpha}, \alpha = \overline{1, \tau}$ .

**Замечание 2.** Для внутренних точек множества

$$S_{K_{op}^j}, S_{K_{op}^j}, i \neq j, i, j = \overline{1, \tau}$$

множества  $Y^i(x), Y^j(x)$  являются непересекающимися.

**Замечание 3.** Справедливо условие  $Y(x) = \cup_{\alpha=1}^{\tau} Y^\alpha(x), x \in S$ .

**Замечание 4.** Представленный алгоритм пока не имеет инструментов борьбы с появлением избыточных ограничений.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу при следующих значениях параметров:

$$l = 5, f_* = (-12; -22)', f^* = (3; 5)',$$

$$g_* = (0; 0; 0; 0; 0)', g^* = (6; 6; 100; 100; 100)',$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = (4; 10; 2)'.$$

Применяя описанный алгоритм, определяем:

$$K_{op}^1 = \{1, 2, 3\}, S_{K_{op}^1} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq 6 - x_1/2 - 3x_2/2 \leq 6; -12 \leq x_1 \leq 3; \\ 0 \leq 4 + 3x_1/2 - x_2/2 \leq 6; 0 \leq 6 - 3x_1 \leq 100; -22 \leq x_2 \leq 5\}.$$

$$\text{Для } x \in S_{K_{op}^1}, y_1 = 6 - x_1/2 - 3x_2/2; y_2 = 4 + 3x_1/2 - x_2/2; y_3 = \\ = 6 - 3x_1, y_4 = 0, y_5 = 0.$$

$$K_{op}^2 = \{2, 3, 4\}, S_{K_{op}^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq 4 + 2x_1 + x_2 \leq 6; 0 \leq 6 - 3x_1 \leq 100; \\ 0 \leq -x_1 - 3x_2 \leq 100; -12 \leq x_1 \leq 3; -22 \leq x_2 \leq 5\}.$$

$$\text{Для } x \in S_{K_{op}^2}, y_1 = 6; y_2 = 4 + 2x_1 + x_2, y_3 = 6 - 3x_1, y_4 = -x_1 - 3x_2, y_5 = 0;$$

$$K_{op}^3 = \{1, 3, 5\}, S_{K_{op}^3} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq 10 + x_1 - 2x_2 \leq 6; 0 \leq 14 - x_2 \leq 100; \\ 0 \leq -8 - 3x_1 + x_2 \leq 100; -12 \leq x_1 \leq 3; -22 \leq x_2 \leq 5\}.$$

$$\text{Для } x \in S_{K_{op}^3}, y_1 = 10 + x_1 - 2x_2; y_2 = 0; y_3 = 14 - x_2, y_4 = 0, y_5 = \\ = -8 - 3x_1 + x_2.$$

$$K_{op}^4 = \{1, 3, 4\}, S_{K_{op}^4} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq 8 - 2x_1 - x_2 \leq 6; 0 \leq 6 - 3x_1 \leq 100;$$

$$0 \leq -4 + 3x_1 - x_2 \leq 100; -12 \leq x_1 \leq 3; -22 \leq x_2 \leq 5\}.$$

Для  $x \in S_{K_{op}^4}$ ,  $y_1 = 8 - 2x_1 - x_2$ ;  $y_2 = 6$ ;  $y_3 = 6 - 3x_1$ ,  $y_5 = 0$ ,  $y_4 = -4 + 3x_1 - x_2$ .

$$K_{op}^5 = \{3, 4, 5\}, S_{K_{op}^5} = \{x \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq 10 - x_1 + x_2 \leq 100; -12 \leq x_1 \leq 3;$$

$$0 \leq 4 + x_1 - 2x_2 \leq 100; 0 \leq -4 - 2x_1 - x_2 \leq 100; -22 \leq x_2 \leq 5\}.$$

Для  $x \in S_{K_{op}^5}$ ,  $y_1 = 6$ ;  $y_2 = 0$ ;  $y_3 = 10 - x_1 + x_2$ ,  $y_4 = 4 + x_1 - 2x_2$ ,  $y_5 = -4 - 2x_1 - x_2$ ;

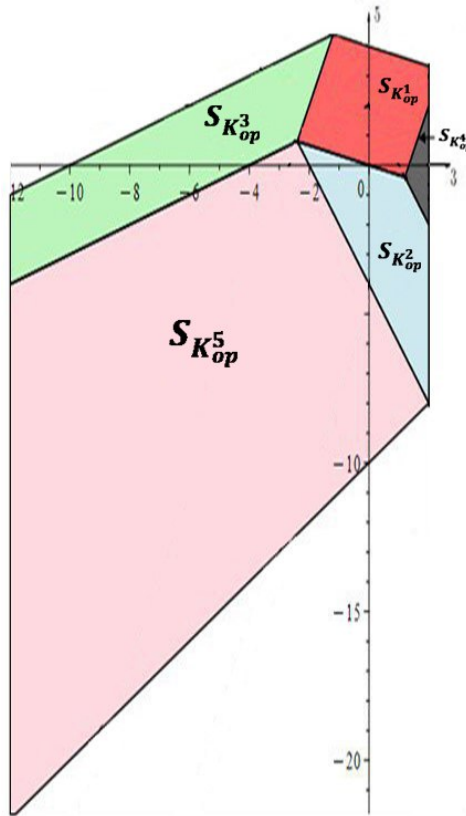


Рис. 1.

На рисунке приведены области  $S_{K_{op}^i}$ ,  $i = \overline{1, 5}$ .

#### 4. Заключение

Предложен и обоснован алгоритм построения решений в параллелепипеде системы линейных уравнений, зависящей от параметра, заданного в прямоугольнике. Алгоритм основан на решении не более трех задач линейного программирования и построении конечного числа закрытых выпуклых многогранников, при параметрах из которых системы линейных уравнений имеют решения. Для построения соседней области к границе некоторого закрытого выпуклого многогранника используется теория двойственности линейного программирования. Результаты работы могут служить инструментами решения определенного класса задач, связанных с теорией игр (исследование игр двух лиц) [1; 16] и с теорией линейных управляемых систем (построение информационных множеств и множеств достижимости) [2; 18].

Выражаю благодарность рецензенту за ценные советы и замечания, способствующие улучшению качества статьи.

#### Список источников

1. Азизов И. Алгоритм вычисления  $\epsilon$ -оптимального решения линейной максимальной задачи со связанными переменными // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1986. № 1. С. 14–18.
2. Бушенков В. А., Лотов А. В. Методы и алгоритмы анализа линейных систем на основе построения обобщенных множеств достижимости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20, № 5. С. 1130–1141.
3. Бушенков В. А. Итерационный метод построения ортогональных проекций выпуклых многогранных множеств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25, № 9. С. 1285–1292.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы оптимизации. Минск : Изд-во БГУ, 1981. 350 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Минск : Университетское, 1984. 214 с.
6. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, В. М. Ракецкий. Минск : Университетское, 1987. 223 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А. Метод построения локальных точек равновесия по Нэшу в линейной игровой задаче // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 9. С. 912–917.
8. Методы оптимизации / Р. Габасов [и др.]. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
9. Голиков А. И., Евтушенко Ю. Г., Капорин И. Е. Метод Ньютоновского типа для решения систем линейных уравнений и неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 12. С. 2086–2101.
10. Ерохин В. И., Тамасян Г. Ш., Степенко Н. А. Ускоренный фейеровский процесс поиска неотрицательного решения системы линейных алгебраических

- уравнений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31, № 3. С. 121–137.
11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М. : Наука, 1968. 431 с.
  12. Лукацкий А. М., Шапот Д. В. Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 7. С. 1167–1180.
  13. Маматов А. Р. Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1784–1789.
  14. Mamatov A. R. Algorithm for Solving the Problem of the First Phase in a Game Problem with Arbitrary Situations // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 48, С. 3–20. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.3>
  15. Маматов А. Р. Необходимые условия оптимальности “высокого порядка” в линейной максиминной задаче со связанными переменными // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 1017–1022.
  16. Маматов А. Р. Алгоритм решения линейной максиминной задачи со связанными переменными // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 6. С. 1044–1047.
  17. Севостьянов Е. Н., Лепчинский М. Г. Алгоритм нахождения неотрицательного решения системы линейных уравнений // Челябинский физико-математический журнал. 2016. Т. 1, вып. 2. С. 68–77.
  18. Уханов М. В., Ширяев В. И. Алгоритмы построения информационных множеств для реализации минимаксного фильтра // Вестник ЮуРГУ. 2002. № 3. С. 19–33.
  19. Черников С. Н. Линейные неравенства. М. : Наука, 1968. 488 р.
  20. Черникова Н. В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 4. С. 733–738.
  21. Черникова Н. В. Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 2. С. 334–337.
  22. Burger E. Über homogene lineare Ungleichungssysteme // Z. Angew. Math. Und Mech. 1956. Vol. 36, N 3/4. P. 135–139.
  23. Motzkin T. S., Schoenberg G. J. The relaxation method for linear inequalities // Canad. J. Math. 1954. Vol. 6. P. 393–404. <https://sci-hub.ru/10.4153/cjm-1954-038-x>
  24. Sherman J., Morrison W. J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix // The Annals of Mathematical Statistics. 1950. Vol. 21, N 1. P. 124–127.

## References

1. Azizov I. Algorithm for calculating the  $\epsilon$  - optimal solution of a linear maximin problem with connected variables. *Vesti Academy of Sciences of the BSSR. Ser. fiz.-mat. nauk*, 1986, no. 1, pp. 14–18. (in Russian)
2. Bushenkov V.A., Lotov A.V. Methods and algorithms for analysis of linear systems of the construction of generalized attainability sets. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1980, vol. 20, no. 5, pp. 38–49.

3. Bushenkov V.A. An iterative method of construction of orthogonal projections of convex polyhedral sets. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, no. 5, pp. 1–5.
4. Gabasov R., Kirillova F.M. *Optimization methods*. Minsk, Publishing house BGU, 1981, 350 p. (in Russian)
5. Gabasov R., Kirillova F.M., Tyatyushkin A.I. *Constructive Optimization Methods, Part 1: Linear Problems*. Minsk, Universitetskoe Publ., 1984, 214 p. (in Russian)
6. Gabasov R. et al. *Constructive Optimization Methods, Part 4: Convex problems*. Minsk, Universitetskoe Publ., 1987, 223 p. (in Russian)
7. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostina E.A. A method for constructing the local points of the Nash equilibrium in a linear game problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1998, vol. 38, no. 6, pp. 875–880.
8. Gabasov R. et al. *Optimization methods*. Minsk, Four quarters Publ., 2011, 472 p. (in Russian)
9. Golikov A.I., Evtushenko Yu.G., Kaporin I.E. Newton-Type Method for Solving Systems of Linear Equations and Inequalities. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 12, pp. 2017–2032. doi.org/10.1134/S0965542519120091
10. Erokhin V.I., Tamasyan G.Sh., Stepenko N.A. An accelerated Fej'er-type process for finding a negative solution to a system of linear algebraic equations. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2025, vol. 31, no. 3, pp. 121–137. doi: 10.21538/0134-4889-2025-31-3-fon-05. (in Russian).
11. Kurosh A.G. *Higher algebra course*. Moscow, Nauka Publ., 1968, 431 p. (in Russian)
12. Lukatskii A.M., Shapot D.V. A constructive algorithm for folding large-scale systems of linear inequalities. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, no. 7, pp. 1100–1112.
13. Mamatov A.R. An Algorithm for Solving a Two-Person Game with Information Transfer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 10, pp. 1784–1789. <https://doi.org/10.1134/S0965542506100071>
14. Mamatov A.R. Algorithm for Solving the Problem of the First Phase in a Game Problem with Arbitrary Situations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 48, pp. 3–20. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.48.3>
15. Mamatov A.R. High-Order Necessary Optimality Conditions in a Linear Maxmin Problem with Coupled Variables. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 1017–1022. <https://doi.org/10.1134/S0965542510060047>
16. Mamatov A.R. An Algorithm for Solving a Linear Max-min Problem with Coupled Variables. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 6, pp. 1006–1010.
17. Sevostyanov Y.N., Leptchinski M.G. Algorithm for finding of a non-negative solution for linear system of equations. *Chelyabinskiiy Fiziko-Matematicheskiiy Zhurnal*, 2016, vol. 1, iss. 2, pp. 68–77. (in Russian)
18. Ukhanov M.V., Shiryaev V.I. Algorithms for constructing information sets for implementing a minimax filter. *Bulletin of the South Ural State University*, 2002, no. 3, pp. 19–33. (in Russian)
19. Chernikov S.N. *Linear inequalities*. Moscow, Nauka Publ., 1968, 431 p. (in Russian)
20. Chernikova N.V. Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of a system of linear equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, no. 4, pp. 151–158. doi.org/10.1016/0041-5553(64)90009-6

21. Chernikova N.V. Algorithm for finding a general formula for the non-negative solutions of a system of linear inequalities. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 2, pp. 228–233. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(65\)90045-5](https://doi.org/10.1016/0041-5553(65)90045-5)
22. Burger E. Über homogene lineare Ungleichungssysteme. *Z. Angew. Math. Und Mech.*, 1956, vol. 36, no. 3/4, pp. 135–139.
23. Motzkin T.S., Schoenberg G.J. The relaxation method for linear inequalities. *Canad. J. Math.*, 1954, vol. 6, pp.393–404. <https://sci-hub.ru/10.4153/cjm-1954-038-x>
24. Sherman J., Morrison W.J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1950, vol. 21, no. 1, pp. 124–127.

### Об авторах

**Маматов Акмал Равшанович**,  
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.,  
Самаркандский государственный  
университет им. Ш. Рашидова,  
Самарканд, 140104, Узбекистан,  
[akmm1964@rambler.ru](mailto:akmm1964@rambler.ru),  
[akmalm1964@gmail.com](mailto:akmalm1964@gmail.com),  
<https://orcid.org/0000-0002-0610-7015>

### About the authors

**Akmal R. Mamatov**, Cand. Sci.  
(Phys.-Math.), Senior Research  
Scientist, Samarkand State University  
named after Sh. Rashidov,  
Samarkand, 140104, Uzbekistan,  
[akmm1964@rambler.ru](mailto:akmm1964@rambler.ru),  
[akmalm1964@gmail.com](mailto:akmalm1964@gmail.com),  
<https://orcid.org/0000-0002-0610-7015>

*Поступила в редакцию / Received 26.07.2025*

*Поступила после рецензирования / Revised 09.12.2025*

*Принята к публикации / Accepted 15.12.2025*