Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 46—62

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.957
MSC 35P25, 35P30, 35Q51, 35Q53, 37K15
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.46

Система уравнений Каупа с нагруженным членом в классе периодических функций

А. Б. Яхшимуратов[1✉], **О. М. Матёкубов**[2]

[1] Университет Мамуна, Хива, Узбекистан
[2] Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан
✉ albaron@mail.ru

Аннотация: Рассматривается система нелинейных уравнений Каупа с нагруженным дополнительным членом в классе периодических функций по пространственной переменной. Доказана неизменяемость спектра и выведен аналог системы Дубровина для эволюции спектральных параметров квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля на всей прямой, периодические коэффициенты которой являются решением задачи Коши поставленной для нагруженной системы нелинейных уравнений Каупа. При помощи формул следов и аналога системы Дубровина показано, что нагруженную систему нелинейных уравнений Каупа можно интегрировать методом обратной спектральной задачи. Получен алгоритм решения задачи Коши для нагруженной нелинейной системы Каупа в классе периодических функций по пространственной переменной. Показано, что если начальные функции действительные аналитические функции, то и решение будет аналитической функцией по пространственной переменной. Выявлена $\frac{\pi}{2}$-периодичность решения по пространственной переменной при $\frac{\pi}{2}$-периодичности начальных функций.

Ключевые слова: система уравнений Каупа с нагруженным членом, квадратичный пучок уравнений Штурма – Лиувилля, спектральные данные, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формула следов

Ссылка для цитирования: Яхшимуратов А. Б., Матёкубов О. М. Система уравнений Каупа с нагруженным членом в классе периодических функций // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 46–62.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.46

Research article

System of Kaup Equations with a Loaded Term in the Class of Periodic Functions

Alisher B. Yakhshimuratov[1✉], **Ollabergan M. Matyokubov**[2]

[1] Mamun University, Khiva, Uzbekistan
[2] Urgench State University, Urgench, Uzbekistan
✉ albaron@mail.ru

Abstract: In this paper, a system of nonlinear Kaup equations with a loaded additional term in the class of periodic functions with respect to the spatial variable is considered. The invariance of the spectrum is proved and an analog of the Dubrovin system is derived for the evolution of the spectral parameters of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators on the entire line, the periodic coefficients of which are the solution of the Cauchy problem posed for the loaded system of nonlinear Kaup equations. Using trace formulas and an analog of the Dubrovin system, it is shown that the loaded system of nonlinear Kaup equations can be integrated by the inverse spectral problem method. An algorithm for solving the Cauchy problem for the loaded nonlinear Kaup's system in the class of periodic functions with respect to the spatial variable is obtained. It is shown that if the initial functions are real analytic functions, then the solution will also be an analytic function with respect to the spatial variable. The $\frac{\pi}{2}$-periodicity of the solution with respect to the spatial variable is revealed for the $\frac{\pi}{2}$-periodicity of the initial functions.

Keywords: Kaup's system of equations with a loaded term, quadratic pencil of Sturm-Liouville equations, spectral data, inverse spectral problem, Dubrovin's system of equations, trace formula

For citation: Yakhshimuratov A. B., Matyokubov O. M. System of Kaup Equations with a Loaded Term in the Class of Periodic Functions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 46–62. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.46

1. Введение

В работе [24] доказана полная интегрируемость следующей системы уравнений

$$\begin{cases} p_t = -6pp_x - q_x \\ q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x \end{cases},$$

которая описывает распространения волн на мелкой воде, а в [5; 27] изучены конечнозонные решения этой системы уравнений. Эту систему уравнений называют системой Каупа.

Систему Каупа можно рассматривать как условие совместности

$$y_{xxt} - y_{txx} \equiv [(q_t - p_{xxx} + 4qp_x + 2pq_x) + 2\lambda(p_t + 6pp_x + q_x)]y = 0$$

линейных уравнений $-y_{xx}+qy+2\lambda py-\lambda^2 y = 0$ и $y_t+2(p+\lambda)y_x-p_xy = 0$.

Первое из этих уравнений называется квадратичным пучком уравнений Штурма – Лиувилля.

В этой работе обратную спектральную задачу для квадратичного пучка уравнений Штурма – Лиувилля применяем для решения системы уравнений Каупа с нагруженным членом в классе периодических по x функций.

Обратная задача для квадратичного пучка уравнений Штурма – Лиувилля в различных классах функций изучена в работах [1; 2; 10; 11; 17; 19–23; 31].

Система Каупа и его аналоги высших порядков с самосогласованным источником в классе периодических по x функций были интегрированы в работах [12; 18; 30], а в классе быстроубывающих функций в работах [15; 16].

Нелинейные эволюционные уравнения с дополнительными нагруженными членами в классе периодических по x функций изучены в работах [4; 6–8; 13; 26; 28], а в классе быстроубывающих функций в работах [9; 25] методом обратной спектральной задачи. Некоторые нелинейные уравнения с источником в классе периодических по x функций изучены в работах [14; 29].

Мы рассмотрим следующую систему уравнений Каупа с нагруженным членом

$$\begin{cases} p_t = -6pp_x - q_x + \gamma(t) \cdot p|_{x=0} \cdot p_x \\ q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + \gamma(t) \cdot p|_{x=0} \cdot q_x, \end{cases} \tag{1.1}$$

в классе действительных, π-периодических по x функций $p = p(x,t)$ и $q = q(x,t)$, удовлетворяющих условиям гладкости

$$p \in C_x^3(t>0) \bigcap C_t^1(t>0) \bigcap C(t \geq 0), q \in C^1(t>0) \bigcap C(t \geq 0), \tag{1.2}$$

при начальных условиях

$$p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \qquad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x). \tag{1.3}$$

Здесь $\gamma(t)$ заданная, действительная, непрерывная, ограниченная функция, $p_0 \in C^3(R)$, $q_0 \in C^2(R)$ заданные действительные π-периодические функции, такие, что для всех функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, удовлетворяющих условиям $y'(0)\bar{y}(0) - y'(\pi)\bar{y}(\pi) = 0$ и $(y,y) = 1$, выполняется неравенство

$$(p_0 y, y)^2 + (q_0 y, y) + (y', y') > 0,$$

где $(\cdot\ ,\ \cdot)$ — скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$. Последнее условие будем называть условием (A).

Цель данной работы — дать процедуру построения решения $(p(x,t)$, $q(x,t))$ задачи (1.1)–(1.3) в рамках метода обратной спектральной задачи для квадратичного пучка уравнений Штурма – Лиувилля

$$T(\lambda,\tau,t)y \equiv -y'' + q(x+\tau,t)y + 2\lambda\, p(x+\tau,t)y - \lambda^2 y = 0, x \in R. \tag{1.4}$$

2. Прямая и обратная спектральная задачи для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля с периодическим потенциалом

Для полноты изложения приведем некоторые известные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [1; 11; 18]).

Рассмотрим квадратичный пучок уравнений Штурма – Лиувилля (1.4). Если $q \in L_2[0,\pi]$ и $p \in W_2^1[0,\pi]$ являются действительно-значными π-периодическими функциями по x и удовлетворяют условию (A), то спектр задачи (1.4) является действительным и совпадает с множеством

$$\sigma(T) = \{\lambda \in R| -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R \backslash \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}),$$

где $\Delta(\lambda) = c(\pi,\ \lambda, \tau, t) + s'(\pi,\ \lambda, \tau, t)$. Интервалы $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n \in Z$, называются лакунами. Нумерация вводится таким образом, чтобы $\lambda_{-1} < 0 < \lambda_0$. Здесь $c(x, \lambda, \tau, t)$ и $s(x, \lambda, \tau, t)$ — решения уравнения (1.4), удовлетворяющие начальным условиям $c(0, \lambda, \tau, t) = 1$, $c'(0, \lambda, \tau, t) = 0$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = 0$, $s'(0, \lambda, \tau, t) = 1$ соответственно.

Введем обозначение $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = sign\,\{s'(\pi, \xi_n, \tau, t) - c(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$, где $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$, — собственные значения задачи Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$ для уравнения (1.4). Нетрудно видеть, что числа ξ_n совпадают с нулями функции $s(\pi, \lambda, \tau, t)$ и выполняются включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Граничные точки спектра λ_n и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z\backslash\{0\}$ называют спектральными данными квадратичного пучка (1.4). Восстановление коэффициентов p и q по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для квадратичного пучка (1.4).

$\Delta(\lambda)$ не зависит от τ. Отсюда следует независимость от τ спектра квадратичного пучка (1.4).

Лемма 1. *Имеют место равенства:*

$$\frac{\partial s(\pi, \lambda, \tau, t)}{\partial \tau} = s'(\pi, \lambda, \tau, t) - c(\pi, \lambda, \tau, t), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial c'(\pi, \lambda, \tau, t)}{\partial \tau} = [\lambda^2 - q(\tau, t) - 2\lambda p(\tau, t)][s'(\pi, \lambda, \tau, t) - c(\pi, \lambda, \tau, t)], \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial [s'(\pi, \lambda, \tau, t) - c(\pi, \lambda, \tau, t)]}{\partial \tau} =$$

$$= -2[\lambda^2 - q(\tau, t) - 2\lambda p(\tau, t)] s(\pi, \lambda, \tau, t) - 2c'(\pi, \lambda, \tau, t). \tag{2.3}$$

Используя формулы (2.1), (2.2), (2.3) и разложение

$$s(\pi,\lambda,\tau,t)=\pi\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{k}, \tag{2.4}$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *1) если ξ_n не зависит от τ, то $\lambda_{2n-1}=\lambda_{2n}$;*

2) если $\left.\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=0$, то при $\tau=\tau_0$ выполняется $\xi_n=\lambda_{2n-1}$ или $\xi_n=\lambda_{2n}$;

3) если $\lambda_{2n-1}<\lambda_{2n}$, то ξ_n при изменении $\tau\in R$ заметает всю лакуну $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$.

Подставляя выражение (2.4) в (2.1), имеем

$$\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}\cdot\prod_{k\neq n,0}\frac{\xi_k-\xi_n}{k}=s'(\pi,\xi_n,\tau,t)-c(\pi,\xi_n,\tau,t). \tag{2.5}$$

Из тождества

$$[s'(\pi,\lambda,\tau,t)-c(\pi,\lambda,\tau,t)]^2=(\Delta^2(\lambda)-4)-4c'(\pi,\lambda,\tau,t)s(\pi,\lambda,\tau,t)$$

следует, что

$$s'(\pi,\xi_n,\tau,t)-c(\pi,\xi_n,\tau,t)=\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}. \tag{2.6}$$

Из (2.5), (2.6) и следующих равенств

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_{-1})(\lambda-\lambda_0)\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_{2k-1})(\lambda-\lambda_{2k})}{k^2}, \tag{2.7}$$

$$sign\left\{\frac{\pi}{n}\prod_{k\neq n,0}\frac{\xi_k-\xi_n}{k}\right\}=(-1)^{n-1}sign(n) \tag{2.8}$$

выводим систему уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}sign(n)\cdot\sigma_n\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot h_n(\xi),\ n\in Z\backslash\{0\}, \tag{2.9}$$

где

$$h_n(\xi)=\sqrt{(\xi_n-\lambda_{-1})(\xi_n-\lambda_0)\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\lambda_{2k})}{(\xi_n-\xi_k)^2}},$$

$$\xi=(...,\xi_{-1},\ \xi_1,\ ...).$$

Система уравнений Дубровина (2.9) и следующие формулы первого и второго следов

$$p(\tau,t)=\frac{\lambda_{-1}+\lambda_0}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k\right), \tag{2.10}$$

$$q(\tau,t)+2p^2(\tau,t)=\frac{(\lambda_{-1})^2+(\lambda_0)^2}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_{2k-1})^2+(\lambda_{2k})^2}{2}-\xi_k^2\right) \tag{2.11}$$

дают метод решения обратной задачи.

3. Эволюция спектральных данных и алгоритм решения задачи (1.1)–(1.3)

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $(p(x,t),\ q(x,t))$ является решением задачи* (1.1)–(1.3). *Тогда спектр квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля* (1.4) *с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$ не зависит от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z\backslash\{0\}$, зависят от τ и t и удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)sign(n)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times h_n(\xi)\times\{2p(\tau,t)+2\xi_n-\gamma(t)p(0,t)\}\,,n\in Z\backslash\{0\}. \tag{3.1}$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки ξ_n с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),n\in Z\backslash\{0\}, \tag{3.2}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ — спектральные параметры квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $y_n=y_n(x,\tau,t)$, $n\in Z\backslash\{0\}$, нормированные собственные функции задачи Дирихле на отрезке $[0,\ \pi]$ для квадратичного пучка уравнений Штурма – Лиувилля (1.4), соответствующие собственным значениям ξ_n, $n\in Z\backslash\{0\}$.

Дифференцируя тождество

$$-(y_n'',y_n)+(qy_n,y_n)+2\xi_n(py_n,y_n)-\xi_n^2=0$$

по t, имеем

$$-(\dot{y}_n'', y_n) - (y_n'', \dot{y}_n) + (q_t y_n + q\dot{y}_n, y_n) + (q y_n, \dot{y}_n) +$$

$$+2\dot{\xi}_n (p y_n, y_n) + 2\xi_n (p_t y_n + p\dot{y}_n, y_n) + 2\xi_n (p y_n, \dot{y}_n) - 2\xi_n \dot{\xi}_n = 0.$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\left(-\dot{y}_n'' + q\dot{y}_n + 2\xi_n p\dot{y}_n, y_n\right) + \left(-y_n'' + q y_n + 2\xi_n p y_n, \dot{y}_n\right) +$$

$$+ (q_t y_n + 2\xi_n p_t y_n, y_n) + 2\dot{\xi}_n (p y_n, y_n) - 2\xi_n \dot{\xi}_n = 0. \quad (3.3)$$

Учитывая равенства

$$\left(\dot{y}_n'' + q\dot{y}_n + 2\xi_n p\dot{y}_n, y_n\right) = (y_n' \dot{y}_n - y_n \dot{y}_n')\Big|_0^\pi + \left(\dot{y}_n,\ -y_n'' + q y_n + 2\xi_n p y_n\right),$$

$$\left(-y_n'' + q y_n + 2\xi_n p y_n, \dot{y}_n\right) = (\xi_n^2 y_n, \dot{y}_n) = \xi_n^2 (y_n, \dot{y}_n) = 0,$$

из (3.3) выводим, что $2\dot{\xi}_n[\xi_n - (p y_n, y_n)] = (q_t y_n + 2\xi_n p_t y_n, y_n)$, т. е.

$$2\dot{\xi}_n \left(\xi_n - \int_0^\pi p y_n^2 dx\right) = \int_0^\pi (q_t + 2\xi_n p_t) y_n^2 dx. \quad (3.4)$$

Здесь мы использовали скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$. Используя выражения

$$p_t(x+\tau,t) = -6p(x+\tau,t)p_x(x+\tau,t) - q_x(x+\tau,t) + \gamma(t)p(0,t)p_x(x+\tau,t),$$

$$q_t(x+\tau,t) = p_{xxx}(x+\tau,t) - 4q(x+\tau,t)p_x(x+\tau,t) -$$

$$-2p(x+\tau,t)q_x(x+\tau,t) + \gamma(t)p(0,t)q_x(x+\tau,t),$$

тождество (3.4) напишем в следующем виде:

$$2\dot{\xi}_n \left(\xi_n - \int_0^\pi p y_n^2 dx\right) = \int_0^\pi \{p_{xxx} - 4q p_x - 2p q_x + \gamma(t)p(0,t)q_x +$$

$$+2\xi_n[-6p p_x - q_x + \gamma(t)p(0,t)p_x]\} y_n^2 dx. \quad (3.5)$$

Чтобы вычислить интеграл в правой части этого равенства, первообразную подынтегральной функции ищем в виде квадратичной формы относительно y_n и y_n', т. е.

$$\{a y_n^2 + b y_n y_n' + c {y'}_n^2\}' =$$

$$= \{p_{xxx} - 4q p_x - 2p q_x + \gamma(t)p(0,t)q_x + 2\xi_n[-6p p_x - q_x + \gamma(t)p(0,t)p_x]\} y_n^2. \quad (3.6)$$

Здесь коэффициенты $a = a(x,\tau,t,\xi_n)$, $b = b(x,\tau,t,\xi_n)$, $c = c(x,\tau,t,\xi_n)$ не зависят от y_n и y_n'. Вычислив производные левой части равенства (3.6) и используя тождество $y_n'' = [q + 2p\xi_n - \xi_n^2] y_n$, находим, что

$$(a' + bq + 2bp\xi_n - b\xi_n^2) y_n^2 + (2a + b' + 2cq + 4pc\xi_n - 2c\xi_n^2) y_n {y'}_n + (b + c') {y'}_n^2 =$$

$= \{p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + \gamma(t)p(0,t)q_x + 2\xi_n[-6pp_x - q_x + \gamma(t)p(0,t)p_x]\}y_n^2$.

Отсюда получим равенства

$$b = -c', a = \frac{1}{2}c'' + c \cdot (\xi_n^2 - 2p\xi_n - q),$$

$$p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + \gamma(t)p(0,t)q_x + 2\xi_n[-6pp_x - q_x + \gamma(t)p(0,t)p_x] =$$
$$= \frac{1}{2}c''' + 2c' \cdot (\xi_n^2 - 2p\xi_n - q) - c \cdot (2p'\xi_n + q'). \tag{3.7}$$

Левая часть равенства (3.7) является линейной функцией относительно ξ_n, поэтому правая часть также должна быть линейной относительно ξ_n. Функцию $c(x,\tau,t,\xi_n)$ будем искать в виде

$$c(x,\tau,t,\xi_n) = c_0(x,\tau,t)\xi_n + c_1(x,\tau,t).$$

Подставляя это выражение в тождество (3.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ_n, получим равенства

$$c_0(x,\tau,t) = 2, c_1(x,\tau,t) = 2p(x+\tau,t) - \gamma(t)p(0,t),$$

т. е. $c(x,\tau,t,\xi_n) = 2\xi_n + 2p(x+\tau,t) - \gamma(t)p(0,t)$. Значит,

$$\int_0^\pi \{p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + \gamma(t)p(0,t)q_x +$$
$$+2\xi_n[-6pp_x - q_x + \gamma(t)p(0,t)p_x]\}y_n^2 dx =$$
$$= \left\{ay_n^2 + by_n y'_n + cy'^2_n\right\}\Big|_0^\pi = c(\pi,\tau,t,\xi_n)y'^2_n(\pi,\tau,t) - c(0,\tau,t,\xi_n)y'^2_n(0,\tau,t) =$$
$$= \{2\xi_n + 2p(\tau,t) - \gamma(t)p(0,t)\}[y'^2_n(\pi,\tau,t) - y'^2_n(0,\tau,t)]. \tag{3.8}$$

Из формул (3.5) и (3.8) следует, что

$$2\dot{\xi}_n\left(\xi_n - \int_0^\pi py_n^2 dx\right) = \{2\xi_n + 2p(\tau,t) - \gamma(t)p(0,t)\}[y'^2_n(\pi,\tau,t) - y'^2_n(0,\tau,t)]. \tag{3.9}$$

Дифференцируя тождество $\frac{s''}{s} = q + 2\lambda p - \lambda^2$ по λ, имеем $s''_\lambda s - s'' s_\lambda = 2ps^2 - 2\lambda s^2$. Интегрируя это равенство по x на отрезке $[0,\pi]$, выводим формулу

$$2\int_0^\pi [\lambda - p(x+\tau,t)]s^2(x,\lambda,\tau,t)dx =$$
$$= s'(\pi,\lambda,\tau,t)\frac{\partial s(\pi,\lambda,\tau,t)}{\partial\lambda} - s(\pi,\lambda,\tau,t)\frac{\partial s'(\pi,\lambda,\tau,t)}{\partial\lambda}.$$

Полагая $\lambda = \xi_n$, получим, что

$$2\xi_n\alpha_n^2 - 2\int_0^\pi p(x+\tau,t)s^2(x,\xi_n,\tau,t)dx = s'(\pi,\xi_n,\tau,t)\frac{\partial s(\pi,\xi_n,\tau,t)}{\partial\lambda}, \tag{3.10}$$

где

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi s^2(x, \xi_n(t), \tau, t)dx.$$

Подставляя выражение

$$y_n(x, \tau, t) = \frac{1}{\alpha_n} s(x, \xi_n(t), \tau, t)$$

в формулу (3.9) и используя равенство (3.10), находим

$$\dot{\xi}_n \frac{\partial s(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda} = \{2\xi_n + 2p(\tau, t) - \gamma(t)p(0, t)\} \cdot \left(s'(\pi, \xi_n, \tau, t) - \frac{1}{s'(\pi, \xi_n, \tau, t)} \right).$$

Отсюда, используя (2.6), выводим равенство

$$\dot{\xi}_n = \{2\xi_n + 2p(\tau, t) - \gamma(t)p(0, t)\} \cdot \frac{\sigma_n(\tau, t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{\frac{\partial s(\pi, \xi_n, \tau, t)}{\partial \lambda}}. \qquad (3.11)$$

Пользуясь разложениями (2.4), (2.7) и равенством (2.8), преобразуем формулу (3.11) и получим аналог системы уравнений Дубровина (3.1).

Если вместо граничных условий Дирихле взять периодические или антипериодические граничные условия, то вместо уравнений (3.9) получим уравнения $\dot{\lambda}_n = 0$, $n \in Z$. Из этого следует независимость от t спектра квадратичного пучка уравнений (1.4), независимость от τ была показана в п. 2. □

Замечание 1. Используя формулу первого следа (2.10), систему (3.1) можем переписать в зависящий только от ξ_n, σ_n, $n \in Z \backslash \{0\}$ форме:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n sign(n) \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} g_n(\xi, t) h_n(\xi), n \in Z \backslash \{0\}, \qquad (3.12)$$

где

$$g_n(\xi, t) = \lambda_{-1} + \lambda_0 + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k) + 2\xi_n -$$

$$-\gamma(t) \cdot \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \gamma(t) \cdot \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(0, t) \right).$$

Следствие 1. *Из этой теоремы и формул следов* (2.10), (2.11) *получим следующий алгоритм решения задачи* (1.1)–(1.3)*:*

1) найдём спектральные данные λ_n, $n \in Z$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z \backslash \{0\}$, *соответствующие квадратичному пучку уравнений Штурма – Лиувилля*

$$-y'' + q_0(x + \tau)y + 2\lambda p_0(x + \tau)y - \lambda^2 y = 0, x \in R;$$

2) решая при $\tau = 0$ *задачу Коши* (3.12), (3.2) *находим* $\xi_n(0,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$;

3) подставляем найденные выражения для $\xi_n(0,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$, *в систему уравнений* (3.12), *и решая задачу Коши* (3.12), (3.2) *при произвольном значении* τ, *находим* $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in Z\backslash\{0\}$;

4) по формуле следов (2.10) *и* (2.11) *находим* $p(x,t)$ *и* $q(x,t)$.

Замечание 2. Покажем, что построенные функции $p(x,t)$ и $q(x,t)$ удовлетворяют системе уравнений Каупа с нагруженным членом (1.1). Для этого используем также систему Дубровина (2.9) и следующую формулу следов (см. [2] с. 96, 97):

$$-\frac{3}{4}p_{\tau\tau}(\tau,t) + 4p^3(\tau,t) + 3p(\tau,t)q(\tau,t) =$$

$$= \frac{(\lambda_{-1})^3 + (\lambda_0)^3}{2} + \sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_{2k-1})^3 + (\lambda_{2k})^3}{2} - \xi_k^3\right). \qquad (3.13)$$

Из систем Дубровина (2.9) и (3.1) получим

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = -\left\{2p + 2\xi_k - \gamma(t)p(0,t)\right\}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}, k \in Z\backslash\{0\}. \qquad (3.14)$$

Дифференцируя по t формулу первого следа (2.10) и учитывая (3.14), находим

$$p_t = -\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial t} = 2p\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 2\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} - \gamma(t)p(0,t)\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}. \qquad (3.15)$$

Дифференцируя по τ первую и вторую формулу следов (2.10), (2.11), имеем

$$\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -p_\tau, 2\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} = -4pp_\tau - q_\tau. \qquad (3.16)$$

Используя эти равенства, из (3.15) выводим тождество

$$p_t = -6pp_\tau - q_\tau + \gamma(t)p(0,t)p_\tau. \qquad (3.17)$$

Это и есть первое уравнение в системе (1.1). Дифференцируя по t формулу второго следа (2.11), имеем

$$q_t = -4pp_t - 2\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial t} =$$

$$= -4pp_t + 4p\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} + 4\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k^2\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} - 2\gamma(t)p(0,t)\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\xi_k\frac{\partial \xi_k}{\partial \tau}.$$

Из (3.16), (3.13) и последнего равенства находим

$$q_t = -4pp_t + 2p(-4pp_\tau - q_\tau) + (p_{\tau\tau\tau} - 16p^2 p_\tau - 4p_\tau q - 4pq_\tau) -$$

$$-\gamma(t)p(0,t)(-4pp_\tau - q_\tau).$$

Подставляя сюда выражение (3.17), получим второе уравнение системы Каупа с нагруженным членом $q_t = p_{\tau\tau\tau} - 4qp_\tau - 2pq_\tau + \gamma(t)p(0,t)q_\tau$.

Следствие 2. *В работе [1] доказана следующая теорема: для экспоненциального убывания длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля с π-периодическими действительными коэффициентами необходима и достаточна аналитичность этих коэффициентов. Отсюда выводим, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то длины лакун, соответствующие этим коэффициентам, убывают экспоненциально. Коэффициентам $p(x,t)$ и $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, решения задачи* (1.1)–(1.3) *являются действительными аналитическими функциями по x.*

Следствие 3. *В работе [11] доказан аналог обратной теоремы Борга: для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом коэффициентов квадратичного пучка уравнений Штурма – Лиувилля, необходимо и достаточно двукратность всех собственных значений антипериодической задачи. В силу этой теоремы, если $p_0(x)$ и $q_0(x)$ имеют период $\frac{\pi}{2}$, то все собственные значения антипериодической задачи, соответствующие этим коэффициентам, являются двукратными. Коэффициентам $p(x,t)$ и $q(x,t)$ соответствуют те же собственные значения с теми же кратностями, снова пользуясь указанной теоремой, получаем, что решения задачи* (1.1)–(1.3) *$p(x,t)$ и $q(x,t)$ являются $\frac{\pi}{2}$-периодическими по x.*

4. Существование и единственность решения задачи Коши для системы Дубровина

Исследуем существование и единственность решения задачи Коши (3.12), (3.2) для системы Дубровина.

Теорема 2. *Если $\gamma(t) \in C[0,\ \infty)$ — действительная ограниченная функция, $p_0(x) \in C^3(R)$ и $q_0(x) \in C^2(R)$ — действительные π-периодические функции, то решение задачи Коши* (3.12), (3.2) *для всех $t > 0$ существует и единственно.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что все лакуны открыты, т. е. $\lambda_{2n-1} < \lambda_{2n}$, $n \in Z\backslash\{0\}$, иначе следует лакуны нумеровать заново. Следуя работе Б. М. Левитана (см. [3], гл. 9), сделаем подстановку $\xi_n = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})\sin^2 x_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$. Тогда задача (3.12), (3.2) примет вид

$$\frac{dx_n}{dt} = H_n(x,t), n \in Z\backslash\{0\}, \tag{4.1}$$

$$x_n|_{t=0} = x_n^0(\tau) = \arcsin\sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, n \in Z\backslash\{0\}, \tag{4.2}$$

где $H_n(x,t) = (-1)^n \sigma_n^0(0) sign(n) \cdot g_n(\xi,t) h_n(\xi)$, $x = (..., \ x_{-1}, x_1, \ ...)$.

Для исследования разрешимости задачи Коши (4.1), (4.2) введем в рассмотрение банахово пространство $\mathrm{K} = \{x : x = (..., \ x_{-1}, x_1, \ ...), \ x_n \in R\}$ с нормой $\|x\| = \sum_{0\neq n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})\,|x_n|$.

Положим $H(x,t) = (..., \ H_{-1}(x,t), \ H_1(x,t), \ ...)$. Тогда задачу Коши (4.1), (4.2) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = H(x,t), \tag{4.3}$$

$$x(\tau,t)\,|_{t=0} = x^0(\tau), x^0(\tau) \in \mathrm{K}. \tag{4.4}$$

Из условий $p_0(x) \in C^3(R)$ и $q_0(x) \in C^2(R)$ следуют асимптотики (см. [3])

$$\lambda_{2n-1} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{\varepsilon_n^-}{n^3}, \lambda_{2n} = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_3}{n^3} + \frac{\varepsilon_n^+}{n^3}, \tag{4.5}$$

где $c_k, \ k = 0, \ 1, \ 2, \ 3,$ — постоянные числа и $\{\varepsilon_n^{\pm}\} \in l_2$. Отсюда, учитывая $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \ \lambda_{2n}]$, получим что $\inf\limits_{k\neq n,0} |\xi_n - \xi_k| \geq a > 0$. Используя эти факты и ограниченность функции $\gamma(t)$, из явных выражений функций $g_n(\xi,t)$ и $h_n(\xi)$ выводим следующие оценки:

$$|g_n(\xi,t)| \leq C_1\,|n|\,, \left|\frac{\partial g_n(\xi,t)}{\partial \xi_m}\right| \leq C_2,$$

$$C_3\,|n| \leq |h_n(\xi)| \leq C_4\,|n|\,, \left|\frac{\partial h_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \leq C_5\,|n|\,,$$

где постоянные $C_k, \ k = 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5,$ положительны и не зависят от n и m. С помощью этих оценок и асимптотики (4.5) нетрудно доказывается неравенство $\|H(x,t)\| \leq M$ и условие Липшица $\|H(x,t) - H(y,t)\| \leq L\,\|x-y\|$, $\forall \ x, \ y \in \mathrm{K}$, где постоянные M и L не зависят от x, y и t. Учитывая условие Липщица и непрерывность по t функции $g_n(\xi,t)$, нетрудно проверить непрерывность $H(x,t)$. Используя эти факты, методом последовательных приближений можем доказать, что для любого $T > 0$ при $t \in (0, \ T)$ решение задачи Коши (4.3), (4.4) существует и единственно. Значит, решение задачи Коши (3.12), (3.2) для всех $t > 0$ существует и единственно. $\square$

Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность проф. А. Б. Хасанову (Самаркандский государственный университет, Узбекистан) за обсуждение работы и ценные советы.

Список источников

1. Бабажанов Б. А., Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 298–305. http://mi.mathnet.ru/de11237
2. Гусейнов Г. Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку : Элм, 1986. Вып. 7. С. 51–101.
3. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М. : Наука, 1984.
4. Матёкубов М. М. Интегрирование уравнения типа Кортевега – де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций // Известия ИМИ УдГУ. 2024. Т. 64. С. 60–69. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05
5. Смирнов А. О. Вещественные конечнозонные регулярные решения уравнения Каупа – Буссинеска // Теоретическая математическая физика. 1986. Т. 66, № 1. С. 30–46. https://doi.org/10.1007/BF01028935
6. Уразбоев Г. У., Хасанов М. М., Исмоилов О. Б. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза отрицательного порядка с нагруженным членом в классе периодических функций // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1703–1712. https://doi.org/10.31857/S0374064124120094
7. Хасанов А. Б., Матякубов М. М. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза с дополнительным членом // Теоретическая математическая физика. 2020. Т. 203, № 2. С. 192–204. https://doi.org/10.4213/tmf9693
8. Хасанов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. 2019. Т. 199, № 1. С. 60–68. https://doi.org/10.4213/tmf9581
9. Хоитметов У. А. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций // Математические труды. 2021. Т. 24, № 2. С. 181–198. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2021.24.211
10. Юрко В. А. Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 10. С. 137–160. https://doi.org/10.1070/sm2000v191n10ABEH000520
11. Яхшимуратов А. Б. Аналог обратной теоремы Борга для квадратичного пучка операторов Штурма – Лиувилля // Вестник Елецкого государственного университета им. И. А.Бунина. Серия: Математика. Компьютерная математика. 2005. Т. 8, № 1. С. 121–126.
12. Яхшимуратов А. Б., Бабаджанов Б. А. Интегрирование уравнений типа системы Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций // Уфимский математический журнал. 2020. Т. 12, № 1. С. 103–113. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-103
13. Яхшимуратов А. Б., Матёкубов М. М. Интегрирование нагруженного уравнения Кортевега – де Фриза в классе периодических

функций // Известия вузов. Математика. 2016. № 2. С. 87–92. https://www.mathnet.ru/eng/ivm/y2016/i2/p87
14. Яхшимуратов А. Б., Хасанов М. М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 536–543. https://doi.org/10.1134/S0012266114040119
15. Babajanov B. A., Azamatov A. Sh. Integration of the Kaup–Boussinesq system with a self-consistent source via inverse scattering method // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternye Nauki. 2022. Vol. 32, N 2. P. 153–170. http://dx.doi.org/10.35634/vm220201.
16. Babajanov B. A., Sadullaev Sh. O., Ruzmetov M. M. Integration of the Kaup–Boussinesq system via inverse scattering method // Partial Diffrential Equations in Applied Mathematics. 2024. Vol. 11. P. 100813. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100813
17. Buterin S. A., Yurko V. A. Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2012. Vol. 20, N 5-6, P. 855–881. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0062
18. Cabada A., Yakhshimuratov A. The system of Kaup equations with a self-consistent source in the class of periodic functions // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2013. Vol. 9, N 3. P. 287–303. http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000490597
19. Chuan-Fu Yang, Yong-Xia Guo. Determination of a differential pencil from interior spectral data // Journal of mathematical Analysis and Applications. 2011. Vol. 375, N 1. P. 284–293. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.011
20. Guseinov G. Sh. On construction of a quadratic Sturm-Liouville operator pencil from spectral data // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2014. Vol. 40. P. 203–214. https://proc.imm.az/volumes/40-s/40-s-16.pdf
21. Hryniv R. O., Manko S. S. Inverse scattering on the half-line for energy-dependent Schrödinger equations. // Inverse Problems. 2020. Vol. 36, N 9. 095002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aba416
22. Hryniv R., Pronska N. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations. // Inverse Problems. 2012. Vol. 28, N 8. 085008. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/8/085008
23. Jaulent M., Jean C. The inverses-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy // Commun. Math. Phys. 1972. Vol. 28. P. 177–220. https://doi.org/10.1007/BF01645775
24. Kaup D.J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54. P. 396–408. https://doi.org/10.1143/PTP.54.396
25. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 38. С. 19–35. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.38.19
26. Khasanov M. M., Rakhimov I. D., Azimov D. B. Integration of the loaded negative order nonlinear Schrödinger equation in the class of periodic functions // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51
27. Matveev V. B., Yavor M. I. Solutions presque periodiques et a N-solitons de l'equation hydrodynamique nonlineaire de Kaup // Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A. 1979. Vol. 31. P. 25–41. http://eudml.org/doc/76040
28. Urazboev G. U., Khasanov M. M., Ganjaev O. Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions //

International Journal of Applied Mathematics. 2024. Vol. 37, N 1. P. 37–46. http://www.diogenes.bg/ijam/contents/2024-37-1/4/4.pdf
29. Yakhshimuratov A. The nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent source in the class of periodic functions // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2011. Vol. 14. P. 153–169. https://doi.org/10.1007/s11040-011-9091-5
30. Yakhshimuratov A., Kriecherbauer T., Babajanov B. On the construction and integration of a hierarchy for the Kaup system with a self-consistent source in the class of periodic functions // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2021. Vol. 17, N 2. P. 233–257. https://doi.org/10.15407/mag17.02.233
31. Yurko V. Inverse problem for quasi-periodic differential pencils with jump conditions inside the interval // Complex Analysis and Operator Theory. 2016. Vol. 10, N 6. P. 1203–1212. https://doi.org/10.1007/s11785-015-0493-4

References

1. Babazhanov B.A., Khasanov A.B., Yakhshimuratov A.B. On the inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with periodic potential. *Differential equations*, 2005, vol. 41, no. 3, pp. 310–318. http://mi.mathnet.ru/de11237 (in Russian)
2. Guseinov G.Sh. Inverse spectral problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators on a finite interval. *Spectral theory of operators and its applications.* Baku, Elm Publ., 1986, no. 7, pp. 51–101. (in Russian)
3. Levitan B.M. Inverse Sturm-Liouville problems. Moscow, Nauka Publ., 1984. (in Russian)
4. Matyoqubov M.M. Integration of the Korteweg–de Vries type equations with a loaded term in the class of periodic functions. *Izv. IMI UdGU*, 2024, vol. 64, pp. 60–69. https://doi.org/10.35634/2226-3594-2024-64-05 (in Russian)
5. Smirnov A.O. Real finite-gap regular solutions of the Kaup-Boussinesq equation. *Theor. and Math. Phys.*, 1986, vol. 66, no. 1, pp. 19–31. https://doi.org/10.1007/BF01028935
6. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ismoilov O.B. Integration of the modified Korteweg–de Vries equation of negative order with a loaded term in the class of periodic functions. *Differential Equations.* 2024, vol. 60, no. 12, pp. 1703–1712. https://doi.org/10.31857/S0374064124120094 (in Russian)
7. Khasanov A.B., Matyakubov M.M. Integration of the nonlinear Korteweg–de Vries equation with an additional term. *Theoret. and Math. Phys.*, 2020, vol. 203, no. 2, pp. 596–607. https://doi.org/10.1134/S0040577920050037
8. Hasanov A.B., Hasanov M.M. Integration of the nonlinear Schrodinger equation with an additional term in the class of periodic functions. *Theoret. and Math. Phys.*, 2019, vol. 199, no. 1, pp. 525–532. https://doi.org/10.1134/S0040577919040044
9. Hoitmetov U.A. Integrating the loaded KdV equation with a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing complex-valued functions. *Mat. Tr.*, 2021, vol. 24, no. 2, pp. 181–198. https://doi.org/10.33048/mattrudy.2021.24.211 (in Russian)
10. Yurko V.A. An inverse problem for differential operator pencils. *Sbornik: Mathematics.* 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1561–1586. https://doi.org/10.1070/sm2000v191n10ABEH000520 (in Russian)
11. Yakhshimuratov A.B. Analogue of the inverse theorem of Borg for a quadratic pencil of operators of Sturm-Liouville. *Bulletin Eletski State University. Series Mathematics. Computational Mathematics*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 121–126. (in Russian)

12. Yakhshimuratov A.B., Babajanov B.A. Integration of equations of Kaup system kind with self-consistent source in class of periodic functions. *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 103–113. https://doi.org/10.13108/2020-12-1-103
13. Yakhshimuratov A.B., Matyokubov M.M. Integration of loaded Korteweg-de Vries equation in a class of periodic functions. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 2, pp. 72–76. https://doi.org/10.3103/S1066369X16020110
14. Yakhshimuratov A.B., Khasanov M.M. Integration of the modified Korteweg–de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 533–540. https://doi.org/10.1134/S0012266114040119
15. Babajanov B.A., Azamatov A.Sh. Integration of the Kaup–Boussinesq system with a self-consistent source via inverse scattering method. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, no. 2, pp. 153–170. http://dx.doi.org/10.35634/vm220201.
16. Babajanov B.A., Sadullaev Sh.O., Ruzmetov M.M. Integration of the Kaup–Boussinesq system via inverse scattering method. *Partial Diffrential Equations in Applied Mathematics*, 2024, vol. 11, 100813. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100813
17. Buterin S.A., Yurko V.A. Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 2012, vol. 20, no. 5-6, pp. 855–881. https://doi.org/10.1515/jip-2012-0062
18. Cabada A., Yakhshimuratov A. The system of Kaup equations with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2013, vol. 9, no. 3, pp. 287–303. http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0000490597
19. Chuan-Fu Yang, Yong-Xia Guo. Determination of a differential pencil from interior spectral data. *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 2011, vol. 375, no. 1, pp. 284–293. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.011
20. Guseinov G.Sh. On construction of a quadratic Sturm-Liouville operator pencil from spectral data. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan*, 2014, vol. 40, pp. 203–214. https://proc.imm.az/volumes/40-s/40-s-16.pdf
21. Hryniv R.O., Manko S.S. Inverse scattering on the half-line for energy-dependent Schrödinger equations. *Inverse Problems*, 2020, vol. 36, no. 9, 095002. https://doi.org/10.1088/1361-6420/aba416
22. Hryniv R., Pronska N. Inverse spectral problems for energy-dependent Sturm-Liouville equations. *Inverse Problems*, 2012, vol. 28, no. 8, 085008. https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/8/085008
23. Jaulent M., Jean C. The inverses-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy. *Commun. Math. Phys.*, 1972, vol. 28, pp. 177–220. https://doi.org/10.1007/BF01645775
24. Kaup D.J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it. *Prog. Theor. Phys.*, 1975, vol. 54, pp. 396–408. https://doi.org/10.1143/PTP.54.396
25. Khasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 38, pp. 19–35. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.38.19
26. Khasanov M.M., Rakhimov I.D., Azimov D.B. Integration of the loaded negative order nonlinear Schrödinger equation in the class of periodic functions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 51–65. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.51

27. Matveev V.B., Yavor M.I. Solutions presque periodiques et a N-solitons de l'equation hydrodynamique nonlineaire de Kaup. *Ann. Inst. Henri Poincare, Sect. A* , 1979, vol. 31, pp. 25–41. http://eudml.org/doc/76040
28. Urazboev G.U., Khasanov M.M., Ganjaev O.Y. Integration of the loaded negative order Korteweg-de Vries equation in the class of periodic functions. *International Journal of Applied Mathematics*, 2024, vol. 37, no. 1, pp. 37–46. http://www.diogenes.bg/ijam/contents/2024-37-1/4/4.pdf
29. Yakhshimuratov A. The nonlinear Schrödinger equation with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, 2011, vol. 14, pp. 153–169. https://doi.org/10.1007/s11040-011-9091-5
30. Yakhshimuratov A., Kriecherbauer T., Babajanov B. On the construction and integration of a hierarchy for the Kaup system with a self-consistent source in the class of periodic functions. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 233–257. https://doi.org/10.15407/mag17.02.233
31. Yurko V. Inverse problem for quasi-periodic differential pencils with jump conditions inside the interval. *Complex Analysis and Operator Theory*, 2016, vol. 10, no. 6, pp. 1203–1212. https://doi.org/10.1007/s11785-015-0493-4

Об авторах

Яхшимуратов Алишер Бекчанович, д-р физ.-мат. наук, Университет Мамуна, Хива, 220900, Узбекистан, albaron@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4343-6299

Матёкубов Оллаберган Махсудович, ассистент, Ургенчский государственный университет, Ургенч, 220100, Узбекистан, ollabergan2021@mail.ru, https://orcid.org/0009-0008-2635-7039

About the authors

Alisher B. Yakhshimuratov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Mamun University, Khiva, 220900, Uzbekistan, albaron@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-4343-6299

Ollabergan M. Matyokubov, Assistant, Urgench State University, Urgench, 220100, Uzbekistan, ollabergan2021@mail.ru, https://orcid.org/0009-0008-2635-7039

Поступила в редакцию / Received 10.03.2025
Поступила после рецензирования / Revised 03.04.2025
Принята к публикации / Accepted 07.04.2025