Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 15—30

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.958
MSC 34B60
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.15

О методе коллокации при построении решения уравнения изгиба длинной прямоугольной нанопластины

О. В. Гермидер[1]✉, В. Н. Попов[1]

[1] Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Российская Федерация
✉ o.germider@narfu.ru

Аннотация: В рамках теории микроструктурной деформации предлагается новый подход для построения решения уравнения изгиба длинной прямоугольной нанопластины, которая находится под действием поперечной нагрузки. Предлагаемый подход основан на методе коллокации с применением системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Функция изгиба представляется в виде частичной суммы ряда по этим многочленам. В качестве точек коллокации выбираются корни многочленов Чебышева первого рода. Путем последовательного умножения левой и правой частей полученного матричного уравнения на обратную матрицу к матрице со значениями многочленов Чебышева в точках коллокации и на обобщенную обратную матрицу к вырожденной матрице дифференцирования этих многочленов уравнение изгибающей поверхности с учетом граничных условий приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в представлении решения. При этом элементы каждой из указанных матриц представлены в явном виде. Получена оценка погрешности построенного решения по бесконечной норме. Представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов, которые демонстрируют эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: микроструктурная деформация тонких пластин, уравнение изгиба длинной нанопластины, метод коллокации, многочлены Чебышева

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00381).

Ссылка для цитирования: Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе коллокации при построении решения уравнения изгиба длинной прямоугольной нанопластины // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 15–30.

https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.15

Research article

On the Collocation Method in Constructing a Solution to the Bending Equation for a Long Rectangular Nanoplate

Oksana V. Germider[1✉], **Vasilii N. Popov**[1]

[1] Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russian Federation

✉ o.germider@narfu.ru

Abstract: Within the framework of the theory of microstructural deformation, a new approach is proposed for constructing a solution to the bending equation of a long rectangular nanoplate that is under the influence of a transverse load. The proposed approach is based on the collocation method using a system of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind. The bending function is represented as a partial sum of a series of these polynomials. The roots of Chebyshev polynomials of the first kind are chosen as the collocation points. By sequentially multiplying the left and right sides of the resulting matrix equation by the inverse matrix to the matrix with the values of Chebyshev polynomials at the collocation points and by the generalized inverse matrix to the degenerate matrix of differentiation of these polynomials, the equation of the bending surface, taking into account boundary conditions, is reduced to a system of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients in the representation of the solution. In this case, the elements of each of these matrices are presented explicitly. An estimate of the error of the constructed solution based on an infinite norm is obtained. The results of the conducted computational experiments are presented, which demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: microstructural deformation of thin plates, bending equation for a long nanoplate, collocation method, Chebyshev polynomials

Acknowledgements: The research was financially supported Russian Science Foundation (project no. 24-21-00381).

For citation: Germider O. V., Popov V. N. On the Collocation Method in Constructing a Solution to the Bending Equation for a Long Rectangular Nanoplate. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 15–30. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.15

1. Введение

Моделирование изгиба тонких прямоугольных нанопластин имеет важное практическое применение при описании деформированного состояния наносистем, конструктивными элементами которых являются пластины, а также при проведении анализа жесткости и прочности этих систем [17; 19]. Предельным случаем при исследовании деформированного состояния тонкой прямоугольной нанопластины является определение ее изгиба, когда размер одной из сторон пластины значительно превышает размер другой стороны. Уравнение изгиба такой пластины эквивалентно дифференциальному уравнению изгиба балки, которое имеет аналитические решения при защемлении ее краев. Так, в [17] получены аналитические решения уравнения изгиба микро- и нанобалок, в которых изменение свойств материала происходит по толщине балки и ее оси. В [5] решения краевой задачи об изгибе тонкой упругой полубесконечной пластины, у которой длинные стороны свободны, а на торце изгибающий момент и обобщенная поперечная сила самоуравновешены, построены с использованием рядов по собственным функциям Папковича – Фадля. Неизвестные коэффициенты разложений найдены по замкнутым формулам и выражены через интегралы Фурье от заданных на торце полуполосы граничных условий. В [6] получены уравнения, описывающие длинноволновую изгибную деформацию микро- и нанобалок с учетом сдвигов и поверхностных эффектов, исследовано влияние поверхностных напряжений и инерции на нижний спектр собственных колебаний металлических микро- и нанобалок.

Для получения решения краевой задачи об изгибе длинной тонкой прямоугольной нанопластины в представленной работе развит полиномиальный подход с использованием обобщенной обратной матрицы к вырожденной матрице дифференцирования многочленов Чебышева первого рода [7; 8]. Нанопластина со сторонами a и b ($a \ll b$) и постоянной толщиной h ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h/2 \le z \le h/2$) находится под действием распределенной нагрузки $q(x)$. Положительным направлением оси z будем считать направление действия $q(x)$. На противоположных краях $x = 0$ и $x = a$ пластина защемлена. В этом случае уравнение изгиба срединной поверхности рассматриваемой нанопластины имеет вид [19]

$$\left(D + D^{(r)}\right) \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} - l^2 D \frac{\mathrm{d}^6 w}{\mathrm{d}x^6} = q, \tag{1.1}$$

где $w(x)$ – неизвестная функция изгиба пластины, D и $D^{(r)}$ – ее жесткость при изгибе и малом повороте соответственно,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D^{(r)} = \frac{EL^2 h}{2(1+\nu)},$$

E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона, l и L – нелокальные параметры масштаба длины, зависящие от a и микроструктуры пластины. Из условия защемления на краях $x = 0$ и $x = a$ имеем [15]

$$w = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0, \quad l^2 \frac{\mathrm{d}^m w}{\mathrm{d}x^m} = 0, \quad x = 0,\ a, \tag{1.2}$$

где $m = 2$, если вариация кривизны поверхности в плоскости, параллельной плоскости xz, на защемленной стороне равна нулю [15; 19], и

$m = 3$, если производная от распределенного изгибающего момента M_{xx} по x на этой стороне пластины равна нулю [9; 15]. Функция $q(x)$ непрерывна на отрезке $[0,\, a]$. При этом условии краевая задача (1.1) и (1.2) имеет единственное решение [10]. Следуя [18], перепишем уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) в безразмерном виде:

$$\left(1 + D_*^{(r)}\right) \frac{\mathrm{d}^4 w_*}{\mathrm{d}x_*^4} - l_*^2 \frac{\mathrm{d}^6 w_*}{\mathrm{d}x_*^6} = q_*, \tag{1.3}$$

$$w_* = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w_*}{\mathrm{d}x_*} = 0, \quad l_*^2 \frac{\mathrm{d}^m w_*}{\mathrm{d}x_*^m} = 0, \quad x_* = 0,\, 1, \tag{1.4}$$

где $x_* = x/a$, $w_* = wD/(q_0 a^4)$, $D_*^{(r)} = D^{(r)}/D = 6(1-\nu)L_h^2$, $L_h = L/h$, $l_* = l/a$, $q_* = q/q_0$, q_0 – характерный параметр нагрузки, $m = 2,\, 3$.

В качестве базиса в гильбертовом пространстве функций при построении решения уравнения (1.3) с граничными условиями (1.4) используем многочлены Чебышева первого рода. Коэффициенты в разложении функции изгиба $w_*(t)$ по этим многочленам $\{T_i(t)\,(i = \overline{0,\, n})\}$ находим методом коллокации, где $t = 2x_* - 1$ и $t \in [-1,\, 1]$. Путем выбора корней многочлена $T_{n+1}(t)$ в качестве точек коллокации в уравнении (1.3) краевую задачу сводим к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов в представлении $w_*(t)$. Используя соотношения ортогональности для рассматриваемых многочленов $T_i(t)$ и представления для производных и интегралов от $T_i(t)$ $(i = \overline{0,\, n})$, получаем преобразованную разреженную матрицу системы уравнений, которая имеет достаточно простой вид. Последнее в значительной степени может способствовать оптимизации при нахождении решения дифференциальных уравнений более высокого порядка. В отличие от [7;8] определение неизвестных коэффициентов в разложении $w_*(t)$ происходит непосредственно из полученной системы в результате умножения слева на обобщенную обратную матрицу к матрице, которая определяет $w_*^{(6)}$ в точках коллокации в уравнении (1.3). Получена оценка погрешности построенного решения по бесконечной норме. В пространстве непрерывных на отрезке $t \in [-1,\, 1]$ функций для достаточно гладкого решения показана сходимость аппромаксимационного процесса по норме этого пространства. При этом дополнительно, следуя [12], предполагалось, что функция q_* достаточно дифференцируема. Представлены результаты, показывающие эффективность предложенного подхода.

2. Построение решения краевой задачи

Многочлены Чебышева первого рода образуют ортогональную систему и определяются согласно [1; 14] как

$$T_i(t) = \cos(i \arccos t), \quad t \in [-1,\, 1], \quad i \geq 0. \tag{2.1}$$

Запишем краевую задачу (1.3) и (1.4) для безразмерной функции изгиба $w_*(t)$:

$$c_1 \frac{\mathrm{d}^4 w_*}{\mathrm{d}t^4} + c_2 \frac{\mathrm{d}^6 w_*}{\mathrm{d}t^6} = q_*, \tag{2.2}$$

$$w_* = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w_*}{\mathrm{d}t} = 0, \quad l_*^2 \frac{\mathrm{d}^m w_*}{\mathrm{d}t^m} = 0, \quad t = -1,\, 1, \tag{2.3}$$

где $c_1 = 2^4 \left(1 + D_*^{(r)}\right)$, $c_2 = -2^6 l_*^2$, $m = 2,\, 3$. Далее для определенности при построении решения уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) ограничиваемся случаем $m = 2$. Представляем функцию $w_*(t)$ в виде частичной суммы ряда по многочленам Чебышева $\{T_i(t)\, (i = \overline{0,\, n})\}$:

$$w_{*n}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i T_i(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{A}, \quad t \in [-1,\, 1], \tag{2.4}$$

где $\mathbf{T}(t) = (T_0(t)\, T_1(t) \ldots T_n(t))$, $\mathbf{A}$ – неизвестная матрица, элементами которой являются коэффициенты в разложении (2.4): $\mathbf{A} = (a_0 a_1 \ldots a_n)^T$.

В качестве точек коллокации в (2.2) выберем корни $T_{n+1}(t)$:

$$t_k = \cos\left(\frac{\pi(2n - 2k + 1)}{2(n+1)}\right), \quad k = \overline{0,\, n}. \tag{2.5}$$

По определению (2.1) многочлена $T_j(t_k)$ получаем

$$T_i(t_k) = \cos\left(\frac{\pi i(2n - 2k + 1)}{2(n+1)}\right), \quad i,\, k = \overline{0,\, n}.$$

Производную $\mathbf{T}(t)$ по t в точках (2.5) представляем в виде произведения $\mathbf{T}(t_k)\mathbf{J}$ [3] в соответствии с равенством [14]

$$\frac{\mathrm{d}T_j}{\mathrm{d}t} = j \sum_{\substack{k=0 \\ j+k-\text{неч.}}}^{j-1} b_k T_k(t), \quad j \geq 1,$$

в котором $b_0 = 1$ и $b_k = 2$ $(k > 0)$. Через $\mathbf{J}$ обозначена квадратная верхнетреугольная матрица дифференцирования с отличными от нуля элементами $J_{0\,j} = j$ (j – нечетное, $j = \overline{1,\, n}$) и $J_{k\,j} = 2j$ ($j - k > 0$ и $j + k$ – нечетное, $j,\, k = \overline{1,\, n}$). Здесь и ниже нумерация строк и столбцов в матрицах начинается с нуля. Форма записи элементов матрицы $\mathbf{J}$ соответствует определению матрицы дифференцирования [8].

Для i-й производной $\mathbf{T}(t)$ по переменной t соответственно имеем

$$\frac{\mathrm{d}^i\mathbf{T}(t)}{\mathrm{d}t^i} = \mathbf{T}(t)\mathbf{J}^i, \quad i = \overline{1,\,6}. \tag{2.6}$$

Например, для $n = 7$ матрицы $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^2$ имеют вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 & 0 & 108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 120 & 0 & 336 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 0 & 280 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя разложение по многочленам Чебышева $\{T_j(t)\,(j = \overline{0,\,n})\}$ для i-й производной функции $w_{*n}(t)$ по t и учитывая (2.6), получаем $w_{*n}^{(i)}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{A}_i$, где матрица $\mathbf{A}_i = (a_{i,0}\,a_{i,1}\ldots a_{i,n-i}\ldots 0)^T$ с последними i элементами, равными нулю, следовательно, зависимость между коэффициентами в (2.4) и коэффициентами в разложении производных функции $w_{*n}(t)$ имеет следующий вид: $\mathbf{A}_i = \mathbf{J}^i\mathbf{A}$, при этом $\mathbf{A}_i = \mathbf{J}\mathbf{A}_{i-1}$, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ $(i = \overline{1,\,6})$.

Подставляя (2.4) и (2.5) в уравнение (2.2), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = c_1\mathbf{G}\mathbf{J}^4 + c_2\mathbf{G}\mathbf{J}^6, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{F} = (q_*(t_0)\,q_*(t_1)\,\ldots\,q_*(t_n))^T$, а квадратная матрица $\mathbf{G}$ имеет строки $\mathbf{T}(t_k)$ $(k = \overline{0,\,n})$. Преобразуем уравнение (2.7), умножая последовательно левую и правую его части слева на обратную матрицу $\mathbf{G}^{-1}$ к $\mathbf{G}$ и обобщенную обратную матрицу к $\mathbf{J}^6$.

Элементы матрицы $\mathbf{G}^{-1}$ находим, используя свойство ортогональности векторов, которые являются столбцами матрицы $\mathbf{G}$: $G^{-1}_{kj} = 2\beta_k/(n+1)G^T_{kj}$ $(j,\,k = \overline{0,\,n})$, $\beta_0 = 1/2$, $\beta_k = 1$ $(k > 0)$ [4].

Обобщенную обратную матрицу $\mathbf{K}_6$ к вырожденной матрице $\mathbf{J}^6$ получаем из условий $\mathbf{J}^6 = \mathbf{J}^6\mathbf{K}_6\mathbf{J}^6$ и $\mathbf{K}_6 = \mathbf{K}_6\mathbf{J}^6\mathbf{K}_6$ [13], последовательно интегрируя равенство (2.6) и учитывая, что первые i элементов матрицы-строки $\mathbf{T}(t)\mathbf{J}^i$ равны нулю. В результате имеем

$$\mathbf{T}(t)\mathbf{E}_i = \mathbf{T}(t)\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{E}_i$ – диагональная матрица с отличными от нуля единичными элементами $E_{i,j\,j}$ $(j = \overline{i,\,n})$, $\mathbf{K}_i$ – обобщенная обратная матрица к вырожденной матрице $\mathbf{J}^i$, для которой выполняются условия $\mathbf{J}^i = \mathbf{J}^i\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i$

и $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_i\mathbf{J}^i\mathbf{K}_i$ $(i = \overline{1,\,6})$, причем матрица $\mathbf{K}_1$ является матрицей интегрирования и ее элементы найдены на основе равенств [14]:

$$\int T_0(t)\mathrm{d}t = T_1(t),\ 4\int T_1(t)\mathrm{d}t = T_2(t),\ 2\int T_j(t)\mathrm{d}t = \frac{T_{j+1}(t)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(t)}{j-1},$$

где $j \geq 2$. В этом случае первая строка в $\mathbf{K}_1$ нулевая, во второй строке отличны от нуля элементы $K_{1,\,1\,0} = 1$ и $K_{1,\,1\,2} = -1/2$, в остальных строках, за исключением последней, содержатся парные ненулевые элементы [4]: $K_{1,\,j\ j+(-1)^i} = (-1)^{i+1}/(2j)$ $(i = 1, 2,\, j = \overline{2,\,n-1})$, в последней строке отличен от нуля только элемент $K_{1,\,n\ n-1} = 1/(2n)$. Форма записи элементов матрицы $\mathbf{K}_1$ соответствует результатам [7;8]. Аналогично получаем элементы матриц $\mathbf{K}_i$, равные элементам матрицы $\mathbf{K}_1^i$, за исключением первых i нулевых строк $(i = \overline{2,\,6})$. В этом случае матрица $\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i$ является симметричной: $\left(\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i\right)^T = \mathbf{K}_i\mathbf{J}^i$, неотрицательно определенной матрицей (ненулевые собственные значения матрицы $\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i$ равны 1), причем $\left(\mathbf{K}_i\mathbf{J}^i\right)^T = \mathbf{K}_i\mathbf{J}^i = \mathbf{E}_i$, а зависимость между коэффициентами разложения по полиномам Чебышева решения задачи (2.4) и коэффициентами разложения производных этого решения принимает вид: $\mathbf{E}_i\mathbf{A} = \mathbf{K}_i\mathbf{A}_i$, причем $\mathbf{E}_i\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{E}_i\mathbf{K}_1\mathbf{A}_i$ $(i = \overline{2,\,6})$.

Например, для $n = 7$ матрицы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ имеют вид

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{48} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{48} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{80} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{80} & 0 & -\frac{1}{48} & 0 & \frac{1}{120} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{70} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{168} & 0 & -\frac{1}{168} \end{pmatrix}.$$

В результате умножения частей уравнения (2.7) слева на матрицу $\mathbf{G}^{-1}$ и $\mathbf{K}_6$ получаем, учитывая (2.8):

$$\mathbf{S}\mathbf{A} = \mathbf{K}_6\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E}_6\left(c_1\mathbf{K}_2 + c_2\mathbf{E}\right), \tag{2.9}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Используя граничные условия (2.3), доопределяем нулевые строки матрицы $\mathbf{S}$ в уравнении (2.9). Обозначаем полученную в результате новую матрицу как $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S} + \mathbf{S}'$, где только первые шесть строк квадратной матрицы $\mathbf{S}'$ ненулевые и соответствуют (2.3):

$$\mathbf{T}(\mp1)\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T}(\mp1)\mathbf{J}\mathbf{A} = 0, \quad l_*^2\mathbf{T}(\mp1)\mathbf{J}^2\mathbf{A} = 0, \tag{2.10}$$

при этом значения многочленов T_i в точках $t = \mp1$ находим согласно [14] как $T_i(-1) = (-1)^i$, $T_i(1) = 1$ $(i = \overline{0,\,i})$.

Учитывая, что изменения элементов столбца свободных членов в (2.9) не происходит, поскольку правые части граничных условий (2.3) равны нулю, получаем в результате

$$\mathbf{S}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{K}_6\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}. \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.11) находим LU-методом [11], при этом факторизация Тьюринга LU-алгоритма используется для факторного анализа, а обусловленность системы (2.11) зависит от геометрических параметров нанопластин, в частности от a, нелокальных параметров l и L. Функцию $w_{*n}(t)$ получаем, используя ее представление (2.4).

В предлагаемом подходе ортогональность векторов-столбцов квадратной матрицы $\mathbf{G}$, элементами которой являются значения многочленов Чебышева, найденные в точках (2.5), обеспечивает существование ее обратной матрицы, получаемой на основе транспонирования $\mathbf{G}$, а умножение каждой из частей системы линейных алгебраических уравнений коллокации (2.7) слева на обобщенную обратную матрицу $\mathbf{K}_6$ к вырожденной матрице дифференцирования $\mathbf{J}^6$ приводит к освобождению строк матрицы системы уравнений (2.9) для выполнения граничных условий (2.3) в матричной форме (2.10).

Предполагая, следуя [12], что решение $w_*(t)$ краевой задачи (2.2) и (2.3) достаточно гладкое на отрезке $[-1,\,1]$, оценим разность между w_* и построенным решением w_{*n} по бесконечной норме в пространстве непрерывных на отрезке $[-1,\,1]$ функций.

3. Погрешность вычислений с использованием полиномов Чебышева

Пусть функция $w_*(t)$ является достаточно гладкой функцией на отрезке $[-1, 1]$. Тогда [1]

$$w_*(t) - L_n(t) = \frac{w_*(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(t), \quad t \in [-1,\,1], \tag{3.1}$$

где $L_n(t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $w_*(t)$ при выборе узлов (2.5); $\zeta \in (-1,\,1)$, $\omega_{n+1}(t) = (t-t_0)(t-t_1)\ldots(t-t_n)$. В этом случае минимизируется оценка остаточного члена интерполяционной формулы и [1]

$$\omega_{n+1}(t) = 2^{-n}T_{n+1}(t). \tag{3.2}$$

Тогда бесконечная норма функции $\omega_{n+1}(t)$ в пространстве непрерывных на отрезке $[-1,\,1]$ функций равна 2^{-n}. Обозначая максимум величины $|w_*^{(n+1)}(t)|$ на этом отрезке как M_{n+1}, из (3.1) получаем

$$\|w_*(t) - L_n(t)\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}. \tag{3.3}$$

Запишем

$$\|w_*(t) - w_{*n}(t)\|_\infty \le \|w_*(t) - L_n(t)\|_\infty + \|L_n(t) - w_{*n}(t)\|_\infty. \tag{3.4}$$

Интерполяционный многочлен $L_n(t)$ представляем в виде

$$L_n(t) = \sum_{j=0}^{n} A_{e,j} T_j(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{A}_e, \quad t \in [-1,\, 1], \tag{3.5}$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}_e = (a_{e,0}\, a_{e,1} \ldots a_{e,n-1}\, a_{e,n})^T$ находим на основе значений функции $w_*(t)$ в узлах (2.5):

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{W}_e, \quad \mathbf{W}_e = (w_*(t_0)\, w_*(t_1) \ldots w_*(t_n))^T.$$

Используя (2.4) и (3.5), имеем

$$\|L_n(t) - w_{*n}(t)\|_\infty \le \sum_{j=0}^{n} |a_j - a_{e,j}| \|T_j(t)\|_\infty = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\|_1, \tag{3.6}$$

где $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\|_1 = \sum\limits_{j=0}^{n} |a_j - a_{e,j}|$ – норма Гельдера вектора $\mathbf{A} - \mathbf{A}_e$ с показателем 1 [1].

Для оценки $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\|_1$ уравнение (2.2) и граничные условия (2.3) в точках (2.5) запишем в виде (2.11)

$$\mathbf{S}^+\mathbf{A}_e + \mathbf{R} = \mathbf{K}_6\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{R} = (R_0\, R_1 \ldots R_n)^T$:

$$R_i = w_* - L_n, \quad R_{2+i} = \frac{\mathrm{d}(w_* - L_n)}{\mathrm{d}t}, \quad t = (-1)^i, \quad i = 0,\, 1, \tag{3.8}$$

$$R_{4+i} = l_*^2 \frac{\mathrm{d}^2(w_* - L_n)}{\mathrm{d}t^2}, \quad t = (-1)^i, \quad i = 0,\, 1, \tag{3.9}$$

а остальные элементы $\mathbf{R}$ нулевые.

Из (2.11) и (3.7) получаем

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_e\|_1 = \left\|(\mathbf{S}^+)^{-1}\mathbf{R}\right\|_1 \le \left\|(\mathbf{S}^+)^{-1}\right\|_1 \|\mathbf{R}\|_1. \tag{3.10}$$

Дифференцируя левую и правую части равенства (3.3) по t, используя (2.1) и переходя к пределу при $t = 1$, имеем

$$\|\omega_{n+1}^{(j)}(t)\|_\infty = 2^{-n}\|T_{n+1}^{(j)}(t)\|_\infty = 2^{-n} p_{n,j},$$

где $p_{n,j} = \prod\limits_{k=0}^{j-1} \dfrac{(n+1)^2 - k^2}{2k-1}$, $j \ge 1$.

Тогда из (3.1) получаем

$$\frac{\mathrm{d}^j(w_* - L_n)}{\mathrm{d}t^j} \le \frac{M_{n+1}p_{n,j}}{2^n(n+1)!}, \quad j \ge 1. \tag{3.11}$$

В соответствии с (3.8), (3.9) и (3.11) приходим к следующей оценке

$$\|\mathbf{R}\|_1 \le \frac{M_{n+1}\rho_n}{2^n(n+1)!},$$

где $\rho_n = 2 + 2p_{n,1} + 2l_* p_{n,2}$.

В результате

$$\|w_*(t) - w_{*n}(t)\|_\infty \le \frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}\left(1 + \rho_n \left\|(\mathbf{S}^+)^{-1}\right\|_1\right) \tag{3.12}$$

и $\|w_*(t) - w_{*n}(t)\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.

4. Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим тонкую длинную прямоугольную нанопластину ($a \ll b$) под действием линейной нагрузки $q_*(x_*) = \alpha_0 + \alpha_1 x_*$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$), которая обобщает два важных практических случая. При $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ получаем постоянную нагрузку $q_*(x_*) = 1$, при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$ пластина находится под гидростатическим давлением $q_*(x_*) = x_*$ [18]. В этом случае дифференциальное уравнение (1.3) имеет аналитическое решение

$$w_{*a}(x_*) = \sum_{i=1}^{6} \kappa_i x_*^{6-i} + \kappa_7 \exp(\kappa_0 x_*) + \kappa_8 \exp(-\kappa_0 x_*), \tag{4.1}$$

где $\kappa_0 = \sqrt{D_p}/l_*$, $\kappa_1 = \alpha_1/(120 D_p)$, $\kappa_2 = \alpha_0/(24 D_p)$, $D_p = 1 + D_*^{(r)}$, а постоянные интегрирования κ_i ($i = \overline{3,\,8}$) определяются из граничных условий (1.4). При $L_h = 0$, $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ функция (4.1) преобразуется к виду [16]. В рамках классической теории Кирхгофа [18] ($l_* = 0$ и $L_h = 0$) имеем

$$w_{*c}(x_*) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}x_*^5 + \alpha_0 x_*^4 - \left(2\alpha_0 + \frac{3\alpha_1}{5}\right)x_*^3 + \left(\alpha_0 + \frac{2\alpha_1}{5}\right)x_*^2\right),$$

при $\alpha_0 = 1$ и $\alpha_1 = 0$ максимальный изгиб пластины равен $w_{*c}(1/2) = 1/384$, что соответствует результатам [16]. В случае нагружения пластины по гидростатическому закону $q_*(x_*) = x_*$ ее максимальный изгиб уменьшается в два раза.

При проведении вычислений в рамках теории микроструктурной деформации (l_*, $L_h \geq 0$) используем значения физических параметров из [19]: $\nu = 0,3$, $E = 200$ ГПа. В табл. 1 для $m = 2$ в (1.4) представлены результаты вычисления безразмерной величины изгиба пластины при действии постоянной нагрузки $q_*(x_*) = 1$ с использованием (2.4) и (2.11) в зависимости от значений параметров l_* и L_h. В этой таблице также приведены значения отклонения построенного решения w_{*n} от точного w_{*a} по бесконечной норме векторов значений этих функций, вычисленных в равномерно распределенных точках на отрезке [0, 1]: $e_\infty = \max\limits_{0 \leq i \leq 100} |w_{*a}(x_{*i}) - w_{*n}(x_{*i})|$. Отклонение интерполяционного полинома $L_n(x_*)$, построенного по формуле (3.5), обозначено $e_{a,\infty}$: $e_{a,\infty} = \|w_{*a} - L_n\|_\infty$. В скобках у числовых значений указана степень у 10. Дополнительно приведем максимальное значение функции $w_{*n}(x_*)$ в рамках классической теории Кирхгофа $2,6042 \cdot 10^{-3}$ ($n = 8$), отклонения e_∞ и $e_{a,\infty}$ в этом случае составляют $9,2 \cdot 10^{-20}$ и $0,1 \cdot 10^{-30}$ соответственно. При нагружении пластины по гидростатическому закону $q_*(x_*) = x_*$ с использованием (2.4) и (2.11) получаем, что максимальный изгиб пластины при выполнении граничного условия (1.4) с $m = 2$ уменьшается в два раза по сравнению с его величиной из табл. 1 в рамках теории микроструктурной деформации, как и в классическом случае ($l_* = 0$ и $L_h = 0$). При этом отклонения e_∞ построенного решения от аналитического по бесконечной норме имеют такой же порядок малости как и отклонения в табл. 1. В случае $m = 3$ для (1.4) в табл. 2 приведены результаты вычисления максимального изгиба пластины $w_{*n}(1/2)$ при действии нагрузки $q_*(x_*) = x_*$ с использованием (2.4) и (2.11) в зависимости от значений параметров l_* и L_h. Из табл. 1 и 2 видно, что граничное условие (1.4) при $m = 3$ приводит к тому, что отношение значений $w_{*n}(1/2)$ не превосходит двух и уменьшается с увеличением значений l_* и L_h. При этом значения e_∞ в табл. 1 и 2 имеют сравнимые порядки малости при фиксированных значениях l_* и L_h.

В табл. 3 приведены соответствующие значения полученных отклонений e_∞ и $e_{a,\infty}$ в зависимости от n при действии нагрузки $q_*(x_*) = (2x_* + 5)\exp x_*$ и $m = 3$ в граничном условии (1.4). Вид $q_*(x_*)$ в этом случае соответствует правой части уравнения Пуассона из [7].

Из табл. 1-3 видно, что решения уравнения изгиба тонкой длинной прямоугольной нанопластины, полученные представленным методом, с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями при сравнительно небольших значениях n. Построенные решения приближаются к соответствующим полиномиальным интерполяциям функций аналитических решений по бесконечной норме в пространстве функций, непрерывных на рассматриваемом отрезке.

По сравнению с методом коллокации без умножения на соответствующие матрицы, точность вычислений предложенным подходом при $l_* =$

$0,02$ и $L_h = 0,4$ превышает более, чем на порядок, что обусловлено применением дискретных преобразований для системы многочленов Чебышева в матричной форме в явном виде, которые не добавляют погрешности к результату при вычислении коэффициентов в разложении решения краевой задачи.

Таблица 1. Отклонения e_∞ и $e_{a,\infty}$ в зависимости от n при $q_*(x_*) = 1$ и $m = 2$ в (1.4)

l_*	L_h	$w_{*n}(1/2)$	e_∞			$e_{a,\infty}$		
		$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0,02	0,01	$2,2040(-3)$	$3,5(-4)$	$8,6(-6)$	$1,8(-11)$	$4,9(-6)$	$5,2(-8)$	$2,0(-14)$
	0,20	$1,9122(-3)$	$3,2(-4)$	$9,6(-6)$	$4,4(-11)$	$4,2(-6)$	$5,8(-8)$	$5,3(-14)$
	0,40	$1,3709(-3)$	$2,5(-4)$	$1,1(-5)$	$3,2(-10)$	$2,8(-6)$	$7,1(-8)$	$4,2(-13)$
0,10	0,01	$1,0277(-3)$	$1,8(-5)$	$7,3(-11)$	$1,2(-19)$	$2,7(-7)$	$1,8(-13)$	$7,8(-30)$
	0,20	$9,4730(-4)$	$2,0(-5)$	$1,4(-10)$	$2,7(-19)$	$3,1(-7)$	$3,7(-13)$	$5,4(-29)$
	0,40	$7,6912(-4)$	$2,4(-5)$	$6,2(-10)$	$3,1(-19)$	$4,1(-7)$	$1,8(-12)$	$4,3(-27)$
0,20	0,01	$4,2172(-4)$	$8,9(-7)$	$3,4(-14)$	$1,2(-19)$	$1,1(-8)$	$3,5(-17)$	$5,1(-30)$
	0,20	$4,0676(-4)$	$1,2(-6)$	$4,3(-14)$	$2,3(-20)$	$1,4(-8)$	$8,0(-17)$	$3,1(-30)$
	0,40	$3,6781(-4)$	$1,9(-6)$	$2,8(-13)$	$6,9(-21)$	$2,4(-8)$	$5,6(-16)$	$1,6(-30)$

Таблица 2. Отклонения e_∞ и $e_{a,\infty}$ в зависимости от n при $q_*(x_*) = x_*$ и $m = 3$ в (1.4)

l_*	L_h	$w_{*n}(1/2)$	e_∞			$e_{a,\infty}$		
		$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0,02	0,01	$1,2786(-3)$	$9,2(-5)$	$2,6(-6)$	$2,8(-11)$	$4,1(-7)$	$3,5(-9)$	$1,9(-15)$
	0,20	$1,0978(-3)$	$8,0(-5)$	$2,6(-6)$	$5,9(-11)$	$3,2(-7)$	$4,6(-9)$	$4,7(-15)$
	0,40	$7,7037(-4)$	$5,7(-5)$	$2,3(-6)$	$2,7(-10)$	$1,8(-7)$	$4,7(-9)$	$3,0(-14)$
0,10	0,01	$9,2346(-4)$	$2,4(-5)$	$5,3(-10)$	$4,8(-19)$	$1,3(-7)$	$1,2(-13)$	$7,7(-30)$
	0,20	$8,2471(-4)$	$2,4(-5)$	$9,0(-10)$	$3,4(-19)$	$1,4(-7)$	$2,2(-13)$	$4,6(-29)$
	0,40	$6,2414(-4)$	$2,3(-5)$	$6,4(-10)$	$8,8(-20)$	$1,5(-7)$	$1,7(-12)$	$4,6(-29)$
0,20	0,01	$4,9857(-4)$	$3,1(-6)$	$4,9(-13)$	$9,5(-20)$	$1,4(-8)$	$6,4(-17)$	$1,7(-30)$
	0,20	$4,6821(-4)$	$3,5(-6)$	$9,8(-13)$	$1,3(-19)$	$1,5(-8)$	$1,4(-16)$	$1,3(-30)$
	0,40	$3,9576(-4)$	$4,5(-6)$	$4,6(-12)$	$4,5(-20)$	$2,0(-8)$	$6,9(-16)$	$1,3(-30)$

В результате погрешность уменьшается быстрее с возрастанием l_* для более гладкой функции решения [1]. Следует заметить, что граничные условия (1.4) выполняются с точностью, превышающей величину e_∞ на несколько порядков, и полученные коэффициенты в разложении функции убывают практически экспоненциально, что позволяет сделать заключение об аналитических свойствах решения [2].

Таблица 3. Отклонения e_∞ и $e_{a,\infty}$ при $q_*(x_*) = (2x_* + 5)\exp x_*$ и $m = 3$ в (1.4)

l_*	L_h	$w_{*n}(1/2)$	e_∞			$e_{a,\infty}$		
		$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$	$n = 8$	$n = 16$	$n = 32$
0,02	0,01	$2,6003(-2)$	$1,9(-3)$	$5,0(-5)$	$4,7(-10)$	$7,7(-6)$	$8,3(-8)$	$3,5(-14)$
	0,20	$2,2327(-2)$	$1,6(-3)$	$5,0(-5)$	$9,9(-10)$	$6,0(-6)$	$8,7(-8)$	$8,5(-14)$
	0,40	$1,5668(-2)$	$1,2(-3)$	$4,5(-5)$	$4,7(-9)$	$3,4(-6)$	$8,7(-8)$	$5,5(-13)$
0,10	0,01	$1,8775(-2)$	$4,8(-4)$	$9,0(-10)$	$8,0(-19)$	$2,3(-6)$	$2,0(-12)$	$1,5(-28)$
	0,20	$1,6768(-2)$	$4,8(-4)$	$1,6(-8)$	$8,4(-19)$	$2,4(-6)$	$3,6(-12)$	$7,2(-28)$
	0,40	$1,2690(-2)$	$4,6(-4)$	$4,8(-8)$	$3,6(-18)$	$2,6(-6)$	$1,4(-12)$	$4,5(-26)$
0,20	0,01	$1,0136(-2)$	$6,1(-5)$	$8,1(-12)$	$2,7(-18)$	$2,3(-7)$	$1,1(-15)$	$4,6(-29)$
	0,20	$9,5187(-3)$	$6,9(-5)$	$1,7(-11)$	$7,1(-19)$	$2,6(-7)$	$2,2(-15)$	$4,4(-29)$
	0,40	$8,0460(-3)$	$8,9(-5)$	$7,6(-11)$	$7,7(-19)$	$3,4(-7)$	$1,2(-14)$	$3,4(-29)$

5. Заключение

В работе в рамках спектрального метода коллокации построено решение дифференциального уравнения изгиба длинной прямоугольной нанопластины путем разложения в ряд по многочленам Чебышева первого рода. Коэффициенты в этом разложении найдены из системы линейных алгебраических уравнений, к которой сведена краевая задача в результате умножения матрицы системы уравнений коллокации в корнях этих многочленов на обратную матрицу к матрице со значениями полиномов Чебышева в точках коллокации и обобщенную обратную матрицу к матрице дифференцирования. При этом для нулевых строк полученной разреженной матрицы системы уравнений осуществлена замена на строки, соответствующие граничным условиям, что приводит к уменьшению погрешности при вычислении коэффициентов и позволяет использовать алгоритмы для разреженных матриц. Получена оценка отклонения построенного решения по бесконечной норме. Представлены результаты вычислительных экспериментов, показывающих эффективность предлагаемого подхода, который может быть применен для построения решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка в рамках теории микроструктурной деформации нанопластин и моментной теории упругости.

Список источников

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Лаборатория знаний, 2020. 636 с.

2. Варин В. П. Аппроксимация дифференциальных операторов с учетом граничных условий // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 8. С. 1251–1271. https://doi.org/10.31857/S004446692308015X
3. Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластины // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2024. Т. 20, № 3. С. 310–323. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301
4. Гермидер О. В., Попов В. Н. О методе коллокации при построении решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода с использованием многочленов Чебышева и Лежандра // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 19–35. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.19
5. Примеры точных решений задач изгиба пластины со свободными лицевыми плоскостями / Е. М. Зверяев, М. Д. Коваленко, Д. А. Абруков, И. В. Меньшова, А. П. Кержаев // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. Т. 46. С. 1–17. https://doi.org/10.20948/prepr-2019-46
6. Михасев Г. И. Длинноволновые изгибные колебания и деформация малоразмерной полосы-балки с учетом поверхностных эффектов // Прикладная механика и техническая физика. 2024. Т. 65, № 2. С. 214–225. https://doi.org/10.15372/PMTF202315379
7. Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кулябов Д. С. Новый подход к формированию систем линейных алгебраических уравнений для решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом коллокаций // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, № 1. С. 36–47. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-36-47
8. Amiraslani A., Corless R. M., Gunasingam M. Differentiation matrices for univariate polynomials // Numerical Algorithms. 2020. Vol. 83. P. 1–31. https://doi.org/10.1007/s11075-019-00668-z
9. Babu B., Patel B. P. Analytical solution for strain gradient elastic Kirchhoff rectangular plates under transverse static loading // European Journal of Mechanics / A Solids. 2019. Vol. 73. P. 101–111. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.07.007
10. The bending-gradient theory for thick plates: existence and uniqueness results / N. Bejjani, K. Sab, J. Bodgi, A. Lebee // Journal of Elasticity. 2018. Vol. 133. P. 37–72. https://doi.org/10.1007/s10659-017-9669-7
11. Corless R. M., Jeffrey D. J. The Turing factorization of a rectangular matrix // ACM SIGSAM Bulletin. 1997. Vol. 31, N 3. P. 20–30. https://doi.org/10.1145/271130.271135
12. Hu X., Wang Z., Hu B. A collocation method based on roots of Chebyshev polynomial for solving Volterra integral equations of the second kind // Applied Mathematics Letters. 2023. Vol. 29, N 108804. P. 1–8. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108804
13. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. 3rd ed. Baltimore : Johns Hopkins University Press, 1996. 728 p.
14. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. Florida : CRC Press, 2003. 335 p.
15. Niiranen J., Niemi A. H. Variational formulations and general boundary conditions for sixth-order boundary value problems of gradient-elastic Kirchhoff plates // European Journal of Mechanics / A Solids. 2017. Vol. 61. P. 164–179. http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.001

16. Papargyri-Beskou S., Giannakopoulos A. E., Beskos D. E. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading // Int. J. Solids Struct. 2010. Vol. 47, N 20. P. 2755–2766. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.06.003
17. Siddique M. U. M., Nazmul I. M. Static bending analysis of BDFG nanobeams by nonlocal couple stress theory and nonlocal strain gradient theory // Forces in Mechanics. 2024. Vol. 17, N 100289. P. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100289
18. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. New York : McGraw-Hill Press, 1959. 580 p.
19. Zhou Y., Huang K. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate // European Journal of Mechanics / A Solids. 2023. Vol. 100, N 105014. P. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105014

References

1. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Numerical methods*. Moscow, Knowledge Laboratory Publ., 2020, 636 p. (in Russian)
2. Varin V.P. Approximation of Differential Operators with Boundary Conditions. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2023, vol. 63, pp. 1381–1400. https://doi.org/10.1134/S0965542523080158
3. Germider O.V., Popov V.N. Mathematical modeling of bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2024, vol. 20, no. 3, pp. 310–323. https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.301 (in Russian)
4. Germider O.V., Popov V.N. On the Collocation Method in Constructing a Solution to the Volterra Integral Equation of the Second Kind Using Chebyshev and Legendre Polynomials. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 19–35. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.1 (in Russian)
5. Zveryaev E.M., Kovalenko M.D., Abrukov D.A., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. Examples of exact solutions for problems of bending plate with free face planes. *Keldysh Institute preprints*, 2019, vol. 46, pp. 1–17. https://doi.org/10.20948/prepr-2019-46 (in Russian)
6. Mikhasev G.I. Long-wave flexural vibrations and deformation of a small size beam considering curface effects. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 2024, vol. 65, no. 2, pp. 214–225. https://doi.org/10.15372/PMTF202315379 (in Russian)
7. Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Kulyabov D.S. A new approach to the formation of systems of linear algebraic equations for solving ordinary differential equations by the collocation method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 36–47 https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-36-47 (in Russian)
8. Amiraslani A., Corless R.M., Gunasingam M. Differentiation matrices for univariate polynomials. *Numerical Algorithms*, 2020, vol. 83, pp. 1–31. https://doi.org/10.1007/s11075-019-00668-z
9. Babu B., Patel B.P. Analytical solution for strain gradient elastic Kirchhoff rectangular plates under transverse static loading. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2019, vol. 73, pp. 101–111. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.07.007
10. Bejjani N., Sab K., Bodgi J., Lebee A. The bending-gradient theory for thick plates: existence and uniqueness results. *Journal of Elasticity*, 2018, vol. 133, pp. 37–72. https://doi.org/10.1007/s10659-017-9669-7

11. Corless R.M., Jeffrey D.J. The Turing factorization of a rectangular matrix. *ACM SIGSAM Bulletin*, 1997, vol. 31, no. 3, pp. 20–30. https://doi.org/10.1145/271130.271135
12. Hu X., Wang Z., Hu B. A collocation method based on roots of Chebyshev polynomial for solving Volterra integral equations of the second kind. *Applied Mathematics Letters*, 2023, vol. 29, no. 108804, pp. 1–8. https://doi.org/10.1016/j.aml.2023.108804
13. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations. 3rd Edition.* Baltimore, Johns Hopkins University Press, 1996, 728 p.
14. Mason J., Handscomb D. *Chebyshev polynomials.* Florida, CRC Press, 2003, 335 p.
15. Niiranen J., Niemi A.H. Variational formulations and general boundary conditions for sixth-order boundary value problems of gradient-elastic Kirchhoff plates. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2017, vol. 61, pp. 164–179. http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.001
16. Papargyri-Beskou S., Giannakopoulos A.E., Beskos D.E. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading. *Int. J. Solids Struct.*, 2010, vol. 47, no. 20, pp. 2755–2766. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.06.003
17. Siddique M.U.M., Nazmul I.M. Static bending analysis of BDFG nanobeams by nonlocal couple stress theory and nonlocal strain gradient theory. *Forces in Mechanics*, 2024, vol. 17, no. 100289, pp. 1–16. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100289
18. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells.* New York, McGraw-Hill Press, 1959, 580 p.
19. Zhou Y., Huang K. On simplified deformation gradient theory of modified gradient elastic Kirchhoff–Love plate. *European Journal of Mechanics / A Solids*, 2023, vol. 100, no. 105014. pp. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.105014

Об авторах

Попов Василий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, 163002, Российская Федерация, v.popov@narfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0803-4419

Гермидер Оксана Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доц., Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, 163002, Российская Федерация, o.germider@narfu.ru, http://orcid.org/0000-0003-3002-281X

About the authors

Vasilii N. Popov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation, v.popov@narfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0803-4419

Oksana V. Germider, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk, 163002, Russian Federation, o.germider@narfu.ru, http://orcid.org/0000-0003-3002-281X

Поступила в редакцию / Received 27.06.2025
Поступила после рецензирования / Revised 12.09.2025
Принята к публикации / Accepted 16.09.2025