ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Серия «Математика»
2026. Т. 55. С. 3—14

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.521
MSC 26D05, 42A05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.3

Об одном асимптотическом свойстве ядер Дирихле

Е. Д. Алферова[1,2]✉, **В. Е. Подольский**[1,2], **В. Б. Шерстюков**[1,2]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
[2] Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Российская Федерация
✉ elena.alferova@gmail.com

Аннотация: Исследуется ядро Дирихле, свойства которого — суммы косинусов кратных дуг — представляют несомненный интерес в теории тригонометрических рядов. Например, хорошо известны результаты об асимптотическом поведении констант Лебега, представляющих собой интегральные нормы ядер Дирихле. Эти результаты постоянно развиваются и обобщаются применительно к различным системам функций как в одномерной, так и в многомерной ситуациях. Найден главный член асимптотики для величины глобального минимума ядра Дирихле при стремлении его номера к бесконечности. Главный член есть произведение означенного номера на отрицательную константу, которая совпадает с величиной глобального минимума sinc-функции (кардинального синуса). В доказательстве используется связь ядер Дирихле с многочленами Чебышева второго рода. Отмечено, что результат претерпевает количественные изменения при переходе к лакунарным суммам косинусов. Интерес к подобным конструкциям вызван поставленной несколько лет назад Л. Е. Россовским и А. А. Товсултановым задачей о вычислении спектрального радиуса для специального однопараметрического семейства функциональных операторов. Вопрос сводится к изучению поведения «длинных» произведений синусов с лакунами в аргументах. Показано, что выявленное асимптотическое свойство ядер Дирихле оказывается полезным в схожей «нелакунарной» задаче.

Ключевые слова: ядро Дирихле, многочлены Чебышева второго рода, произведение синусов, sinc-функция

Благодарности: Статья подготовлена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (грант Минобрнауки № 075-15-2025-345).

Ссылка для цитирования: Алферова Е. Д., Подольский В. Е., Шерстюков В. Б. Об одном асимптотическом свойстве ядер Дирихле // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 55. С. 3–14.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.3

On an Asymptotic Property of Dirichlet Kernels

Elena D. Alferova[1,2✉], **Vladimir E. Podolskii**[1,2], **Vladimir B. Sherstyukov**[1,2]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
[2] Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation
✉ elena.alferova@gmail.com

Abstract: The main object of our study is the Dirichlet kernel. The properties of this trigonometric polynomial — the sum of cosines of multiple arcs — are of undoubted interest in the theory of trigonometric series. For example, the results on the asymptotic behavior of the Lebesgue constants, which are the integral norms of the Dirichlet kernels, are well known. These results are constantly being developed and generalized as applied to various systems of functions in both one-dimensional and multidimensional situations. In this paper, we find the leading term of the asymptotics for the value of the global minimum of the Dirichlet kernel as its number tends to infinity. The leading term is the product of the said number by a negative constant, which coincides with the value of the global minimum of the sinc-function (cardinal sine). The proof uses the connection between Dirichlet kernels and Chebyshev polynomials of the second kind. As can be seen from the authors' previous works, the result undergoes quantitative changes in the transition to lacunary sums of cosines. Our interest in such constructions is caused by the problem posed several years ago by L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov on calculating the spectral radius for a special one-parameter family of functional operators. The question reduces to studying the behavior of "long" products of sines with lacunae in the arguments. It is shown that the revealed asymptotic property of Dirichlet kernels turns out to be useful in a similar "non-lacunary" problem.

Keywords: Dirichlet kernel, Chebyshev polynomials of the second kind, product of sines, sinc–function

Acknowledgements: The article was prepared with the financial support of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (Ministry of Education and Science grant No. 075-15-2025-345).

For citation: Alferova E. D., Podolskii V. E., Sherstyukov V. B. On an Asymptotic Property of Dirichlet Kernels. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 55, pp. 3–14. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.55.3

1. Введение. Формулировка результатов

Как известно, ядром Дирихле называется тригонометрический полином

$$D_n(x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

вещественной переменной x. Выражение (1.1) играет весьма важную роль в теории функций благодаря тому, что через свертку с ним записывается частичная сумма тригонометрического ряда Фурье (см. монографии [4, гл. I, § 29, 31], [8, гл. II, § 5]). Четная 2π-периодическая функция (1.1) устроена так, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) = \max_{x\in[0,\pi]} D_n(x) = D_n(0) = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Глобальные максимумы «нормированных» ядер Дирихле $D_n(x)/n$ образуют убывающую к единице последовательность $1 + 1/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Обсуждаемый в работе эффект формулируется просто: глобальные минимумы величин $D_n(x)/n$ также образуют сходящуюся числовую последовательность. Точный результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Для ядер Дирихле (1.1) справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \min_{x\in[0,\pi]} \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \cos x_0, \tag{1.2}$$

где $x_0 = 4,4934...$ — единственный на интервале $(\pi, 3\pi/2)$ корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$. Величина предела в (1.2) равна $-0,2172... = -1/\sqrt{1+x_0^2}$ и совпадает также с глобальным минимумом функции $\operatorname{sinc} x \equiv \sin x/x$.

Проиллюстрируем теорему 1 расчетами, проведенными без компьютерной помощи. При $n = 1, 2, 3$ величины

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} D_1(x) = \min_{x\in[0,\pi]} D_1(x) = D_1(\pi) = -\frac{1}{2} = -0,5,$$

$$\frac{1}{2}\inf_{x\in\mathbb{R}} D_2(x) = \frac{1}{2}\min_{x\in[0,\pi]} D_2(x) = \frac{1}{2} D_2\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{5}{16} = -0,3125,$$

$$\frac{1}{3}\inf_{x\in\mathbb{R}} D_3(x) = \frac{1}{3}\min_{x\in[0,\pi]} D_3(x) = \frac{1}{3} D_3\left(\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{6}\right) =$$

$$= -\frac{7}{162}\left(2\sqrt{7}+1\right) = -0,2718...$$

обнаруживают тенденцию к монотонному возрастанию. Будет ли это общим свойством последовательности

$$d_n \equiv \frac{1}{n} \inf_{x \in \mathbb{R}} D_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

нам неизвестно. Другой вопрос, имеющий определенный интерес, состоит в нахождении второго члена асимптотики

$$d_n = \cos x_0 + o(1), \quad n \to \infty,$$

эквивалентной предельному соотношению (1.2).

Отметим, что асимптотическое поведение глобальных минимумов лакунарных сумм косинусов, по сравнению с величинами (1.3), будет несколько иным. Например, как показано в [3, §3], существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2^k x\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \min_{x\in[0,\pi/2]} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2^k x\right) = -\frac{1}{2}.$$

Более общий результат, полученный в [1, теорема 3], дает для произвольно зафиксированного $\nu \in \mathbb{N}$ двустороннюю оценку

$$-\cos\frac{\pi}{2^\nu+1} - \frac{2}{(2^\nu+1)n} \leqslant \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2^{\nu k} x\right) \leqslant -\cos\frac{\pi}{2^\nu+1},$$

которая действует при всех $n \in \mathbb{N}$ и влечет асимптотику

$$\frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(2^{\nu k} x\right) = -\cos\frac{\pi}{2^\nu+1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Кроме того, согласно [2, §3], можно указать семейство $\mathbb{P}$, состоящее из специальных квадратичных иррациональностей, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(p^k x\right) = -1$$

для любого $p \in \mathbb{P}$ (в частности, этому семейству принадлежит число $p = \sqrt{2}+1$, известное как серебряное сечение).

Серия работ [1–3] (см. также [7], [11]) появилась как отклик на поставленную в [12] задачу о вычислении спектрального радиуса для одного семейства функциональных операторов, сводящуюся к нахождению предела последовательности

$$\left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} \left|\sin\left(p^k x\right)\right|\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

при различных значениях $p \in \mathbb{R}$. Величина (1.4) является своеобразным мультипликативным аналогом величины

$$\frac{1}{n} \inf_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(p^k x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

(подробности см. в [1–3]). Поэтому естественно ожидать, что предельное свойство (1.2) ядер Дирихле окажется полезным при изучении последовательности

$$\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образованной по принципу (1.4), но без лакун в аргументе синуса.

Теорема 2. *Для последовательности, заданной при $n \in \mathbb{N}$ формулой*

$$a_n \equiv \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n} = \left(\max_{x \in [0,\pi/2]} \prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n}, \tag{1.5}$$

верны соотношения

$$0,5 \leqslant \varliminf_{n \to \infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} a_n \leqslant \sin\frac{x_0}{2} = 0,7801... \tag{1.6}$$

с тем же значением x_0, что и в теореме 1.

Теоремы 1, 2 будут доказаны в заключительных разделах работы. Нижняя граница в (1.6) извлекается из самых элементарных соображений. Верхняя граница получена с привлечением теоремы 1. Есть веские основания полагать, что последовательность (1.5) является сходящейся, но для нахождения ее предела требуется отдельное исследование, выходящее за рамки этой статьи.

2. Многочлены Чебышева второго рода

Будем использовать связь ядер Дирихле с многочленами Чебышева второго рода $U_{2n}(t)$ (см., например, [10, гл. III, §6]), выражаемую посредством формулы

$$D_n(2x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin((2n+1)x)}{2\sin x} \equiv \frac{1}{2}\, U_{2n}(\cos x). \tag{2.1}$$

Как известно,

$$U_2(t) = 4t^2 - 1, \quad U_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1, \quad U_6(t) = 64t^6 - 80t^4 + 24t^2 - 1.$$

Первичные расчеты показывают, что

$$\min_{|t|\leqslant 1} U_2(t) = -1, \quad \min_{|t|\leqslant 1} U_4(t) = -\frac{5}{4} = -1,25, \\ \min_{|t|\leqslant 1} U_6(t) = -\frac{7\left(2\sqrt{7}+1\right)}{27} = -1,6311..., \tag{2.2}$$

и полезны при сравнении со следующим общим результатом.

Лемма 1. *Величина глобального минимума многочлена Чебышева второго рода с четным номером $2n$ эквивалентна при $n \to \infty$ величине $(\sin x_0/x_0)\, 2n$, где*

$$\frac{\sin x_0}{x_0} \equiv \operatorname{sinc} x_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{sinc} x$$

с прежним значением x_0 из формулировки теоремы 1.

Доказательство. Вначале заметим, что

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} U_{2n}(t) = \min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) \tag{2.3}$$

при каждом $n \in \mathbb{N}$. Действительно, поскольку

$$U_{2n}(t) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \left(t^2-1\right)^k t^{2n-2k},$$

то для всех $|t| \geqslant 1$ и $n \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$U_{2n}(t) = (2n+1)\, t^{2n} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} \left(t^2-1\right)^k t^{2n-2k} \geqslant 2n+1 = U_{2n}(1).$$

Тем самым

$$\min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) \leqslant U_{2n}(1) \leqslant \inf_{|t|\geqslant 1} U_{2n}(t), \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда и следует нужное.

Учитывая (2.1), формулу (2.3) можно дополнить так:

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} U_{2n}(t) = \min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) = \min_{x\in\left(\frac{\pi}{2n+1},\frac{3\pi}{2(2n+1)}\right)} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дальнейший несложный анализ поведения производной

$$\left(\frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x \cos\left((2n+1)x\right)}{\sin^2 x}\Big((2n+1)\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\left((2n+1)x\right)\Big)$$

на промежутке $x \in (\pi/(2n+1), 3\pi/(4n+2))$ приводит к эквивалентности

$$\min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) \sim h_n \equiv \frac{\sin x_0}{\sin \frac{x_0}{2n+1}} = U_{2n}\left(\cos \frac{x_0}{2n+1}\right) = 2D_n\left(\frac{2x_0}{2n+1}\right) \quad (2.4)$$

при $n \to \infty$. Именно это в чуть другой, но равносильной форме и утверждается в лемме 1. $\square$

Каждый из первых трех членов

$$h_1 \equiv \frac{\sin x_0}{\sin(x_0/3)} = -0,9787..., \quad h_2 \equiv \frac{\sin x_0}{\sin(x_0/5)} = -1,2474...,$$

$$h_3 \equiv \frac{\sin x_0}{\sin(x_0/7)} = -1,6303...$$

последовательности h_n из (2.4) уже́ очень близок к соответствующему точному значению, указанному в (2.2).

Отметим, что лемма 1 не имеет аналога для многочленов Чебышева второго рода с нечетными номерами, поскольку

$$U_{2n-1}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} \left(t^2-1\right)^k t^{2n-2k-1},$$

и очевидно

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} U_{2n-1}(t) = -\infty$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

3. Доказательство теоремы 1

Ввиду связи (2.1) имеем

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(2x) = \frac{1}{2}\min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По лемме 1, учитывая (2.3), запишем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \inf_{t\in\mathbb{R}} U_{2n}(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) = \frac{\sin x_0}{x_0}$$

со значением x_0, описанным в теореме 1. Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \min_{|t|\leqslant 1} U_{2n}(t) = \frac{\sin x_0}{x_0} = \cos x_0.$$

Остальные части соотношения (1.2) очевидны, как и равенство

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x_0}{x_0}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Финальную часть работы предварим известным вспомогательным утверждением (см. [9, гл. 6, §6.1]), обоснование которого полезно для полноты изложения.

Лемма 2. *При всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество*

$$\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2^n}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ запишем двучлен $z^{n+1} - 1$ двумя способами и получим тождество

$$\prod_{k=1}^{n}\left(z - e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}\right) = z^n + \ldots + z + 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В частности, при $z = 1$ имеем

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}\right) = n+1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, левую часть можно заменить ее модулем, который записывается как

$$\prod_{k=1}^{n}\left|1 - e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}\right| = \prod_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n+1}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n+1}} = 2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n+1}.$$

Проверка формулы (4.1) завершена. □

Известно более общее соотношение

$$\prod_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n+1} + z\right) = \frac{\sin\left((n+1)z\right)}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C},$$

из которого (4.1) выводится делением на $\sin z$ с последующим переходом к пределу при $z \to 0$.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 2. Воспользуемся формулой (4.1) из леммы 2 и получим, что

$$a_n \equiv \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} \prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n+1}\right)^{1/n} = \frac{(n+1)^{1/n}}{2}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда извлекаем ограничение $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0,5$, т. е. оценку снизу в (1.6).

С другой стороны, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$ неравенство Коши о среднем дает

$$\left(\prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n} = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{n} \sin^2(kx)\right)^{1/n}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)\right)}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left(\prod_{k=1}^{n} |\sin(kx)|\right)^{1/n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} D_n(2x)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Как следствие,

$$a_n \leqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n} \inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме 1 подкоренное выражение стремится к числу

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x_0 = \sin^2\frac{x_0}{2}$$

при $n \to \infty$. Тем самым $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \sin(x_0/2)$, и оценка сверху в (1.6) получена. Доказательство теоремы 2 проведено.

5. Заключение

Завершая работу над статьей, авторы неожиданно обнаружили два интересных наброска о минимальном значении ядра Дирихле (первый совсем краткий, второй более развернутый), которые на своих персональных страницах в сети в разное время выложили Alan Wiggins и Idris David Mercer (https://www-personal.umd.umich.edu/~adwiggin и https://idmercer.com/). Предложенные в упомянутых материалах подходы отличны от нашего; связь с многочленами Чебышева и возможные приложения не обсуждаются. Каких-либо публикаций на эту тему в математических изданиях найти не удалось. Имеется, впрочем, одно исключение. Как выяснилось, формула (1.2) из теоремы 1 в завуалированной форме и с другим обоснованием содержится в работе [6, разд. 2]. В этой связи публикация результата в чистом виде с сопутствующими дополнениями и связями представляется полезной. Укажем еще, что возрастание (пока гипотетическое) последовательности (1.3) есть свойство более сильное, чем возрастание последовательности

$$\frac{1}{2n+1}\inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

фактически доказанное в [6, лемма 2.2]. Отметим, наконец, что четные тригонометрические полиномы, близкие к $D_n(x)$, а также величины, подобные

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} D_n(x) = \min_{x\in[0,\pi]} D_n(x),$$

возникают в экстремальных задачах, изучаемых А. С. Беловым (помимо цитированной работы [6] см., например, [5]).

Список источников

1. Алферова Е. Д., Подольский В. Е., Шерстюков В. Б. Элементарный метод в задаче о вычислении спектрального радиуса для специального семейства функциональных операторов // Вестник Московского университета. Серия 1, Математика. Механика. 2025. № 3. С. 3–11. https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-66-3-1
2. Алферова Е. Д., Подольский В. Е., Шерстюков В. Б. Асимптотическое поведение «длинных» произведений синусов и числа Пизо // Математические заметки. 2025. Т. 117, № 1. С. 16–31. https://doi.org/10.4213/mzm14427
3. Алферова Е. Д., Шерстюков В. Б. О вычислении предела специальной последовательности тригонометрических функций // Математические заметки. 2024. Т. 115, № 2. С. 298–303. https://doi.org/10.4213/mzm14160
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М. : Физматлит, 1961. 936 с.
5. Белов А. С. Об экстремальной задаче о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 105–121. https://doi.org/10.1134/S0081543812050070
6. Белов А. С. Об асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, № 5. С. 27–67. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2483-5
7. Журавлев Н. Б., Россовский Л. Е. Спектральный радиус параметрического семейства функциональных операторов // Успехи математических наук. 2020. Т. 75, № 5. С. 195–196. https://doi.org/10.4213/rm9967
8. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М. : Мир, 1965. 615 с.

9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М. : Наука, 1981. 800 с.
10. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. Изд. 2-е. М. : Наука, 1979. 416 с.
11. Zhuravlev N. B., Rossovskii L. E. Spectral radius formula for a parametric family of functional operators // Regular and Chaotic Dynamics. 2021. Vol. 26, N 4. P. 392–401. https://doi.org/10.1134/S1560354721040055
12. Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A. Elliptic functional differential equation with affine transformation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2019. Vol. 480, N 2, 123403. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123403

References

1. Alferova E.D., Podolskii V.E., Sherstukov V.B. Elementary method in the problem of calculating the spectral radius for a special family of functional operators. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2025, vol. 80, no. 3, pp. 151–159. https://doi.org/10.3103/S0027132225700366
2. Alferova E.D., Podolskii V. E., Sherstyukov V. B. Asymptotic behavior of “long” products of sines and the Pisot numbers. *Mathematical Notes*, 2025, vol. 117, no. 1, pp. 14–27. https://doi.org/10.1134/S000143462501002X
3. Alferova E.D., Sherstyukov V.B. Calculation of the Limit of a Special Sequence of Trigonometric Functions. *Mathematical Notes*, 2024, vol. 115, no. 2, pp. 269–274. https://doi.org/10.1134/S0001434624010255
4. Bari N.K. *Trigonometricheskie ryady* [Trigonometric series]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 936 p.
5. Belov A.S. On the extremal problem about the minimum of the free term of a nonnegative trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, no. 1, pp. 55–72. https://doi.org/10.1134/S0081543812050070
6. Belov A.S. On the asymptotic solution of one extremal problem related to nonnegative trigonometric polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 209, no. 1, pp. 19–50. https://doi.org/10.1007/s10958-015-2483-5
7. Zhuravlev N.B., Rossovskii L.E. The spectral radius of a certain parametric family of functional operators. *Russian Math. Surveys*, 2020, vol. 75, no. 5, pp. 971–973. https://doi.org/10.1070/RM9967
8. Zygmund A. *Trigonometric Series. Vol. 1*. Cambridge, 1959, 404 p.
9. Prudnikov A.P., Brychkov A.Yu., Marichev O.I. *Integraly i ryady. Elementarnye funktsii.* [Integrals and series. Elementary functions.] Moscow, Nauka Publ., 1981, 800 p.
10. Sujetin P.K. *Klassicheskie ortogonalnye mnogochleny.* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 416 p.
11. Zhuravlev N.B., Rossovskii L.E. Spectral radius formula for a parametric family of functional operators. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2021, vol. 26, no. 4, pp. 392–401. https://doi.org/10.1134/S1560354721040055
12. Rossovskii L.E., Tovsultanov A.A. Elliptic functional differential equation with affine transformation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, vol. 480, no. 2. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123403

Об авторах

Алферова Елена Дмитриевна, канд. физ.-мат. наук, доц., Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, 119991, Российская Федерация, elena.alferova@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-1321-5848

Подольский Владимир Евгеньевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, 119991, Российская Федерация, wpve@yandex.ru

Шерстюков Владимир Борисович, д-р физ.-мат. наук, проф., Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, 119991, Российская Федерация, shervb73@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-0203-3729

About the authors

Elena D. Alferova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof., Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991, Russian Federation, elena.alferova@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-1321-5848

Vladimir E. Podolskii, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991, Russian Federation, wpve@yandex.ru

Vladimir B. Sherstyukov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Lomonosov Moscow State University; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991, Russian Federation, shervb73@gmail.com, https://orcid.org/0009-0007-0203-3729

Поступила в редакцию / Received 04.07.2025
Поступила после рецензирования / Revised 11.09.2025
Принята к публикации / Accepted 15.09.2025