Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 80—93

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.716.32, 517.518.244, 512.563
MSC 06E30, 26B25, 03B50
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.80

Об установлении порядка гладкости минимального вогнутого продолжения вещественной дискретной функции, заданной на вершинах параллелепипеда

Д. Н. Баротов[1]✉

[1] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Российская Федерация
✉ DNBarotov@fa.ru

Аннотация: Изучается порядок дифференцируемости минимального вогнутого продолжения на n-мерный координатный параллелепипед вещественной дискретной функции, заданной на вершинах этого произвольного n-мерного координатного параллелепипеда. Устанавливается порядок дифференцируемости минимального вогнутого продолжения на n-мерный координатный параллелепипед вещественной дискретной функции, заданной на вершинах этого произвольного n-мерного координатного параллелепипеда, а именно, доказывается, что если заданная вещественная дискретная функция представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных, то её минимальное вогнутое продолжение является линейным и, следовательно, бесконечно дифференцируемым на n-мерном координатном параллелепипеде, а если она не представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных, то её минимальное вогнутое продолжение на n-мерном координатном параллелепипеде является только лишь непрерывным.

Ключевые слова: порядок гладкости функции, минимальное вогнутое продолжение дискретной функции, булевоподобная функция

Ссылка для цитирования: Баротов Д. Н. Об установлении порядка гладкости минимального вогнутого продолжения вещественной дискретной функции, заданной на вершинах параллелепипеда // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 80–93.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.80

Research article

On the Establishment of the Order of Smoothness of the Minimal Concave Continuation of a Real Discrete Function Defined on the Vertices of a Parallelepiped

Dostonjon N. Barotov[1]✉

[1] Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation
✉ DNBarotov@fa.ru

Abstract: In this paper, we study the order of differentiability of the minimal concave continuation to an n-dimensional coordinate parallelepiped of a real discrete function defined on the vertices of this arbitrary n-dimensional coordinate parallelepiped. As a result of the study, the order of differentiability of the minimal concave continuation to an n-dimensional coordinate parallelepiped of a real discrete function defined on the vertices of this arbitrary n-dimensional coordinate parallelepiped is established, namely, it is proved that if a given real discrete function can be represented as a linear combination of its discrete variables, then its minimal concave continuation is linear and, therefore, infinitely differentiable on an n-dimensional coordinate parallelepiped, and if it cannot be represented as a linear combination of its discrete variables, then its minimal concave continuation on an n-dimensional coordinate parallelepiped is only continuous.

Keywords: order of smoothness of a function, minimal concave continuation of a discrete function, Boolean-like function

For citation: Barotov D. N. On the Establishment of the Order of Smoothness of the Minimal Concave Continuation of a Real Discrete Function Defined on the Vertices of a Parallelepiped. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 80–93. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.80

1. Введение

Известно, что системы булевых уравнений используются во многих областях современной науки, включая криптографию, кибернетику, теорию кодирования, логическое проектирование, биологию, грамматику, химию, юриспруденцию, медицину, спектроскопию и теорию графов, и по этой причине, помимо прочего, они являются важным и увлекательным объектом исследований в математике, информатике и многих других науках [7–9; 15]. Поэтому системам булевых уравнений посвящено значительное количество важных работ [4; 7; 8; 12; 16; 17], но, несмотря на это, задача решения системы булевых уравнений в общем случае остается NP-трудной, и в связи с этим в настоящее время в научном сообществе продолжает расти интерес к поиску новых алгоритмов её решения в различных направлениях, как в классических, так и в квантовых моделях вычислений [5; 10; 11; 17; 18]. Учитывая, что вещественные продолжения булевых функций имеют приложения при решении систем булевых уравнений [6; 7; 13; 14], в [1–3] исследованы вопросы существования, построения и свойств выпуклых, полилинейных и вогнутых продолжений произвольных булевых и подобных им вещественных дискретных функций и получены некоторые фундаментальные результаты, имеющие приложения при сведении систем булевых уравнений к непрерывной задаче оптимизации [6; 13; 14; 18].

В данной работе, продолжая исследования по вышеупомянутой важной и увлекательной теме, изучается дифференцируемость функции $f_{NR}(x)$, недавно представленной в [1] и являющейся единственным минимумом среди всех вогнутых продолжений на n-мерный координатный параллелепипед $\mathbb{P}_c^d = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times ... \times [c_n, d_n]$ произвольной действительной дискретной функции $f_D(v)$, определенной на вершинах параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$. В результате исследования установлен порядок дифференцируемости функции $f_{NR}(x)$ на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$, а именно, доказано, что если действительная дискретная функция $f_D(v)$, определенная на вершинах $\mathbb{P}_c^d$, представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных, то её минимальное вогнутое продолжение $f_{NR}(x)$ на $\mathbb{P}_c^d$ является линейным и, следовательно, бесконечно дифференцируемым на $\mathbb{P}_c^d$, а если функция $f_D(v)$ не представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных, то минимальное вогнутое продолжение $f_{NR}(x)$ на $\mathbb{P}_c^d$ всего лишь непрерывно.

2. Необходимые обозначения и определения

Пусть $\mathbb{P}_c^d = \prod\limits_{k=1}^{n} [c_k, d_k]$ — n-мерный параллелепипед (координатный параллелепипед), зависящий от $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ и $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$, где $-\infty < c_i < d_i < +\infty, \quad i \in \{1, ..., n\}$, $V(\mathbb{P}_c^d) = \prod\limits_{k=1}^{n} \{c_k, d_k\}$ — множество вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$, $\mathrm{int}(\mathbb{P}_c^d) = \prod\limits_{k=1}^{n} (c_k, d_k)$ — множество внутренних точек параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$.

Пусть $\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Big\{ \big(\lambda_{(c_1,c_2,...,c_n)}, \lambda_{(c_1,c_2,...,d_n)}, ..., \lambda_{(d_1,d_2,...,d_n)}\big) \in [0,1]^{2^n} : \sum\limits_{(z_1,z_2,...,z_n) \in V(\mathbb{P}_c^d)} \lambda_{(z_1,z_2,...,z_n)} \cdot (z_1, z_2, ..., z_n, 1) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 1) \Big\}$ — множество весовых коэффициентов, используемых для представления точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде выпуклой комбинации вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$.

Определение 1. *Отображение вида $f : \mathbb{P}_c^d \to \mathbb{R}$ называется вогнутой функцией на $\mathbb{P}_c^d$, если для любых $x, y \in \mathbb{P}_c^d$ и любого $\alpha \in [0,1]$*

выполнено неравенство

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y) \geq \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y).$$

Определение 2. *Отображение вида* $f_C : \mathbb{P}_c^d \to \mathbb{R}$ *называется вогнутым продолжением на* $\mathbb{P}_c^d$ *дискретной функции вида* $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$, *если функция* f_C *на* $\mathbb{P}_c^d$ *вогнутая и имеет место равенство*

$$f_C(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f_D(v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \forall (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V(\mathbb{P}_c^d).$$

Определение 3. *Отображение вида* $f_{NR} : \mathbb{P}_c^d \to \mathbb{R}$ *называется минимумом среди всех вогнутых продолжений (или минимальным вогнутым продолжением) на* $\mathbb{P}_c^d$ *дискретной функции* $f_D : V(\mathbb{P}_c^d) \to \mathbb{R}$, *если оно является вогнутым продолжением на* $\mathbb{P}_c^d$ *дискретной функции* f_D *и для любого* f_C *— вогнутого продолжения на* $\mathbb{P}_c^d$ *дискретной функции* f_D *и любого* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{P}_c^d$ *имеет место неравенство*

$$f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq f_C(x_1, x_2, ..., x_n).$$

3. Порядок дифференцируемости минимального вогнутого продолжения на прямоугольник $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ произвольной дискретной функции вида $f_D : \{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\} \to \mathbb{R}$

Начнём изложение с двумерного случая и докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть даны* $\mathbb{P}_a^b = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, $V\left(\mathbb{P}_a^b\right) = \{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\}$, *где* $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $a_1 < a_2, b_1 < b_2$. *Тогда минимальное вогнутое продолжение* $f_{NR}(x_1, x_2)$ *на прямоугольник* $\mathbb{P}_a^b$ *произвольной действительной дискретной функции* $f_D(v_1, v_2)$, *определенной на множестве* $V\left(\mathbb{P}_a^b\right)$, *на прямоугольнике* $\mathbb{P}_a^b$ *является линейным, если выполняется*

$$f_D(a_1, b_1) - f_D(a_1, b_2) - f_D(a_2, b_1) + f_D(a_2, b_2) = 0, \tag{3.1}$$

и является всего лишь непрерывным, если не выполняется (3.1).

Доказательство. Согласно теореме 2, приведённой в [1], имеем, что

$$f_{NR}(x_1, x_2) = \max_{\left(\lambda_{(a_1,b_1)}, \ldots, \lambda_{(a_2,b_2)}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_a^b}(x_1,x_2)} \sum_{v \in V\left(\mathbb{P}_a^b\right)} \lambda_v f_D(v) \; \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{P}_a^b. \tag{3.2}$$

Сначала аргументируем, что в данном двумерном случае указанную выше функцию $f_{NR}(x_1, x_2)$ можно привести к явной аналитической форме, т. е. можно избавиться от max, а затем на основе полученной явной аналитической формы установим порядок дифференцируемости функции $f_{NR}(x_1, x_2)$, т. е. обоснуем справедливость приведённой выше теоремы.

Напомним, что, во-первых, при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ чтобы найти модуль разности двух величин α и β (расстояние между α и β), из большей α и β нужно вычесть меньшую α и β, а также сумма большей α и β и меньшей α и β, ввиду коммутативности сложения, равна $\alpha + \beta$, т. е. справедлива система

$$\begin{cases} \max(\alpha, \beta) - \min(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| \\ \max(\alpha, \beta) + \min(\alpha, \beta) = \alpha + \beta \end{cases}, \tag{3.3}$$

и во-вторых, справедливы следующие эквивалентности:

$$\gamma_i \leq \zeta_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., m\} \iff \max(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) \leq \min(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m),$$

$$\begin{cases} \eta_1 \leq x \leq \theta_1 \\ \eta_2 \leq x \leq \theta_2 \\ \dots \\ \eta_m \leq x \leq \theta_m \end{cases} \iff \max(\eta_1, \eta_1, ..., \eta_m) \leq x \leq \min(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m). \tag{3.4}$$

Решив систему (3.3) относительно $\min(\alpha, \beta)$ и $\max(\alpha, \beta)$, имеем

$$\min(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta - |\alpha - \beta|), \quad \max(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + |\alpha - \beta|). \tag{3.5}$$

Теперь пусть (x_1^*, x_2^*) — произвольная точка прямоугольника $\mathbb{P}_a^b$. Тогда, в силу (3.4) и (3.5) и определения множества $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1, x_2, ..., x_n)$, получаем цепочку равенств:

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_a^b}(x_1^*, x_2^*) = \Big\{ \lambda = \big(\lambda_{(a_1,b_1)}, \lambda_{(a_1,b_2)}, \lambda_{(a_2,b_1)}, \lambda_{(a_2,b_2)}\big) \in [0,1]^4 :$$

$$\lambda_{(a_1,b_1)} \cdot (a_1, b_1, 1) + \lambda_{(a_1,b_2)} \cdot (a_1, b_2, 1) + \lambda_{(a_2,b_1)} \cdot (a_2, b_1, 1) + \lambda_{(a_2,b_2)} \cdot (a_2, b_2, 1) =$$

$$= (x_1^*, x_2^*, 1) \Big\} = \Big\{ \lambda = \big(\lambda_{(a_1,b_1)}, \lambda_{(a_1,b_2)}, \lambda_{(a_2,b_1)}, \lambda_{(a_2,b_2)}\big) \in [0,1]^4 :$$

$$\begin{cases} \lambda_{(a_2,b_1)} + \lambda_{(a_2,b_2)} = \frac{x_1^* - a_1}{a_2 - a_1} \\ \lambda_{(a_1,b_2)} + \lambda_{(a_2,b_2)} = \frac{x_2^* - b_1}{b_2 - b_1} \\ \lambda_{(a_1,b_1)} + \lambda_{(a_1,b_2)} + \lambda_{(a_2,b_1)} + \lambda_{(a_2,b_2)} = 1 \end{cases} \Big\} =$$

$$= \Big\{ \lambda = \big(\lambda_{(a_1,b_1)}, \lambda_{(a_1,b_2)}, \lambda_{(a_2,b_1)}, \lambda_{(a_2,b_2)}\big) \in [0,1]^4 :$$

$$\left.\begin{cases}\lambda_{(a_2,b_1)} = \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \lambda_{(a_2,b_2)} \\ \lambda_{(a_1,b_2)} = \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - \lambda_{(a_2,b_2)} \\ \lambda_{(a_1,b_1)} = 1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} + \lambda_{(a_2,b_2)}\end{cases}\right\} =$$

$$= \left\{ \lambda = \left(1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} + \lambda_{(a_2,b_2)}, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \lambda_{(a_2,b_2)},\right.\right.$$

$$\left.\left.\lambda_{(a_2,b_2)}\right) : \quad \begin{cases} 0 \leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq 1 \\ \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - 1 \leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} \\ \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1 \leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} \\ \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1 \leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda = \left(1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} + \lambda_{(a_2,b_2)}, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \lambda_{(a_2,b_2)},\right.\right.$$

$$\left.\lambda_{(a_2,b_2)}\right) : \quad \max\left(0, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - 1, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1\right) \leq$$

$$\left.\leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq \min\left(1, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right)\right\} =$$

$$= \left\{ \lambda = \left(1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} + \lambda_{(a_2,b_2)},\right.\right.$$

$$\left.\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}, \lambda_{(a_2,b_2)}\right) :$$

$$\left.\max\left(0, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1\right) \leq \lambda_{(a_2,b_2)} \leq \min\left(\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right)\right\}. \tag{3.6}$$

В силу (3.2) и (3.6) получаем

$$f_{NR}(x_1^*, x_2^*) = \max_{\lambda_{(a_2,b_2)} \in \left[\max\left(0, \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - 1\right), \min\left(\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}, \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right)\right]} \Bigg[$$

$$\left[1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} + \lambda_{(a_2,b_2)}\right] f_D(a_1,b_1) + \left[\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}\right] \cdot$$

$$\left.\cdot f_D(a_1,b_2) + \left[\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \lambda_{(a_2,b_2)}\right] f_D(a_2,b_1) + \lambda_{(a_2,b_2)} f_D(a_2,b_2)\right] =$$

$$= \left[1 - \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} - \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right] f_D(a_1,b_1) + \frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1} f_D(a_1,b_2) + \frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1} \cdot$$

$$\cdot f_D(a_2,b_1)+\max_{\lambda_{(a_2,b_2)}\in\left[\max\left(0,\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right),\min\left(\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1},\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right)\right]}\Bigg[$$

$$(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot\lambda_{(a_2,b_2)}\Bigg]=$$

$$=\left[1-\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}-\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right]f_D(a_1,b_1)+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}f_D(a_1,b_2)+\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}\cdot$$

$$\cdot f_D(a_2,b_1)+\max\Bigg\{(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot$$

$$\cdot\max\left[0,\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right],(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-$$

$$-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot\min\left[\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1},\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right]\Bigg\},\qquad(3.7)$$

так как функция, равная $(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot\lambda_{(a_2,b_2)}$, линейна относительно $\lambda_{(a_2,b_2)}$ и, следовательно, её максимальное значение на всем отрезке равно её максимальному значению на границе отрезка. В силу (3.5) получаем

$$\max\Bigg\{(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot\max\left[0,\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right],(f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2))\cdot\min\left[\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1},\right.$$

$$\left.\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right]\Bigg\}=\frac{f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(\max\left[0,\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right]+\min\left[\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1},\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right]\right)+$$

$$+\frac{|f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)|}{2}\cdot$$

$$\cdot\left(-\max\left[0,\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right]+\min\left[\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1},\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right]\right)=$$

$$=\frac{f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)}{4}\cdot\left[2\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\right.$$

$$+2\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1+\left|\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right|-\left|\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}-\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right|\Bigg]-$$

$$-\frac{|f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)|}{4}\cdot$$

$$\cdot\left[\left|\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}-1\right|+\left|\frac{x_1^*-a_1}{a_2-a_1}-\frac{x_2^*-b_1}{b_2-b_1}\right|-1\right]. \qquad (3.8)$$

Итак, из (3.7) и (3.8), в силу произвольности $(x_1^*,x_2^*)\in\mathbb{P}_a^b$, получаем следующую явную аналитическую форму:

$$f_{NR}(x_1,x_2)=\left[1-\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}-\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}\right]f_D(a_1,b_1)+\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}f_D(a_1,b_2)+$$

$$+\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}f_D(a_2,b_1)+\frac{f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)}{4}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[2\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}+2\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}-1+\left|\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}+\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}-1\right|-\Bigg|\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}-$$

$$-\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}\Bigg|\Bigg]-\frac{|f_D(a_1,b_1)-f_D(a_1,b_2)-f_D(a_2,b_1)+f_D(a_2,b_2)|}{4}\cdot\Bigg[\Bigg|\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}+$$

$$+\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}-1\Bigg|+\left|\frac{x_1-a_1}{a_2-a_1}-\frac{x_2-b_1}{b_2-b_1}\right|-1\Bigg]\quad\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{P}_a^b. \qquad (3.9)$$

И наконец, благодаря (3.9) заметим, что функция $f_{NR}(x_1,x_2)$ на прямоугольнике $\mathbb{P}_a^b$ непрерывна, во-первых, она на прямоугольнике $\mathbb{P}_a^b$ будет линейной и, следовательно, бесконечно дифференцируемой, если выполнено (3.1), а во-вторых, если не выполнено (3.1), то она в центральной точке прямоугольника $\mathbb{P}_a^b$ не будет дифференцируемой и, следовательно, на прямоугольнике $\mathbb{P}_a^b$ также не будет дифференцируемой. Теорема доказана. $\square$

4. Порядок дифференцируемости минимального вогнутого продолжения на n-мерный параллелепипед $\mathbb{P}_c^d$ произвольной дискретной функции вида $f_D : V\left(\mathbb{P}_c^d\right)\to\mathbb{R}$

Отметим, что, в силу компактности $\mathbb{P}_c^d$, вогнутая функция, определенная на $\mathbb{P}_c^d$, вообще говоря, разрывна на $\mathbb{P}_c^d$. В качестве наглядного примера (аргумента) можно привести вещественную разрывную функцию

$$f_C(x_1,x_2,...,x_n)=\begin{cases}1, & \text{если } (x_1,x_2,...,x_n)\in\operatorname{int}(\mathbb{P}_c^d)\\ 0, & \text{если } (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{P}_c^d\setminus\operatorname{int}(\mathbb{P}_c^d)\end{cases},$$

которая также является вогнутым продолжением на $\mathbb{P}_c^d$ дискретной функции $f_D(v_1, v_2, ..., v_n) = 0$, заданной на множестве вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$, следовательно, вогнутое продолжение на $\mathbb{P}_c^d$ произвольной дискретной функции $f_D : V\left(\mathbb{P}_c^d\right) \to \mathbb{R}$, вообще говоря, разрывно на $\mathbb{P}_c^d$. Но минимальное вогнутое продолжение $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на $\mathbb{P}_c^d$ произвольной дискретной функции $f_D : V\left(\mathbb{P}_c^d\right) \to \mathbb{R}$ непрерывно на $\mathbb{P}_c^d$, что в случае $n \leq 2$ следует непосредственно из формулы (3.9), а в общем случае — из замечания 3, данного в [1], и что также нетрудно доказывается индукцией по числу переменных n. Далее установим порядок дифференцируемости функции $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на $\mathbb{P}_c^d$, т. е. докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если вещественная дискретная функция $f_D(v_1, v_2, ..., v_n)$, определенная на множестве $V\left(\mathbb{P}_c^d\right)$, может быть представлена в виде линейной комбинации своих дискретных переменных $v_1, v_2, ..., v_n$, то её минимальное вогнутое продолжение $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множество $\mathbb{P}_c^d$ является линейным на множестве $\mathbb{P}_c^d$, в противном случае $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на множестве $\mathbb{P}_c^d$ является всего лишь непрерывным.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть заданная дискретная функция $f_D(v_1, v_2, ..., v_n)$ представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных $v_1, v_2, ..., v_n$, т. е. для некоторого набора чисел $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n$ имеет место представление

$$f_D(v_1, v_2, ..., v_n) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot v_1 + ... + \gamma_n \cdot v_n \quad \forall (v_1, v_2, ..., v_n) \in V\left(\mathbb{P}_c^d\right). \tag{4.1}$$

Тогда аргументируем, что для минимального вогнутого продолжения $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ справедливо следующее равенство:

$$f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot x_1 + ... + \gamma_n \cdot x_n \quad \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{P}_c^d, \tag{4.2}$$

и тем самым, в частности, доказываем, что минимальное вогнутое продолжение $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$ бесконечно дифференцируемо. Действительно, для каждого $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{P}_c^d$, в силу (4.1) и теоремы 2, приведённой в [1], имеем

$$f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n) = \max_{\lambda \in \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1, x_2, ..., x_n)} \sum_{v \in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v f_D(v) =$$

$$= \max_{\lambda \in \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1, x_2, ..., x_n)} \sum_{v \in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v \left(\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot v_k\right) =$$

$$= \max_{\lambda\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)} \left[\sum_{v\in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \gamma_0\cdot\lambda_v + \sum_{v\in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v\cdot\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot v_k\right] =$$

$$= \max_{\lambda\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)} \left[\gamma_0\cdot 1 + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\sum_{v\in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v\cdot v_k\right] =$$

$$= \max_{\lambda\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)} \left[\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot x_k\right] = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot x_k,$$

так как согласно определению непустого множества $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)$, где $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{P}_c^d$, для всякого $\lambda\in\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{P}_c^d}(x_1,x_2,...,x_n)$ имеют место равенства

$$\sum_{v\in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v = 1, \qquad \sum_{v\in V\left(\mathbb{P}_c^d\right)} \lambda_v\cdot v_k = x_k \quad \forall k\in\{1,2,...,n\}.$$

Случай 2. Пусть заданная дискретная функция $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$ не представима в виде линейной комбинации своих дискретных переменных $v_1,v_2,...,v_n$. Тогда, очевидно, следует, что $n\geq 2$. Случай $n=2$ уже был рассмотрен выше в теореме 1, и поэтому далее рассмотрим случай $n\geq 3$. В этом случае докажем, что на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$ порядок гладкости функции $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)$ равен нулю, т. е. непрерывная, согласно теореме 2 и замечанию 3, приведённым в [1], функция $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)$ на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$ не является дифференцируемой. От противного: пусть функция $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)$ на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$ является дифференцируемой. Тогда из нелинейности функции $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$ в силу теоремы 4, приведённой в [3], т. е. существования единственной полилинейной функции $f_P(x_1,x_2,...,x_n)$, на множестве $V\left(\mathbb{P}_c^d\right)$ совпадающей с дискретной функцией $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$, получаем, что $f_P(x_1,x_2,...,x_n)$ не является линейной функцией, т. е. существуют индексы $i,j\in\{1,2,...,n\}$, $i<j$, такие, что в полилинейной функции (полиноме) $f_P(x_1,x_2,...,x_n)$ найдется хотя бы один моном с ненулевым коэффициентом, содержащий произведение x_ix_j, так как в противном случае полилинейную функцию $f_P(x_1,x_2,...,x_n)$ можно представить в виде линейной комбинации своих переменных $x_1,x_2,...,x_n$ и, следовательно, в силу (4.1) и (4.2) получаем, что заданную дискретную функцию $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$ можно представить в виде линейной комбинации своих дискретных переменных $v_1,v_2,...,v_n$, т. е. возникает противоречие. Без потери общности будем считать, что $(i,j)=(1,2)$. С одной стороны, ввиду полилинейности функции $f_P(x_1,x_2,...,x_n)$ имеем, что сумма её мономов, содержащих произведение x_1x_2, равна $k(x_3,...,x_n)\cdot$

x_1x_2, где

$$k(x_3,...,x_n)=\sum_{(v_1,v_2)\in\{c_1,d_1\}\times\{c_2,d_2\}}\frac{f_P(x_1,x_2,...,x_n)\Big|_{(x_1,x_2)=(v_1,v_2)}}{(2v_1-c_1-d_1)(2v_2-c_2-d_2)},\quad(4.3)$$

а с другой стороны, ввиду полилинейности полинома $k(x_3,...,x_n)$ от остальных переменных $x_3,...,x_n$ и его отличия от нуля в некоторой точке $(n-2)$-мерного параллелепипеда $\prod_{k=3}^{n}[c_k,d_k]$ получаем, что

$$k(v_3^*,...,v_n^*)\neq 0 \quad(4.4)$$

для некоторой вершины $(v_3^*,...,v_n^*)\in\prod_{k=3}^{n}\{c_k,d_k\}$, так как в противном случае, если на множестве $\prod_{k=3}^{n}\{c_k,d_k\}$ полилинейный полином $k(x_3,...,x_n)$ принимает 0, то он на множестве $\prod_{k=3}^{n}[c_k,d_k]$ тождественно равен нулю, т. е. возникает противоречие. Теперь, с одной стороны, из дифференцируемости функции $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)$ на параллелепипеде $\mathbb{P}_c^d$ получаем, что суженная функция $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)\Big|_{(x_3,...,x_n)=(v_3^*,...,v_n^*)}$, зависящая от двух переменных x_1,x_2, дифференцируема на всем прямоугольнике $[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$, а с другой стороны, эта суженная действительная функция $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)\Big|_{(x_3,...,x_n)=(v_3^*,...,v_n^*)}$ является минимальным вогнутым продолжением на $[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$ суженной дискретной функции $f_D(v_1,v_2,...,v_n)\Big|_{(v_3,...,v_n)=(v_3^*,...,v_n^*)}$ двух дискретных переменных v_1,v_2, минимальное вогнутое продолжение которой на $[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$ в силу теоремы 1 и неравенства (4.4) на всем прямоугольнике $[c_1,d_1]\times[c_2,d_2]$ не является дифференцируемым. Получили противоречие. Теорема доказана. □

5. Заключение

В работе установлено, что в качестве порядка гладкости минимального вогнутого продолжения $f_{NR}(x_1,x_2,...,x_n)$ на n-мерный произвольный координатный параллелепипед $\mathbb{P}_c^d$ любой действительной дискретной функции $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$, определённой на множестве вершин параллелепипеда $\mathbb{P}_c^d$, реализуются всего лишь два случая, а именно, если действительная дискретная функция $f_D(v_1,v_2,...,v_n)$ может быть представлена в виде линейной комбинации своих дискретных переменных

$v_1, v_2, ..., v_n$, то действительная функция $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ линейна и, следовательно, бесконечно дифференцируема на всем $\mathbb{P}_c^d$, в противном случае действительная функция $f_{NR}(x_1, x_2, ..., x_n)$ на всем $\mathbb{P}_c^d$ только лишь непрерывна.

Следует отметить, что в силу «противонаправленности» понятий выпуклости и вогнутости, используя схемы в работе полученных результатов, можно получить аналогичные результаты для максимального выпуклого продолжения.

Автор искренне благодарит рецензентов за ценные замечания и нахождение ряда недостатков, исправление которых помогло значительно улучшить качество статьи.

Список источников

1. Баротов Д. Н. Вогнутые продолжения булевоподобных функций и некоторые их свойства // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 82–100. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82
2. Баротов Д. Н. О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций // Матем. заметки. 2024. Т. 115, № 4. С. 533–551. https://doi.org/10.4213/mzm14105
3. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения // Вычислительные методы и программирование. 2023. Т. 24. С. 10–23. https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r102
4. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. О числе решений системы булевых уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 150–168. https://doi.org/10.31857/S0005231021090063
5. Семенов А. А., Заикин О. С. Алгоритмы построения декомпозиционных множеств для крупноблочного распараллеливания SAT-задач // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2012. Т. 5, № 4. 79–94.
6. Файзуллин Р. Т., Дулькейт В. И., Огородников Ю. Ю. Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 285–294.
7. Abdel-Gawad A. H., Atiya A. F., Darwish N. M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain // Information Sciences. 2010. Vol. 180, N 2. P. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010
8. Bard G. V. Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis. University of Maryland, College Park, 2007.
9. Brown F. M. Boolean Reasoning: The logic of Boolean Equations. Boston : Kluwer Academic Publishers, 1990.
10. Burek E., Wroński M., Mańk K., Misztal M. Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing // IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing. 2022. Vol. 10, N 2. P. 678—689. https://doi.org/10.1109/TETC.2022.3143152
11. Chen Y. A., Gao X. S. Quantum algorithm for Boolean equation solving and quantum algebraic attack on cryptosystems // Journal of Systems Science and

Complexity. 2022. Vol. 35, N 1. P. 373–412. https://doi.org/10.1007/s11424-020-0028-6
12. Faugere J. C., Joux A. Algebraic cryptanalysis of hidden field equation (HFE) cryptosystems using Gröbner bases // Annual International Cryptology Conference. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2003. P. 44–60.
13. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 1994. Vol. 6, N 3. P. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864
14. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem // Journal of Computer Science and Technology. 1999. Vol. 14, N 1. P. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF02952482
15. Hammer P. L., Rudeanu S. Boolean Methods in Operations Research and Related Areas. Berlin : Springer Verlag, 1968.
16. Ishchukova E., Maro E., Pristalov P. Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12–2015 // Computation. 2020. Vol. 8, N 2. 51. https://doi.org/10.3390/computation8020051
17. Converting of Boolean Expression to Linear Equations, Inequalities and QUBO Penalties for Cryptanalysis / A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, G. B. Lesovik // Algorithms. 2022. Vol. 15, 33. https://doi.org/10.3390/a15020033
18. Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing / S. Ramos-Calderer, C. Bravo-Prieto, R. Lin, E. Bellini, M. Manzano, N. Aaraj, J. Latorre // Physical Review Research. 2022. Vol. 4, N 1. 013096. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013096

References

1. Barotov D.N. Concave Continuations of Boolean-like Functions and Some of Their Properties. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 82–100. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.82 (in Russian)
2. Barotov D.N. On the existence and properties of convex continuations of Boolean functions. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 115, no. 4, pp. 489–505. https://doi.org/10.1134/S0001434624030210
3. Barotov D.N., Barotov R.N. Polylinear Continuations of Some Discrete Functions and an Algorithm for Finding Them. *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie)*, 2023, vol. 24, pp. 10–23. https://doi.org/10.26089/NumMet.v24r102 (in Russian)
4. Leontiev V.K., Gordeev E.N. On the number of solutions to a system of Boolean equations. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, pp. 1581–1596. https://doi.org/10.1134/S000511792109006X
5. Semenov A.A., Zaikin O.S. Algorithms for constructing decomposition sets in application to coarse-grained parallelization of SAT problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 79–94. (in Russian)
6. Faizullin R.T., Dulkeit V.I., Ogorodnikov Yu.Yu. Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 285–294. (in Russian)
7. Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain. *Information Sciences*, 2010, vol. 180, no. 2, pp. 288–300. https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.09.010

8. Bard G.V. *Algorithms for solving linear and polynomial systems of equations over finite fields, with applications to cryptanalysis*. University of Maryland, College Park, 2007.
9. Brown F.M. *Boolean Reasoning: The logic of Boolean Equations*. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1990.
10. Burek E., Wronski M., Mank K., Misztal M. Algebraic attacks on block ciphers using quantum annealing. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computing*, 2022. vol. 10, no. 2, pp. 678–689. https://doi.org/10.1109/TETC.2022.3143152
11. Chen Y.A., Gao X.S. Quantum algorithm for Boolean equation solving and quantum algebraic attack on cryptosystems. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2022, vol. 35, no. 1, pp. 373–412. https://doi.org/10.1007/s11424-020-0028-6
12. Faugere J.C., Joux A. Algebraic cryptanalysis of hidden field equation (HFE) cryptosystems using Grobner bases. *Annual International Cryptology Conference*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 44–60.
13. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 1994, vol. 6, no. 3, pp. 361–381. https://doi.org/10.1109/69.334864
14. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem. *Journal of Computer Science and Technology*, 1999, vol. 14, no. 1, pp. 1–17. https://doi.org/10.1007/BF02952482
15. Hammer P.L., Rudeanu S. *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*. Berlin, Springer Verlag, 1968.
16. Ishchukova E., Maro E., Pristalov P. Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12–2015. *Computation*, 2020, vol. 8, no. 2, 51. https://doi.org/10.3390/computation8020051
17. Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B. Converting of Boolean Expression to Linear Equations, Inequalities and QUBO Penalties for Cryptanalysis. *Algorithms*, 2022, vol. 15, 33. https://doi.org/10.3390/a15020033
18. Ramos-Calderer S., Bravo-Prieto C., Lin R., Bellini E., Manzano M., Aaraj N., Latorre, J.I. Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing. *Physical Review Research*, 2022, vol. 4, no. 1, 013096. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.4.013096

Об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович, ст. преп., Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, 109456, Российская Федерация, DNBarotov@fa.ru, https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

About the authors

Dostonjon N. Barotov, Senior Lecturer, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, 109456, Russian Federation, DNBarotov@fa.ru, https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

Поступила в редакцию / Received 21.04.2025
Поступила после рецензирования / Revised 21.10.2025
Принята к публикации / Accepted 24.10.2025