Серия «Математика»
2025. Т. 54. С. 129—142

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 510.643; 517.11
MSC 03F25, 03B35
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.129

# Разрешимость глобальной допустимости правил вывода в логике $S4$

**В. В. Римацкий**[1]✉

[1] Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация
✉ Gemmeny@rambler.ru

**Аннотация**:
Исследуется проблема разрешимости глобально допустимых правил логики $S4$. Для правил, модель для которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам, получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике $S4$ ($Grz$). Указанные свойства модели $\mathfrak{M}(r, X)$ не зависят от выбора заданной логики, что позволило применить технику истинности правила на $n$-характеристической модели. На основе полученного описания построен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в логике $S4$ ($Grz$) разрешима.

**Ключевые слова:** модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, глобально допустимые правила вывода

**Благодарности**: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Красноярского краевого фонда науки (проект № 23-21-00213 и проект № 25-21-20011 https: //rscf.ru/project/25-21-20011/ ).

**Ссылка для цитирования**: Римацкий В. В. Разрешимость глобальной допустимости правил вывода в логике $S4$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 54. С. 129–142.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.129

Research article

# Decidability of Global Admissibility of Inference Rules in Logic $S4$

**Vitaliy V. Rimatskiy**[1]✉

[1] Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ Gemmeny@rambler.ru

**Abstract**:
In the early 2000s, the key questions of the theory of admissible rules (decidability by admissibility, the presence of a basis) were resolved for most basic non-classical logics. The question arose about the direction of development of this theory. One of the directions of further study of admissible rules became globally admissible inference rules, i.e. rules admissible in all (finitely approximable) extensions of a given logic or in some class of extensions. For them, the problem of decidability, the presence of a finite or explicit basis, etc. also arises.
In the presented work the problem of decidability of globally admissible rules of logic $S4$ is investigated. For rules, the model for which satisfies some natural properties, the necessary and sufficient condition of global admissibility in logic $S4$ ($Grz$) is obtained. The specified properties of the model $M(r;X)$ do not depend on the choice of the given logic, which allowed to apply the technique of truth of the rule on the n-characteristic model. Based on the obtained description, an algorithm for checking the global admissibility of an arbitrary rule in a reduced form is proposed. Thus, the problem of global admissibility in logic $S4$ ($Grz$) is decidable.

**Keywords:** modal logic, frame and model Kripke, admissible and globally admissible inference rule

**Acknowledgements**: The research was financially supported by the Russian Science Foundation, Krasnoyarsk Regional Fund of Science (Project No. 23-21-00213 and Project No. 25-21-20011 https: //rscf.ru/project/25-21-20011/ )

**For citation**: Rimatskiy V. V. Decidability of Global Admissibility of Inference Rules in Logic $S4$. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 54, pp. 129–142. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.129

## 1. Введение

Теория допустимых правил вывода (ДПВ), введенных Лоренценом в 1955 г. [12], возникла на стыке теории доказательств и неклассической логики. Напомним, что в заданной логике $L$ *правило вывода допустимо*, если множество теорем $L$ замкнуто относительно данного правила. Прямо из определения следует, что совокупность всех допустимых в логике правил — наиболее общий вид правил, которые можно добавить к логике, не изменяя множество доказуемых в $L$ теорем, при этом значительно усилив ее дедуктивную силу.

Изучение допустимых правил вывода было стимулировано постановкой проблемы Фридмана [7] о разрешимости интуиционистской логики $Int$ относительно допустимости: существует ли алгоритм распознавания допустимости правила вывода в интуиционистской логике? Для классической логики вопрос допустимости правил вывода решался тривиально: допустимы только выводимые в логике правила вывода. В случае неклассических логик оказалось (см. примеры [1], [13]), что в этих логиках существуют допустимые, но не выводимые в логике правила. Для широкого класса неклассических логик ($Int, KC, K4, S4, S5, S4.3$ и др.) проблема разрешимости по допустимости правил вывода была решена В. В. Рыбаковым в середине 1980-х гг. (см., например, [6; 17]). Однако разрешающий алгоритм не позволял описать допустимые правила в легко обозримом виде. Для большинства базовых и некоторых табличных логик явный базис допустимых правил был описан в [9–11; 15; 16] в начале 2000-х. Возник вопрос о дальнейшем развитии теории допустимых правил.

Одним из направлений изучения допустимых правил могло бы стать использование допустимых правил вывода для описания нетривиальных семантических свойств неклассических логик (см. описание слабого свойства ко-накрытий [4;8]). Другим направлением дальнейшего изучения допустимых правил вывода неклассических логик стали глобально допустимые правила вывода (введенные в 2005 г. в [18]), т. е. правила, допустимые не только в заданной модальной логике $L$ или $S4$, а в целом классе ее финитно аппроксимируемых расширений. Такие правила развивают и обобщают понятие допустимого правила вывода. Как и для допустимых правил заданной индивидуальной логики, для глобально допустимых правил также возникает проблема разрешимости (проблема Фридмана), наличия конечного или явного базиса (проблема Кузнецова) и т. д.

Вероятно, практическое применение глобально допустимых правил может быть основано на следующем наблюдении. Известно, что в компьютерных науках объекты или явления часто могут быть описаны с точки зрения различных неклассических логик (модальных, временных и т. д.). Наличие правил вывода, допустимых сразу во всех логиках (достаточно широком классе таких логик), позволит по-новому взглянуть на исследуемый объект или явление, получить новые следствия из имеющихся данных.

На сегодняшний день известно относительно мало результатов, посвященных изучению глобально допустимых правил вывода. В короткой заметке [18] была доказана редукция глобальной допустимости к табличной допустимости: правило глобально допустимо в логике $L$, если и только если оно допустимо во всех табличных расширениях логики $L$. В [3] получен явный (бесконечный) базис правил вывода, глобально допустимых в модальных предтабличных логиках $PT2, PT3$. В [4] был описан явный базис глобально допустимых правил для (бесконечного класса) расширений логики $S4$ со слабым свойством ко-накрытий.

Представленная работа продолжает изучение глобально допустимых правил логики $S4$ и развивает результаты, полученные в [2; 5]. Для заданного правила в редуцированной форме строится модель из формул посылки правила. В указанных статьях [2; 5] были описаны свойства этой модели (условия), наличие которых гарантировало глобальную допустимость или недопустимость заданного правила в логике $S4$. Их описание позволило существенно сузить множество правил (моделей для правил), где вопрос глобальной допустимости оставался открытым (см. свойства (1)–(4) в теореме 2).

Для правил в редуцированной форме, модель которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам (свойства (1)–(4)), получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике $S4$ ($Grz$). На основе полученного критерия построен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в $S4$ ($Grz$) разрешима.

## 2. Определения, предварительные результаты

Все необходимые определения, обозначения можно найти, например, в [2; 5] Для детального знакомства с семантикой модальных логик и теорией допустимых правил рекомендуем монографию [17]. Однако для полноты изложения напомним вкратце основные определения и обозначения, используемые далее. Мы рассматриваем только логики, расширяющие $S4$, поэтому все фреймы рефлексивны и транзитивны.

Говорим, что фрейм $\mathcal{F}$ является $\lambda$-*фреймом*, если все теоремы логики $\lambda$ истинны на $\mathcal{F}$ при любом означивании переменных. Соответственно, $\lambda(\mathcal{F})$ – множество формул, истинных на $\mathcal{F}$ – есть логика, порожденная фреймом $\mathcal{F}$.

Будем говорить, что сгустки $C_1, C_2, \dots, C_n$ некоторого фрейма $F$ *попарно не сравнимы по отношению* $R$, если справедливо: $\forall C_i, C_j, 1 \leq i, j \leq n$, $\forall x \in C_i, y \in C_j(\neg(xRy)\&\neg(yRx))$, т. е. из элементов одного сгустка данного множества сгустков не достижимы по отношению $R$ элементы другого сгустка. Любое множество попарно несравнимых по отношению $R$ сгустков фрейма $F$ называется *антицепью.* Антицепь $\mathcal{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathcal{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.*

Пусть $\mathcal{F} = \langle F, R\rangle$ — некоторый фрейм. Для любого элемента $a \in F$ обозначим $a^R = \{x|aRx\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент $a$ (сгусток $C(a)$) *порождает как корень* подфрейм $a^R$ ($C(a)^R$ соответственно) фрейма $F$. Аналогично для множества $X \subseteq F$ определяем $X^R := \cup\{x^R|x \in X\}$ и $X^{<R} = X^R \setminus X$ и также будем говорить, что множество $X \subseteq F$ порождает подфрейм $X^R$ или $X^{<R}$ соответственно. Далее, помимо стандартного обозначения фреймов прописными латинскими буквами ($F$, $\mathcal{F}, G, \dots$), также будем использовать и обозначения $a^R$, $C^R$, $X^R, \dots$ для подфреймов (фреймов), порожденных элементом $a \in F$, сгустком $C \in F$ или множеством $X \subseteq F$ соответственно.

Фрейм $\mathcal{F}$ – *корневой*, если существует элемент $a \in \mathcal{F}$ такой, что $\forall b \in \mathcal{F}\ aRb$. Данный элемент $a$ (и сгусток $C(a)$) называем также *корнем* $\mathcal{F}$. Сгусток $C(a)$ из $\mathcal{F}$ есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \backslash C(a) = X^R := \cup\{x^R | x \in X\}$. Говорим, что *элемент* $a$ *есть ко-накрытие* для $X \subseteq \mathcal{F}$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для $X$. $\lambda$*-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень $\lambda$-фрейм.

*Глубиной элемента* $x$ *фрейма (модели)* $\mathcal{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего $x$. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathcal{F}$ глубины не более чем $n$ будем обозначать $S_{\leq n}(\mathcal{F})$, а множество элементов глубины $n$ обозначим $S_n(\mathcal{F})$.

Модель $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, называется $n$*-характеристической для логики* $\lambda$ тогда и только тогда, когда для любой формулы $\alpha$ от переменных $p_1, \dots, p_n$ выполняется $\alpha \in \lambda \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$ (см. Опр. 3.3.2 [17] ). Построение и свойства этой модели можно найти в гл. 3 [17].

В данном исследовании нам также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорим, что *правило* $r$ *имеет редуцированную форму*, если $r := \{\bigvee_{1\leq j\leq m} \phi_j / x_0\}$, где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i},\ a_i, b_i \in \{0,1\};\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Для каждого члена $\phi_j$ посылки правила в редуцированной форме определим также множества

$\theta_1(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 0\}$; $\quad \theta_2(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 0\}$;
$\theta_3(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ a_j = 1\}$; $\quad \theta_4(\phi_j) := \{x_j :\ 0 \leq j \leq k,\ b_j = 1\}$.

Для правила $r$ в редуцированной форме множество всех формул $\phi_j$ в посылке обозначим как $Pr(r)$.

**Утверждение 1** (см. гл. 3.1 [17])**.** *Для любого модального правила вывода $R$ существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное $R$ относительно истинности на $S4$-алгебрах и $S4$-фреймах; $R$ и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4$.*

Напомним определение глобально допустимого правила вывода, введенное в [18]. Правило вывода $r$ *глобально допустимо в логике* $L$, если $r$ допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих логику $L$. Набор правил вывода $\mathcal{R}$ называется *базисом глобально допустимых правил логики* $L$, если: 1) каждое правило из $\mathcal{R}$ глобально допустимо в $L$; 2) любое глобально допустимое в $L$ правило выводится из $\mathcal{R}$ во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $L$.

Основным результатом [18] была редукция глобальной допустимости правила в логике $S4$ ($Int$) к допустимости во всех табличных расширениях этой логики:

**Теорема 1** (см. Т. 3 [18]). *Правило вывода $r$ допустимо во всех финитно аппроксимируемых логиках, расширяющих $S4$ ($Int$) $\iff$ $r$ допустимо во всех табличных логиках (в том числе порожденных конечными корневыми $S4$-фреймами), расширяющих $S4(Int)$.*

## 3. Вспомогательный результат

Определим модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для правила $r$ (см. гл. 3.1 [17]). Пусть задано правило вывода $r$ в редуцированной форме. И пусть множество $X \subseteq Pr(r)$ состоит из всех членов посылки правила, таких, что $\forall \phi_j \in X(\theta_1(\phi_j) \subseteq \theta_2(\phi_j))$. Модель $\mathfrak{M}(r, X)$ построена на множестве $X$ с отношением $R$ и означиванием $V$: $\forall \phi_j, \phi_k \in X$ $(\phi_j R \phi_k \iff \theta_2(\phi_k) \subseteq \theta_2(\phi_j))$; $\forall \phi_j \in X, \forall p \in Var(r)$ $(\phi_j \in V(p) \iff p \in \theta_1(\phi_1))$. Понятно, что отношение $R$ рефлексивно и транзитивно на множестве $X$.

Пусть $G$ — произвольный конечный $S4$-фрейм (модель), первый слой которого содержит одноэлементный сгусток $e_1$. Для произвольного элемента $y \in G$ определим локальную компоненту $K_c(y)$ следующим образом. Пусть $\mathcal{F}_0 := y^R \bigsqcup \{e_1\}$. На каждом шаге построения $i > 0$ для каждой нетривиальной антицепи $\mathcal{A}_j \subseteq S_{\leq i+1}(\mathcal{F}_i)$, имеющей одноэлементное ко-накрытие в $G$, добавляем одно из них к $\mathcal{F}_{i+1}$ (в случае, когда антицепь имеет строго больше одного ко-накрытия, выбираем одно из них). Через конечное число шагов процесс построения оборвется в силу конечности $G$. Полученный в результате фрейм и есть локальная компонента $K(y)$.

Заметим, что локальная компонента определяется неоднозначно, если существуют дубли ко-накрытий. Однако антицепь имеет ко-накрытие в локальной компоненте $\iff$ данная антицепь имеет ко-накрытие в $G$. Кроме того, локальная компонента – конечный фрейм. Наличие всех необходимых ко-накрытий в локальной компоненте элемента $c \in Ch_n(\lambda)$ позволяет сформулировать:

**Утверждение 2.** *Для любого $n$ и произвольного элемента $c \in Ch_n(\lambda)$ существует p-морфизм из фрейма n-характеристической модели $Ch_n(\lambda)$ на локальную компоненту $K(c)$ данного элемента.*

Пусть задано правило $r$ в редуцированной форме и модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для этого правила. Используя результаты, полученные в [2], рассмотрим сначала следующие (тривиальные) случаи (исключив их в дальнейшем):

**Лемма 1.** *(1) Если* $\forall\,\phi \in S_1(\mathfrak{M}(r,X))$ *выполняется* $\theta_1(\phi) \neq \theta_2(\phi)$*, то правило* $r$ *глобально допустимо в логике* $S4$*.*

*(2) Если* $\forall\,\phi \in \mathfrak{M}(r,X)$ *выполняется* $x_0 \in \theta_1(\phi)$*, то правило* $r$ *глобально допустимо в* $S4$*. Если существует* $\phi_0 \in Pr(r)\ :\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)$ *и при этом выполняется также* $\theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0)$*, то правило* $r$ *недопустимо глобально в логике* $S4$*.*

*(3) Если в модели* $\mathfrak{M}(r,X)$ *выполняется*

$$\exists\,\phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r,X))\ :\ \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1),$$
$$\exists\,\phi_0 \in \mathfrak{M}(r,X)\ :\ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0)),$$

*и при этом локальная компонента*

$$K_c(\phi_0) = \phi_0^R \cup \phi^1 \cup \bigcup\{\phi \in \mathfrak{M}(r,X)\ :\ \exists z \in \phi_0^R \cup \phi^1(\phi R z)\} \sqsubseteq \mathfrak{M}(r,X)$$

*насыщенна по ко-накрытиям до глубины* $d(\phi_0)$ *элемента* $\phi_0$ *(т. е. каждая антицепь элементов из* $K_c(\phi_0)$ *глубины не более* $d(\phi_0)$ *имеет ко-накрытие), то правило* $r$ *не допустимо глобально в логике* $S4$*.*

*(4) Если* $\exists \phi \in K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r,X)\ :\phi \not\models_V \phi$*, то правило* $r$ *глобально допустимо в логике* $S4$*.*

*(5) Пусть задано подмножество* $Z \subseteq X$ *такое, что* $\mathfrak{M}(r,Z) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r,X)$*. Если* $|Z| \leq 3$ *и правило* $r$ *опровергается на подмодели* $\mathfrak{M}(r,Z)$*, то правило* $r$ *не допустимо глобально в логике* $S4$*.*

*Доказательство.* 1) Предположим, что правило $r$ недопустимо глобально в $S4$, т. е. недопустимо в некоторой табличной (финитно аппроксимируемой) логике $L$ над $S4$. Тогда для некоторой подстановки $e$ выполняется

$$e(\bigvee \phi_j) \in L,\ e(x_0) \notin L.$$

В силу финитной аппроксимируемости логики, существует конечная $L$-модель $M$, такая, что выполняется $M \models e(\bigvee \phi_j),\ M \not\models e(x_0)$.

Но тогда одноточечная модель $E$ также адекватна данной логике (такая модель может быть получена как p-морфный образ фрейма конечной модели $M$) и на ней в силу $e(\bigvee \phi_j) \in L$ выполняется $E \models e(\bigvee \phi_j)$. Однако это невозможно по условию: на такой модели для всех формул $\phi_j$ не выполняется $\theta_1(\phi) \neq \theta_2(\phi)$, т. е. неверно $\forall j\ \exists x\ : x \notin \theta_1(\phi)\ \&\ x \in \theta_2(\phi)$ (что невозможно по рефлексивности отношения). Получили противоречие, что завершает доказательство.

2) Если такой формулы $\phi_0 \in Pr(r)$ не существует, то заключение правила будет истинно на любой модели (правило истинно на любой конечной модели), и значит, по лемме 3 [2] глобально допустимо в логике $S4$. Если такая формула $\phi_0 \in Pr(r)$ существует в модели $\mathfrak{M}(r,X)$, то при равенстве $\theta_1(\phi_0) = \theta_2(\phi_0)$ правило недопустимо глобально в логике $S4$ по теореме 6 [2].

3) Следует из теоремы 2 [2].

4) Следует из теоремы 3.1 [2].

5) Если $|Z| \leq 3$, то фрейм модели $\mathfrak{M}(r, X)$ состоит из одной рефлексивной точки, двух несравнимых точек, собственного сгустка, цепи из двух элементов (сгустков), «вилки» из трех элементов. Если правило опровергается на данной модели, то легко проверить, что оно недопустимо в табличной логике, порожденной фреймом $\mathfrak{M}(r, X)$. И значит, данное правило недопустимо глобально в логике $S4$. □

Таким образом, далее рассматриваем правила вывода в редуцированной форме, модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для которых удовлетворяет свойствам:

(1) $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) \ : \ \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$,

(2) $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) \ : \ x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0))$,

(3) локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщена по ко-накрытиям,

(4) правило $r$ опровергается на $K_c(\phi_0)$ (т. е. $\forall \phi \in K_c(\phi_0)$ $(\phi \models_V \phi)$, $\exists \phi_0 \in K_c(\phi_0)$ $(\phi_0 \not\models_V x_0)))$.

**Теорема 2.** *(Т. 2 [5]) Пусть модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4), приведенным ранее. Пусть также для любого непустого множества дизъюнктов $Z \subseteq X$ $(|Z| \geq 4)$ существует нетривиальная антицепь $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$, такая, что:*

*(1) $\exists\ \mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0) : f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f -$ p-млрфизм;*

*(2) $\exists \phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$ — ко-накрытие для $\mathcal{Y}$ в $K_c(\phi_0)$; т. е. $\theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_1(\phi_{\mathcal{Y}}) \cup \bigcup_{\mathcal{Y}}\{\theta_2(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$ & $\theta_4(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_3(\phi_{\mathcal{Y}}) \cap \bigcap_{\mathcal{Y}}\{\theta_4(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$*

*(3) антицепь $\mathcal{A}$ не имеет ко-накрытия в $\mathfrak{M}(r, X)$, т. е. выполняется:*

$$\forall \phi_a \in Pr(r) \quad (\theta_2(\phi_a) \neq \theta_1(\phi_a) \cup \bigcup_{\mathcal{A}} \theta_2(\phi_i) \ \&\ \theta_4(\phi_a) \neq \theta_3(\phi_a) \cap \bigcap_{\mathcal{A}} \theta_4(\phi_i)).$$

*Тогда правило $r$ глобально допустимо в логике $S4$.*

В обратную сторону:

**Теорема 3.** *Пусть модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4). Пусть для некоторого непустого множества дизъюнктов $Z \subseteq X$ для любой нетривиальной антицепи $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$ выполняется:*

*(1) либо $\mathcal{A}$ имеет ко-накрытие в $K_c(\phi_0) \sqsubseteq \mathfrak{M}(r, X)$, т. е. выполняется: $\exists \phi_a \in \mathfrak{M}(r, X)$*

$$(\theta_2(\phi_a) = \theta_1(\phi_a) \cup \bigcup_{\mathcal{A}} \theta_2(\phi_i) \ \&\ \theta_4(\phi_a) = \theta_3(\phi_a) \mathcal{A}p \bigcap_{\mathcal{A}} \theta_4(\phi_i)),$$

*(2) либо $\big(\forall\ \mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0)\ \big(f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f -$ p-морфизм $\Longrightarrow$ не существует ко-накрытия $\phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$ для антицепи $\mathcal{Y}$ в $K_c(\phi_0)\big)$; (т. е. $\forall \phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0) \quad \theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) \neq \theta_1(\phi_{\mathcal{Y}}) \cup \bigcup_{\mathcal{Y}}\{\theta_2(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$).*

*Тогда правило $r$ недопустимо глобально в логике $S4$.*

*Доказательство.* Конечным фреймом $K_c(\phi_0)$ породим табличную логику $L = L(K_c(\phi_0))$. Тогда для некоторого $n$ фрейм $K_c(\phi_0)$ является открытым подфреймом $n$-характеристической модели $Ch_n(L)$ (см. Proposition 4, c. 8 [14]). По условию теоремы при заданном означивании $V$ правило опровергается на открытой подмодели $K_c(\phi_0)$. Если доопределим означивание переменных на всем фрейме $n$-характеристической модели так, чтобы посылка правила была истинной, то опровергнем заданное правило на $Ch_n(L)$, откуда будет следовать его недопустимость в табличной логике $L$ над $S4$.

Для этого определим $p$-морфизм фрейма $n$-характеристической модели $Ch_n(L)$ на ее подфрейм $K_c(\phi_0)$. Перенося с помощью данного $p$-морфизма означивание с $K_c(\phi_0)$ на весь фрейм $Ch_n(L)$, опровергнем заданное правило на $n$-характеристической модели $Ch_n(L)$.

Определим $p$-морфизм $g$ на фрейме $Ch_n(L)$ следующим образом:

1) Для всех элементов $x \in K_c(\phi_0) \sqsubseteq Ch_n(L)$ $p$-морфизм $g$ определим как тождественный: $g(x) = x$.

2) Для всех элементов $z \in S_1(Ch_n(L)) \setminus S_1(K_c(\phi_0))$ $p$-морфизм $g$ определим $g(z) = e$, где $e \in S_1(K_c(\phi_0))$ — некоторый фиксированный элемент, порождающий одноэлементный сгусток (такой элемент существует по построению $K_c(\phi_0)$).

Таким образом, $p$-морфизм определен на всем первом слое $Ch_n(L)$.

3) Возьмем произвольный элемент $z \in S_2(Ch_n(L) \setminus K_c(\phi_0)$. По построению модели данный элемент является ко-накрытием для некоторой антицепи элементов $\mathcal{Z} \subset S_1(Ch_n(L))$, на которой $p$-морфизм уже определен и $g(\mathcal{Z}) \subset S_1(K_c(\phi_0))$.

Так как фрейм $K_c(\phi_0)$ порождает логику $L$, то легко показать, что корневой фрейм $z^R = \{z\} \cup \mathcal{Z}$ является $p$-морфным образом (при некотором $p$-морфизме $f$) корневого подфрейма $\phi_z^R = \{\phi_z\} \cup \mathcal{Y} \sqsubseteq K_c(\phi_0)$. Следовательно, композиция $p$-морфизмов $f$ и $g$ является $p$-морфизмом подфрейма $\mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$ на подфрейм $\mathcal{Z}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$.

Если антицепь $\mathcal{A} = g(\mathcal{Z})$ имеет ко-накрытие $t \in S_2(Ch_n(L)) : |C(t)| = 1$, то определяем $g(z) = t$. В противном случае приходим к противоречию. Действительно, в таком случае условие (1) не выполняется. Условие (2) также не выполняется, так как для некоторого $p$-морфизма выполняется $\mathcal{A}^R = g(f(\mathcal{Y}^R))$ и антицепь $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие $\phi_z$ в $K_c(\phi_0)$.

4) Предположим, что для всех элементов $z \in S_{\leq k}(Ch_n(L)$ $p$-морфизм уже определен и $g(S_{\leq k}(Ch_n(L)) \sqsubseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$.

Возьмем произвольный элемент $z \in S_{k+1}(Ch_n(L) \setminus K_c(\phi_0))$. По построению модели данный элемент является ко-накрытием для некоторой антицепи элементов $\mathcal{Z} \subset S_{\leq k}(Ch_n(L))$, на которой $p$-морфизм уже определен и $g(\mathcal{Z}^R) \sqsubseteq S_{\leq k}(K_c(\phi_0))$. Как и ранее, можно показать, что корневой фрейм $z^R = \{z\} \cup \mathcal{Z}^R$ является $p$-морфным образом (при некотором $p$-морфизме $f$) корневого подфрейма $\phi_z^R = \{\phi_z\} \cup \mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$.

Следовательно, композиция $p$-морфизмов $f$ и $g$ является $p$-морфизмом подфрейма $\mathcal{Y}^R \sqsubseteq K_c(\phi_0)$ на подфрейм $\mathcal{Z}^R$.

Если антицепь $\mathcal{A} = g(\mathcal{Y})$ имеет ко-накрытие $t \in S_{k+1}(Ch_n(L))$ (порождающее вырожденный сгусток $C(t)$), то определяем $g(z) = t$. В противном случае (если нет такого ко-накрытия $t$) приходим к противоречию. Действительно, в таком случае условие (1) не выполняется. Условие (2) также не выполняется, так как для некоторого $p$-морфизма выполняется $\mathcal{A}^R = g(f(\mathcal{Y})^R)$ и антицепь $\mathcal{Y}$ имеет ко-накрытие $\phi_z$ в $K_c(\phi_0)$.

Таким образом, определили $p$-морфизм моделей

$$g : \langle Ch_n(L), g^{-1}(V)\rangle \ \to_g \ \langle K_c(\phi_0), V\rangle,$$

сохраняющий истинность формул. Теперь остается заметить, что перенося с помощью $p$-морфизма $g$ означивание $V$ с открытой подмодели $K_c(\phi_0) \sqsubseteq Ch_n(L)$ (на которой правило $r$ опровергается) опровергнем данное правило на $n$-характеристической модели $Ch_n(L)$ при некотором формульном означивании. Следовательно, правило $r$ недопустимо в данной табличной логике $L(K_c(\phi_0))(\supseteq S4)$, и значит, не является глобально допустимым в логике $S4$. □

Из полученных теорем 2, 3 следует:

**Теорема 4.** *Пусть $S4$-модель $\mathfrak{M}(r, X)$ для правила $r$ в редуцированной форме удовлетворяет условиям: (1) $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) \ : \ \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$, (2) $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) \ : \ x_0 \notin \theta_1(\phi_0)\ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0))$, (3) локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщена по ко-накрытиям, (4) правило $r$ опровергается на $K_c(\phi_0)$ (т. е. $\forall \phi \in K_c(\phi_0)$ $(\phi \models_V \phi)$, $\exists \phi_0 \in K_c(\phi_0)$ $(\phi_0 \not\models_V x_0)))$.*

*Правило $r$ глобально допустимо в логике $S4$, если и только если для любого непустого множества дизъюнктов $Z \subseteq X$ существует нетривиальная антицепь $\mathcal{A} \subseteq K_c(\phi_0) \subseteq \mathfrak{M}(r, Z)$, такая, что:*

*(1) $\exists\, \mathcal{Y} \subseteq K_c(\phi_0) : f(\mathcal{Y}^R) = \mathcal{A}^R \& f - - -$ $p$-морфизм;*

*(2) $\exists \phi_{\mathcal{Y}} \in K_c(\phi_0)$ — ко-накрытие для $\mathcal{Y}$ в $K_c(\phi_0)$; т. е. $\theta_2(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_1(\phi_{\mathcal{Y}}) \cup \bigcup_{\mathcal{Y}}\{\theta_2(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}\ \&\ \theta_4(\phi_{\mathcal{Y}}) = \theta_3(\phi_{\mathcal{Y}}) \cap \bigcap_{\mathcal{Y}}\{\theta_4(\phi_i) : \phi_i \in \mathcal{Y}\}$*

*(3) антицепь $\mathcal{A}$ не имеет ко-накрытия в $\mathfrak{M}(r, X)$, т. е. выполняется: $\forall \phi_a \in \mathfrak{M}(r, Z)$ :*

$$\theta_2(\phi_a) \neq \theta_1(\phi_a) \cup \bigcup_{\mathcal{A}} \theta_2(\phi_i)\ \&\ \theta_4(\phi_a) \neq \theta_3(\phi_a) \cap \bigcap_{\mathcal{A}} \theta_4(\phi_i).$$

## 4. Разрешимость глобальной допустимости

Основной результат состоит в следующем утверждении:

**Теорема 5.** *Проблема глобальной допустимости правила $r$ в логике $S4$ разрешима.*

*Доказательство.* На основе результатов, полученных в лемме 1 и теореме 4, можно предложить следующий алгоритм проверки глобальной допустимости в логике $S4$ заданного правила $r$ в редуцированной форме. Рассмотрим произвольное правило $r$ и его $S4$-модель модель $\mathfrak{M}(r, X)$. Выполним последовательно проверку следующих условий (свойств модели $\mathfrak{M}(r, X)$):

(1) Проверяем условие: $\exists\, \phi^1 \in S_1(\mathfrak{M}(r, X)) \ \ : \ \ \theta_1(\phi^1) = \theta_2(\phi^1)$. Если такого элемента не существует, то по лемме 1 правило глобально допустимо в логике $S4$. Далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$ для которых это условие (1) выполняется. Переходим к проверке п. 2.

(2) Проверяем условие: $\exists\, \phi_0 \in \mathfrak{M}(r, X) \ \ : \ \ x_0 \notin \theta_1(\phi_0) \ \&\ \theta_1(\phi_0) \neq \theta_2(\phi_0))$. Если не выполнен первый конъюнкт, то лемме 1 правило $r$ глобально допустимо в логике $S4$. Если выполнена первая часть условия, но не выполняется вторая, недопустимо глобально в логике $S4$. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$ в которых условия (1)–(2) выполняются. Переходим к проверке пункта 3).

(3) Проверяем условие: посылка правила $r$ истинна на $K_c(\phi_0)$ (т .е. $\forall \phi \in K_c(\phi_0)$ $(\phi \models_V \phi)$, ). Если нет, то по лемме 1 правило недопустимо глобально в логике $S4$. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$, в которых правило $r$ опровергается на локальной компоненте $K_c(\phi_0)$, т. е. условия (1)–(3) выполняются. Переходим к проверке пункта 4).

(4) Проверяем условие: локальная компонента $K_c(\phi_0)$ не насыщена по ко-накрытиям. Если условие не выполнено (т. е. локальная компонента насыщенна по ко-накрытиям), то при выполнении условий (1)–(3) по лемме 1 правило $r$ недопустимо глобально в логике $S4$. Поэтому далее рассматриваем модели $\mathfrak{M}(r, X)$, в которых условия (1)–(4) выполняются. Переходим к проверке п. 5.

(5) Если модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет условиям (1)–(4) и удовлетворяет также условиям теоремы 2, то правило $r$ глобально допустимо в логике $S4$ и проверка закончена. Иначе переходим к проверке п. 6.

(6) Если модель $\mathfrak{M}(r, X)$ удовлетворяет условиям (1)–(4) и удовлетворяет также условиям теоремы 3, то правило $r$ недопустимо глобально в логике $S4$. Проверка закончена.

В результате для произвольного правила $r$ в редуцированной форме за конечное число шагов мы можем проверить его глобальную допустимость или недопустимость в логике $S4$. Теорема доказана. □

Заметим, что техника доказательства полученных выше результатов с некоторыми упрощениями (все сгустки одноэлементные) также верна для логики $Grz$. Следовательно, справедливо утверждение:

**Теорема 6.** *Проблема глобальной допустимости правила $r$ в логике $Grz$ разрешима.*

## 5. Заключение

В статье исследуются правила вывода, глобально допустимые в логике $S4$ (т. е. допустимые сразу во всех финитно аппроксимируемых расширениях $S4$). Для правил в редуцированной форме, модель которых удовлетворяет некоторым естественным свойствам, получено необходимое и достаточное условие глобальной допустимости в логике $S4(Grz)$. На основе полученного описания предложен алгоритм проверки глобальной допустимости произвольного правила в редуцированной форме. Таким образом, проблема глобальной допустимости в логике $S4(Grz)$ разрешима. В связи с этим возникает вопрос о наличии (описании) конечного или явного базиса для глобально допустимых правил для $S4$ и большинства базовых логик ($Grz, GL, S4.1$ и т. д.)

## Список источников

1. Минц Г. Е. Выводимость допустимых правил // Журнал советской математики. 1976. Т. 6, № 4. С. 417–421.
2. Римацкий В. В. Глобально допустимые правила вывода // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 138–160. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138
3. Римацкий В. В., Кияткин В. Р. Независимый базис допустимых правил вывода предтабличных логик и их расширений // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 79–89.
4. Римацкий В. В. Явный базис WCP-глобально допустимых правил вывода // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 2. С. 219–246. https://doi.org/10.33048/alglog.2023.62.204
5. Римацкий В. В. Базис глобально допустимых правил логики $S4$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 50. С. 152–169. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152
6. Рыбаков В. В. Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики $H$ // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 55–68.
7. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic // Journal of Symbolic Logic. 1975. Vol. 40, N 3. P. 113–130.
8. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic // Annals of Pure and Applied Logic. 2001. Vol. 113, N 1-3. P. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
9. Iemhoff R., On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic // Journal of Symbolic Logic. 2001. Vol. 66, N 2. P. 281–294.
10. Jeřábek E., Admissible rules of modal logics // Journal of Logic and Computation. 2005. Vol. 15, N 4. P. 411–431.
11. Jeřábek E., Independent bases of admissible rules // Logic Journal of the IGPL. 2005. Vol. 16, N 3. P. 249–267.

12. Lorenzen P. Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg, 1955.
13. Port J. The deducibilities of S5 // J. of Phylosophical Logic, 1981, Vol. 10, N 1. P. 281–294.
14. Rimatskiy V.V. Description of modal logics which enjoy co-cover property // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2022. Vol. 19, Is. 1. P. 316–325.
15. Rybakov V. V. Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4 // Mathematical Logic Quarterly. 2001. Vol. 147, N 2. P. 441–451.
16. Rybakov V. V., Terziler M., Remazki V. V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC // Mathematical Logic Quarterly. 2001. Vol. 46, N 2. P. 207–218.
17. Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. New-York ; Amsterdam : Elsevier Sci. Publ., 1997. Vol. 136. 611 p.
18. Rybakov V. V., Rimatski V. V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics // Bulletin of the Section of Logic. 2005. Vol. 34, N 2. P. 1–7.

## References

1. Mints G.E. Inference of admissible rules. *Journal of Soviet mathematic*, 1976, vol. 6, no. 4, pp. 417–421. (in Russian)
2. Rimatskiy V.V. Globally Admissible Inference Rules. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 138–160. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.138
3. Rimatskiy V.V., Kiyatkin V.R. Independent bases for admissible rules of pretabular modal logic and its extensions. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 10, pp. 79–89.(in Russian) http://semr.math.nsc.ru.
4. Rimatskiy V.V. An explixit basis for WCP-globally admissible inference rules. Algebra and Logic. 2023. vol. 62, no. 2, pp. 149–165. https://doi.org/10.33048/alglog.2023.62.204
5. Rimatskiy V.V. Basis of Globally Admissible Rules for Logic S4 *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 50, pp. 152–169. (in Russian) https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.50.152
6. Rybakov V.V. Basis for admissible inference rules of logic $S4$ and $Int$. *Algebra and Logic*, 1985, vol. 24, no. 1, pp. 55–68.
7. Fridman H. One hundred and two problems in mathematical logic. *Journal of Symbolic Logic*, 1975, vol. 40, no. 3, pp. 113–130.
8. Iemhoff R. A(nother) characterization of Intuitionistic Propositional Logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 2001, vol. 113, no. 1-3, pp. 161–173. https://doi.org/10.1016/S0168-0072(01)00056-2
9. Iemhoff R. On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic. *Journal of Symbolic Logic*, 2001, vol. 66, no. 2. pp. 281–294.
10. Jeřábek E., Admissible rules of modal logics. *Journal of Logic and Computation. 2005*, vol. 15, no. 4. pp. 411–431.
11. Jeřábek E. , Independent bases of admissible rules. *Logic Journal of the IGPL*, 2005, vol. 16, no. 3, pp. 249–267.
12. Lorenzen P. *Einfung in Operative Logik und Mathematik.* Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1955.

13. Port J., The deducibilities of S5, *Journal of Phylosophical Logic*, 1981, vol. 10, no. 1, pp. 409–422.
14. Rimatskiy V.V. Description of modal logics which enjoy co-cover property. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2022, vol. 19, iss. 1, p. 316-325.
15. Rybakov V.V. Construction of an Explicit Basis for Rules admissible in Modal system S4. *Mathematical Logic Quarterly*, 2001, vol. 147, no. 2, pp. 441–451.
16. Rybakov V.V., Terziler M., Remazki V.V. Basis in Semi-Redused Form for the Admissible Rules of the Intuitionistc Logic IPC. *Mathematical Logic Quarterly*, 2001, vol. 46, no. 2, pp. 207–218.
17. Rybakov V.V. Admissibility of logical inference rules, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* New-York, Amsterdam, Elsevier Sci. Publ., 1997, vol. 136, 611 p.
18. Rybakov V.V., Rimatski V.V. A note on Globally admissible inference rules for modal and superintuitionistic logics. *Bulletin of the Section of Logic*, 2005, vol. 34, no. 2, pp. 1–7.


## Об авторах

**Римацкий Виталий Валентинович**, канд. физ.-мат. наук, доц., Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, Российская Федерация, Gemmeny@rambler.ru

## About the authors

**Vitaliy V. Rimatskiy**, Cand. Sci. (Phys.-Math), Assoc. Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation, Gemmeny@rambler.ru

*Поступила в редакцию / Received* 27.12.2024
*Поступила после рецензирования / Revised* 27.05.2025
*Принята к публикации / Accepted* 10.06.2025