Серия «Математика»
2025. Т. 54. С. 48—63

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49J20
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.48

О точной форме позиционного принципа минимума В. А. Дыхты в нелинейных задачах управления

Н. И. Погодаев[1], **О. Н. Самсонюк**[1✉], **М. В. Старицын**[1,2]

[1] Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Российская Федерация
[2] Иркутский национальный исследовательский технический университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ olga.samsonyuk@icc.ru

Аннотация: Исследуется нелинейная задача оптимального управления обыкновенным дифференциальным (в смысле Бохнера) уравнением на банаховом пространстве. Задача ставится в классе обычных управлений — измеримых, существенно ограниченных функций времени — и имеет классическую форму Майера со свободным правым концом траекторий. Показано, что приращение целевого функционала такой задачи на любой паре допустимых управлений может быть представлено точно в терминах функции цены опорного процесса — решения линейного транспортного уравнения в частных производных; сужение этого представления на стандартные классы игольчатых и слабых возмущений управления играет роль вариации функционала «бесконечного порядка». Из точной формулы приращения функционала вытекает неканоническое необходимое условие оптимальности, отличное как от принципа Понтрягина, так и от известных условий высших порядков. Утверждается, что это условие можно рассматривать как точную нелинейную форму позиционного принципа минимума В. А. Дыхты.

Ключевые слова: оптимальное управление, необходимые условия оптимальности, позиционные управления, методы спуска

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

Работа М. В. Старицына выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ, проект FZZS-2024-0003.

Ссылка для цитирования: Погодаев Н. И., Самсонюк О. Н., Старицын М. В. О точной форме позиционного принципа минимума В. А. Дыхты в нелинейных задачах управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 54. С. 48–63.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.48

Research article

On the Exact Form of V.A. Dykhta's Feedback Minimum Principle in Nonlinear Control Problems

Nikolay I. Pogodaev[1], **Olga N. Samsonyuk**[1✉], **Maksim V. Staritsyn**[1,2]

[1] Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation

[2] National Research Irkutsk State Technical University, Irkutsk, Russian Federation

✉ olga.samsonyuk@icc.ru

Abstract: This paper investigates a nonlinear optimal control problem for an ordinary differential equation (in the sense of Bochner) on a Banach space. The problem is posed in the class of conventional controls – measurable, essentially bounded functions of time – and takes the classical Mayer's form with a free right endpoint of the trajectories. It is shown that the increment of the objective functional for such a problem, for any pair of admissible controls, can be represented exactly in terms of the cost function of the reference process – a solution to a linear transport equation. The restriction of this representation to the standard classes of needle-shaped and weak control perturbations plays the role of a functional variation of "infinite order". A non-canonical necessary condition for optimality follows from the exact formula for the functional increment, which differs from both the Pontryagin principle and known higher-order conditions. This condition can be considered an exact nonlinear form of V.A. Dykhta's feedback minimum principle.

Keywords: optimal control, necessary optimality conditions, feedback control, numerical algorithms

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. 121041300060-4.

The work of Maksim Staritsyn was supported by a grant from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. FZZS-2024-0003.

For citation: Pogodaev N. I., Samsonyuk O. N., Staritsyn M. V. On the Exact Form of V.A. Dykhta's Feedback Minimum Principle in Nonlinear Control Problems. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 54, pp. 48–63. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.54.48

Статья посвящается памяти профессора В. А. Дыхты*,*
личность которого сыграла значительную роль
в научной работе всех авторов

1. Введение

Главным стимулом настоящего исследования послужила серия работ Владимира Александровича по так называемым *позиционным необходимым условиям оптимальности* в задачах оптимального управления со свободным правым концом траекторий [4–6]. Это направление, в значительной степени отклоняющееся от основных тенденций развития математической теории управления, можно отнести к оригинальным продуктам иркутской школы оптимизации. Напомним ключевые идеи.

Рассмотрим классическую задачу оптимального управления в стандартной форме Майера на отрезке времени $I \doteq [0, T]$, $T > 0$:

$$(P) \qquad \inf \Big\{ \mathcal{I}[u] \doteq \ell(x(T))\colon\ x = x^u;\ \ u \in \mathcal{U} \Big\}.$$

Здесь $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — целевая функция; $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданное начальное состояние; управления u пробегают множество $\mathcal{U} = L^\infty(I; U)$ классов эквивалентности измеримых функций $I \to \mathbb{R}^m$, принимающих при почти всех (п. в.) $t \in I$ значения в заданном выпуклом компакте $U \subset \mathbb{R}^m$; траектория $x^u \doteq [t \mapsto x^u(t)] \in W^{1,1}(I; \mathbb{R}^n)$, соответствующая управлению u, есть решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) в интегральной форме:

$$x(t) = \mathrm{x}_0 + \int_0^t f_\tau(x(\tau), u(\tau))\, d\tau, \quad t \in I, \tag{1.1}$$

с (достаточно регулярным) векторным полем $f\colon I \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$.[1]

Пусть $(\bar{x} \doteq x^{\bar{u}}, \bar{u})$ — исследуемый процесс, и $\bar{\phi} \doteq [(t, \mathrm{x}) \mapsto \bar{\phi}_t(\mathrm{x})] \in C^1(I \times \mathbb{R}^n)$ — некоторая функция, удовлетворяющая концевому условию $\bar{\phi}_T = \ell - \ell(\bar{x}(T))$.[2] Тогда для любого другого процесса $(x \doteq x^u, u)$ имеем

$$\mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}] \doteq \bar{\phi}_T(x(T)) = \bar{\phi}_0(\mathrm{x}_0) + \int_I \Big\{ \partial_t \bar{\phi} + \nabla_{\mathrm{x}} \bar{\phi}_t \cdot f_t(\cdot, u(t)) \Big\}\Big|_{x(t)} dt.$$

Чтобы установить *не*оптимальность управления $\bar{u}$ в задаче (P) достаточно подобрать набор $(\bar{\phi}, (x, u))$, для которого выражение в правой части последнего равенства отрицательно. Первое, что можно сделать в этом направлении — потребовать выполнения условия

$$\Big\{ \partial_t \bar{\phi} + \nabla_{\mathrm{x}} \bar{\phi}_t \cdot f_t(\cdot, u(t)) \Big\}\Big|_{x(t)} \le 0 \quad \text{для п.в. } t \in I.$$

[1] Для краткости записи, зависимость функции многих переменных от времени передаем с помощью нижнего индекса.

[2] В работах В. А. Дыхты рассматривались произвольные мажоранты функции ℓ.

Ясно, однако, что даже оно не гарантирует неравенства $\mathcal{I}[u] \leq \mathcal{I}[\bar{u}]$, поскольку не контролирует знак члена $\bar{\phi}_0(\mathrm{x}_0)$.

В. А. Дыхта предложил следующий эмпирический подход: сначала фиксируем некоторую структуру функции $\bar{\phi}$ (например, линейную или квадратичную по x) и затем уже для заданной $\bar{\phi}$ ищем пару (x, u) из условия поточечного минимума выражения в фигурных скобках; поскольку x в последнем отвечает еще не найденному u, второй шаг сводится фактически к реализации обратной связи (позиционного управления) вида

$$w_t(\mathrm{x}) \in \arg\min_{\mathrm{u} \in U} \nabla_{\mathrm{x}} \bar{\phi}_t(\mathrm{x}) \cdot f_t(\mathrm{x}, \mathrm{u}). \tag{1.2}$$

Эта реализация составляет отдельный нетривиальный вопрос, поскольку прямая подстановка w в (1.1) приводит к уравнению с разрывной правой частью, не имеющему единственного решения типа Каратеодори в общем случае. Для решения этой проблемы в [4] был предпринят переход к овыпукленной задаче, допустимые процессы (x, u) которой можно синтезировать с помощью любого (необязательно даже измеримого) позиционного воздействия w по методу Красовского – Субботина [14]. Результатом стал *позиционный принцип минимума* (ППМ) — условие вариационного типа, состоящее в сравнении опорного значения $\ell(\bar{x}(T))$ с ценами всех кривых x^w, синтезированных по описанному выше правилу с линейной функцией $\bar{\varphi}_t(\mathrm{x}) = \bar{\psi}(t) \cdot (\mathrm{x} - \bar{x}(t))$, где $\bar{\psi}$ — отвечающее $\bar{u}$ решение сопряженной системы принципа Понтрягина (ПМП).

ППМ оказался необходимым для оптимальности $\bar{u}$ в задачах, линейных по состоянию (в частности, билинейных) и мог применяться как дополнительный тест к уже найденной ПМП-экстремали. Путь обобщения этого подхода на нелинейные задачи состоял в последовательном усложнении эмпирической структуры функции $\bar{\phi}$ и расширении множества управлений сравнения за счет многозначного характера экстремальной конструкции (1.2) [6]. Вопрос же *аналитического* построения $\bar{\phi}$, гарантирующей отсутствие подъема (потенциальный спуск) по траекториям x^w в общей задаче (P), был обозначен В. А. Дыхтой как центральный в его теории.

Ответ на этот вопрос был получен в работе [8] и оказался довольно прост: искомой функцией может служить разность $\bar{\phi}_t = \bar{p}_t - \ell(\bar{x}(T))$, в которой $\bar{p}$ есть решение *линейного* транспортного уравнения

$$\partial_t p + \nabla_{\mathrm{x}} p \cdot f(\cdot, \bar{u}(t)) = 0, \quad p_T = \ell.$$

Оказалось, что эта функция (с очевидным свойством $\bar{\phi}_0(\mathrm{x}_0) = 0$, гарантирующим отсутствие роста цены: $\ell(x^w(T)) \leq \ell(\bar{x}(T))$), тесно связана с точными формулами приращения функционала $\mathcal{I}$, а соответствующий вариант принципа В. А. Дыхты составляет нетривиальное *необходимое* условие оптимальности, в определенном смысле «более близкое к достаточным», нежели все известные условия высших порядков.

Настоящая статья обобщает некоторые результаты [8] на случай, когда роль множества фазовых состояний играет произвольное *банахово пространство*, тем самым впервые перенося элементы теории позиционных принципов оптимальности на нелинейные бесконечномерные (в том числе некоторые распределенные) постановки.

2. Задача оптимального управления

Пусть $\mathbf{B}$ — действительное банахово пространство; $\ell\colon \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ и $f^i\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, $i = 0, \ldots, m$, — заданные отображения. Число $T > 0$ и класс управлений $\mathcal{U}$ остаются теми же, что и прежде. Полагаем $f(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \doteq f^0(\mathrm{x}) + \mathrm{u}_i f^i(\mathrm{x})$, $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_i)_{i=1}^m$, и принимаем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам[3]. Интеграл в уравнении (1.1) понимается теперь в смысле Бохнера; чтобы подчеркнуть бесконечномерную природу состояний, пишем x_t^u вместо $x^u(t)$.

Введем некоторые обозначения: $C_b \doteq C_b(\mathbf{B})$ — банахово пространство непрерывных ограниченных действительных функций на $\mathbf{B}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$; $\mathcal{L}(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ — пространство линейных ограниченных отображений $(\mathbf{X}, \|\cdot\|_{\mathbf{X}}) \to (\mathbf{Y}, \|\cdot\|_{\mathbf{Y}})$ нормированных пространств, с операторной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X};\mathbf{Y})}$. Класс $C^1_{b,b}$ состоит из ограниченных и непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{B} \to \mathbb{R}$, обладающих ограниченной производной; $C^{0,1}$ есть множество функций $\phi \in C_b$, обладающих конечной константой Липшица $\mathrm{Lip}(\phi)$, а $C^{1,1}$ состоит из функций $\phi \in C^{0,1}$, производная Фреше $D\phi(\cdot) \in \mathcal{L}(\mathbf{B}; \mathbb{R})$ которых определена и удовлетворяет условию Липшица с константой $\mathrm{Lip}(D\phi)$. Класс $C^{1,1}(\mathbf{B}; \mathbf{B})$ отображений $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$ определяется по аналогии в терминах производной Фреше $D(\cdot)\colon \mathbf{B} \to \mathcal{L}(\mathbf{B}; \mathbf{B})$.

В оставшейся части статьи действуют следующие предположения: $\ell \in C^{1,1}$ и $f^i \in C^{1,1}(\mathbf{B}; \mathbf{B})$ при $i = 1, \ldots, m$.

Напомним, что *потоком* (или динамической системой) на пространстве $\mathbf{B}$ за период времени I называют семейство $\Phi \doteq (\Phi_{s,t})_{s \le t}$ отображений $\Phi_{s,t}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, обладающее композиционным свойством:

$$\Phi_{b,c} \circ \Phi_{a,b} = \Phi_{a,c}, \quad \Phi_{a,a} = \mathbf{id} \quad \forall a, b, c \in I, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{id} \doteq \mathbf{id}_{\mathbf{B}}$ обозначает тождественное отображение $\mathbf{B} \to \mathbf{B}$.

Следующее утверждение объединяет стандартные результаты, первый из которых хорошо известен [13, Т. 2.2.2], а второй вытекает из свойств решения ОДУ и оценок на основе неравенства Гронуолла.

---

[3] Для упрощения выкладок мы опускаем явную зависимость векторного поля от переменной t. Все последующие результаты остаются справедливыми, если таковая зависимость носит липшицевый характер. Случай явной измеримой зависимости от времени требует отдельного рассмотрения, что подробно обсуждается в [8].

Предложение 1. *Пусть векторные поля f^i удовлетворяют условию Липшица с общей константой* $\mathrm{Lip}(f) \geq 0$, *и кроме того, величина* $\|f\|_\infty \doteq \sup\limits_{\mathrm{x} \in \mathbf{B}} \max\limits_{1 \leq i \leq m} \|f^i(\mathrm{x})\|_{\mathbf{B}}$ *конечна. Тогда 1) уравнение*

$$\Phi_{s,t}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \int_s^t f(\Phi_{s,\tau}(\mathrm{x}), u(\tau))\, d\tau \tag{2.2}$$

имеет при всех $(s, \mathrm{x}) \in [0, T) \times \mathbf{B}$ *единственное решение* $t \mapsto \Phi_{s,t}(\mathrm{x})$ *класса* $C(I; \mathbf{B})$; *2) порожденное этим уравнением семейство* $\Phi = (\Phi_{s,t})$ *образует фазовый поток, причем отображения* $t \mapsto \Phi_{s,t}(\mathrm{x})$ *и* $\mathrm{x} \mapsto \Phi_{s,t}(\mathrm{x})$ *липшицевы в области своего определения с некоторой единой, универсальной для всех свободных аргументов константой* $\mathrm{Lip}(\Phi)$.

Замечание 1. Даже если пространство $\mathbf{B}$ несепарабельно, функция $t \mapsto f\big(\mathrm{x}, u(t)\big)$ измерима в смысле Бохнера благодаря аффинной структуре и компактности множества U, которые обеспечивают существенную компактность (и в частности, существенную сепарабельность) множества $\big\{f(\mathrm{x}, u(t)) \colon t \in I\big\} \subset \mathbf{B}$. Включение $f(\mathrm{x}, u(\cdot)) \in L^\infty(I; \mathbf{B}) \subset L^1(I; \mathbf{B})$ вытекает тогда из измеримости u и теоремы Петтиса [12].

Пример 1. Нетривиальным примером управляемой системы, к которой могут быть применены результаты настоящей статьи, является уравнение Амари

$$\partial_t N_t(q) = -N_t(q) + \int_\Omega w(q, q')\, \sigma\big(N_t(q')\big)\, dq' + S_t(q), \quad q \in \Omega, \tag{2.3}$$

возникающее при изучении процессов восприятия, памяти и принятия решений в когнитивных системах [10]. Компактная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ моделирует здесь участок коры головного мозга, а функция $t \mapsto N_t(q)$ характеризует активность нейрона в позиции q: чем больше значение N, тем выше частота генерации импульсов (спайков). Интеграл в уравнении (2.3) описывает воздействие нейрона, расположенного в точке q, на нейрон в точке q' с учетом синаптических связей w; функция σ переводит мембранный потенциал в частоту разрядов. Член $-N_t(q)$ моделирует затухание активности со временем, а внешний сигнал S играет роль управления, позволяющего формировать желаемые паттерны активности. Как правило, S представляет собой комбинацию $\sum_{i=1}^m S^i(q)\, u_i(t)$ заданных пространственных профилей S^i с управляемыми амплитудами u_i.

Уравнение (2.3) можно понимать как ОДУ вида (1.1) на банаховом пространстве $\mathbf{B} = C(\Omega)$ состояний $\mathrm{x} = x_t \doteq N_t(\cdot)$ с векторным полем:

$$f_t(\mathrm{x}) = -\mathrm{x} + K(\sigma(\mathrm{x})) + S_t, \quad K(\mathrm{y})(q) \doteq \int_\Omega w(q, q')\, \mathrm{y}(q')\, dq'.$$

Функции w, S^i и σ предполагаются здесь бесконечно гладкими.

3. Классический вариационный анализ и его ограничения

Перейдем к обсуждению необходимых условий минимума в задаче (P). Пусть $\bar{u} \in \mathcal{U}$ — заданное управление, $\bar{x} \doteq x^{\bar{u}}$ — соответствующая траектория. Будем называть их *опорными*. Анализ процесса $(\bar{x}, \bar{u})$ на оптимальность сводится к попытке установить обратное утверждение, т. е. доказать *не*оптимальность $\bar{u}$. Для этого достаточно предъявить новое управление $u \in \mathcal{U}$, обеспечивающее спуск по функционалу: $\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] \doteq \mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}] < 0$. Если оказывается, что подобного элемента u не существует в некотором фиксированном классе $\mathcal{V} \doteq \mathcal{V}^{\bar{u}} \subset \mathcal{U}$ вариаций $\bar{u}$, последнее признается «подозрительным на оптимум», или *экстремальным*.

Традиционный подход опирается на элементарный анализ *первой вариации* $\Delta_u^1 \mathcal{I}[\bar{u}] \doteq \left.\dfrac{d^+}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \mathcal{I}[\bar{u}^\varepsilon]$ функционала в точке $\bar{u}$ в одном из стандартных классов $\mathcal{V}^{\bar{u}}$ вариаций управления — игольчатых (сильных) или выпуклых (слабых). Первый представлен функциями вида

$$\bar{u}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon_{str} \doteq \bar{u} + \mathbf{1}_J \,(u - \bar{u})\,, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \varepsilon \doteq |J|, \tag{3.1}$$

где $J \subset I$ — измеримое множество, $\mathbf{1}_J$ — его характеристическая функция, а $|J|$ — мера Лебега. Второй из классов образован управлениями[4]

$$\bar{u}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon_w \doteq \bar{u} + \varepsilon\,(u - \bar{u})\,, \quad u \in \mathcal{U}, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \tag{3.2}$$

Каноническое необходимое условие оптимальности первого порядка — принцип Понтрягина (ПМП) — вытекает из требования неотрицательности $\Delta_u^1 \mathcal{I}[\bar{u}] \leq 0$ для всех малых возмущений (3.1). Аналогичное условие в классе (3.2), вообще говоря более слабое, совпадает с ПМП в случае аффинной зависимости от управления.

Хорошо известно, что ПМП *не достаточен* для глобального оптимума уже в классической билинейной постановке, причем класс выделяемых им экстремальных процессов может быть достаточно широк. Естественный способ сужения последнего, т. е. продвижения «в сторону достаточных условий», состоит в учете последующих членов разложения функции $\varepsilon \mapsto \Delta_{\bar{u}^\varepsilon} \mathcal{I}[\bar{u}]$ в ряд Тейлора в окрестности нуля (при соответствующей регулярности исходных данных). Это позволяет вычислить вариации $\Delta_u^k \mathcal{I}[\bar{u}]$ любого конечного порядка $k \in \mathbb{N}$ [1]. Из соответствующих представлений следуют необходимые условия высших порядков, стратегия построения которых реализована лишь в нескольких работах — в основном применительно к исследованию особых режимов и задач геометрической теории управления [1; 2; 11; 15]. Из-за растущей сложности получаемых условий на практике, как правило, ограничиваются случаем $k = 2$.

---

[4] Здесь существенно, что U выпукло.

В следующем пункте получена *точная* формула приращения функционала на любой допустимой паре $(\bar{u}, u)$. Сужение этой формулы на случай $u = \bar{u}^\varepsilon_w$ можно интерпретировать как вариацию $\Delta^\infty_u \mathcal{I}[\bar{u}]$ *бесконечного порядка*, поскольку при бесконечной гладкости поля скоростей и целевой функции она содержит все члены указанного выше разложения. Из этой формулы мы получим необходимое условие оптимальности «порядка ∞» — точную версию позиционного принципа [5] в нелинейной постановке.

4. Новый класс вариаций управления и точная формула приращения функционала

Рассмотрим функцию

$$(u \triangleright_s \bar{u})(t) \doteq \begin{cases} u, & t \in [0, s) \\ \bar{u}, & t \in [s, T], \end{cases} \qquad u \in \mathcal{U}. \tag{4.1}$$

Это специальный класс возмущений управления $\bar{u}$ вида (3.1) с множеством $J = [0, s)$, состоящих в переключении с варьирующего управления u на варьируемое $\bar{u}$ в момент времени s. Договоримся о следующей системе сокращений: объекты, отвечающие управлению $\bar{u}$, помечаем чертой, а зависимость от варьирующего u опускаем, например $\bar{\Phi} \doteq \Phi^{\bar{u}}$, $\bar{x}_t = x^{\bar{u}}_t \doteq \bar{\Phi}_{0,t}(\mathrm{x}_0)$, $\Phi \doteq \Phi^u$ и т. п.

Замечание 2. В последующих рассуждениях можно использовать симметричную версию (4.1), переименовав управления $\bar{u} \leftrightarrow u$. Это приведет к двойственной формуле приращения и альтернативным необходимым условиям минимума [8].

Выясним, как возмущение (4.1) отражается на значении $\mathcal{I}$. Для этого рассмотрим отображение $\bar{p}\colon I \times \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ вида

$$\bar{p}_t(\mathrm{x}) \doteq \left(\ell \circ \bar{\Phi}_{t,T}\right)(\mathrm{x}). \tag{4.2}$$

Величина $\bar{p}_t(\mathrm{x})$ — это цена управления $\bar{u}$ в варианте $\left(P^{(t,\mathrm{x})}\right)$ задачи $(P) \doteq \left(P^{(0,\mathrm{x}_0)}\right)$ с начальными данными $(t, x_t = \mathrm{x})$. Заметив, что

$$x_T^{u \triangleright_t \bar{u}} = \bar{\Phi}_{t,T}(\Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0)),$$

запишем приращение функционала $\mathcal{I}$ на паре $(u \triangleright_s \bar{u}, \bar{u})$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u \triangleright_s \bar{u}] - \mathcal{I}[\bar{u}] &\doteq \ell(x_T^{u \triangleright_s \bar{u}}) - \ell(\bar{x}_T) \doteq \bar{p}_T(\Phi_{0,T}(\mathrm{x}_0)) - \bar{p}_0(\Phi_{0,0}(\mathrm{x}_0)) \\ &= \int_0^s \frac{d}{d\tau} \bar{p}_\tau(\Phi_{0,\tau}(\mathrm{x}_0))\, d\tau \doteq \int_0^s \frac{d}{d\tau} \bar{p}_\tau(x_\tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Эта запись возможна ввиду липшицевости композиции

$$t \mapsto \bar{p}_t(\Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0)) \doteq \ell(\bar{\Phi}_{t,T} \circ \Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0))$$

— следствия липшицевости потоков, определения (4.2) и сделанных предположений. Из (4.3) вытекает равенство

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{I}[u \triangleright_s \bar{u}] - \mathcal{I}[\bar{u}]\right) = \frac{d}{ds}\bar{p}_s(x_s), \tag{4.4}$$

т. е. подынтегральная функция — это в точности «чувствительность» приращения целевого функционала задачи (P) к малому изменению параметра s (момента переключения управления).

Вычислим производную (4.4). Этот шаг удобно формулировать в терминах семейства дифференциальных операторов

$$\phi \mapsto \mathfrak{L}(\mathrm{u})\phi = D\phi\left[f(\cdot, \mathrm{u})\right], \quad \mathrm{u} \in U, \tag{4.5}$$

корректно определенных на общем линейном подпространстве $C^1_{b,b}$ и принимающих значения в C_b.

Предложение 2. *Справедливо правило дифференцирования:*

$$\frac{d}{dt}\,\bar{p}_t(x_t) = \left\{\mathfrak{L}_t - \overline{\mathfrak{L}}_t\right\}\bar{p}_t\Big|_{x_t} \qquad \textit{для п.в. } t \in I, \tag{4.6}$$

где мы формально полагаем $\mathfrak{L}_t \doteq \mathfrak{L}(u(t))$ *и* $\overline{\mathfrak{L}}_t \doteq \mathfrak{L}(\bar{u}(t))$.

Доказательство. Сперва заметим, что функция в правой части (4.6) измерима: члены разности представляют собой композиции непрерывного отображения $(t, \mathrm{u}) \to D\bar{p}_t(x_t)\left[f(x_t, \mathrm{u})\right]$ с соответствующими управлениями. Зафиксируем $t \in [0, T)$, при котором правая часть (4.6) определена, и рассмотрим выражение

$$\bar{p}_{t+h}(x_{t+h}) - \bar{p}_t(x_t) - h\left\{\mathfrak{L}_t - \overline{\mathfrak{L}}_t\right\}\bar{p}_t\Big|_{x_t}, \qquad t < t+h \le T.$$

Используя равенства $x_{t+h} = \Phi_{t,t+h}(x_t)$ и $\bar{p}_t = \bar{p}_{t+h} \circ \bar{\Phi}_{t,t+h}$, вытекающие из композиционного свойства (2.1), разложим это выражение в сумму четырех слагаемых:

$$\left(\bar{p}_{t+h} \circ \Phi_{t,t+h} - \bar{p}_{t+h} - h\mathfrak{L}_t\bar{p}_{t+h}\right)\Big|_{x_t}, \; -\left(\bar{p}_{t+h} \circ \bar{\Phi}_{t,t+h} - \bar{p}_{t+h} - h\overline{\mathfrak{L}}_t\bar{p}_{t+h}\right)\Big|_{x_t},$$
$$h\mathfrak{L}_t[\bar{p}_{t+h} - \bar{p}_t]\Big|_{x_t} \quad \text{и} \quad -h\overline{\mathfrak{L}}_t[\bar{p}_{t+h} - \bar{p}_t]\Big|_{x_t}.$$

Первое из них оценивается числом

$$A_{t,h} \doteq \sup_{\tau \in I}\left\|\bar{p}_\tau \circ \Phi_{t,t+h} - \bar{p}_\tau - h\mathfrak{L}_t\bar{p}_\tau\right\|_\infty,$$

второе — аналогичным значением $\bar{A}_{t,h}$, в котором $(\Phi, \mathfrak{L})$ заменяется на $(\bar{\Phi}, \bar{\mathfrak{L}})$. Модули последних двух слагаемых не превосходят, соответственно, величин $hB_{t,h}$ и $h\bar{B}_{t,h}$, где $B_{t,h} \doteq \sup_{\tau \in I} \big\| \mathfrak{L}_\tau[\bar{p}_{t+h} - \bar{p}_t] \big\|_\infty$ и $\bar{B}_{t,h}$, задано по аналогии. Докажем, что $\frac{1}{h}(A_{t,h} + \bar{A}_{t,h}) + B_{t,h} + \bar{B}_{t,h} \to 0$ при $h \to 0$; это и будет означать утверждаемый результат.

A) Установим сходимость членов $\frac{1}{h}(A_{t,h} + \bar{A}_{t,h})$. Обозначим $r_U \doteq \max\left\{ \max\limits_{1 \le i \le m} |\mathrm{u}_i| \colon \mathrm{u} \in U \right\}$. Ввиду принятых предположений и согласно [7, Т. 3.4.2], отображения $\mathrm{x} \mapsto \bar{\Phi}_{s,t}(\mathrm{x})$ непрерывно дифференцируемы по Фреше. Следовательно, таковы и все функции $\bar{p}_t$, $t \in I$ (как композиции C^1-функций), и для любых $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{B}$ справедливо представление $D\bar{p}_t(\mathrm{x})[\mathrm{y}] = D\ell(\bar{\Phi}_{t,T}(\mathrm{x}))\big[D\bar{\Phi}_{t,T}(\mathrm{x})[\mathrm{y}]\big]$, удовлетворяющее оценке $\|D\bar{p}_t(\mathrm{x})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};R)} \le \|D\ell\|_\infty \|D\bar{\Phi}_{t,T}(\mathrm{x})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})}$.

Зафиксируем $a \in [0, T)$, обозначим $\bar{f}_t \doteq f(\cdot, \bar{u}(t))$,

$$J_t \doteq D\bar{f}_t \circ \bar{\Phi}_{a,t}, \quad w^a_t(\cdot) \doteq D\bar{\Phi}_{a,t}(\cdot)[\mathrm{y}], \quad t \in [a, T],$$

и напомним [7, § 3.4–5], что функция $t \mapsto w^a_t(\mathrm{x})$ является единственным решением линейной задачи Коши

$$w^a_t(\mathrm{x}) = \mathrm{y} + \int_a^t J_\tau(\mathrm{x})\big[w^a_\tau(\mathrm{x})\big]\, d\tau.$$

Положим $M_0 \doteq r_U \max_i \|Df^i\|_\infty$; лемма Гронуолла дает

$$\sup_{\mathrm{x}} \big\| D\bar{\Phi}_{t,T}(\mathrm{x}) \big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} \le e^{M_0 T} \ \Rightarrow\ \big\| D\bar{p}_t \big\|_\infty \le \|D\ell\|_\infty e^{M_0 T}. \tag{4.7}$$

Таким образом, $\bar{p}_t \in C^1_{b,b}$ с равномерной по t оценкой на производную.

Теперь рассмотрим поток Φ^v, порожденный другим управлением $v \in \mathcal{U}$ и произвольную функцию $\phi \in C^1_{b,b}$. Из легко устанавливаемой оценки $\big\| \Phi^v_{s,t} - \mathbf{id_B} \big\|_\infty \le r_U \|f\|_\infty (t - s)$, разложения

$$\phi(\Phi^v_{t,t+h}(\mathrm{x})) = \phi(\mathrm{x}) + D\phi(\mathrm{x}) \left[\int_t^{t+h} f_\tau(\Phi^v_{t,\tau}(\mathrm{x}), v(\tau))\, d\tau \right] + R^v_{t,\mathrm{x}}(h),$$

$$R^v_{t,\mathrm{x}}(h) \doteq o\left(\left\| \int_t^{t+h} f_\tau(\Phi^v_{t,\tau}(\mathrm{x}), v(\tau))\, d\tau \right\|_{\mathbf{B}} \right) \le r_U \|f\|_\infty\, o(h) \quad \forall (t, \mathrm{x}),$$

и сделанных предположений вытекает неравенство

$$\Big| \phi(\Phi^v_{t,t+h}(\mathrm{x})) - \phi(\mathrm{x}) - D\phi(\mathrm{x})\big[f\,(\mathrm{x}, v(t))\,\big] \Big| + \|f\|_\infty o(h)$$
$$\le \|D\phi(\mathrm{x})\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbb{R})}\, r_U \|f\|_\infty \Big(\frac{1}{2} h^2 \operatorname{Lip}(f) + \int_t^{t+h} |v(\tau) - v(t)|\, d\tau \Big).$$

Заменим в этом выражении ϕ на $\bar{p}_\tau$ и v на u, после чего возьмем супремумы по x и t. Разделив результат на $h > 0$ и отбросив пренебрежимый член $\|f\|_\infty o(h)/h$, приходим к неравенству

$$\frac{A_{t,h}}{h} \leq \|D\ell\|_\infty e^{Tr_U\|Df\|_\infty} r_U \|f\|_\infty \Big(\frac{1}{2} h \operatorname{Lip}(f) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} |v(\tau) - v(t)|\, d\tau\Big);$$

выражение справа здесь то же, что и выше, поскольку не зависит от (x, τ), потому остается неизменным после взятия соответствующих супремумов. Предельный переход $h \to 0$ дает теперь $\frac{1}{h} A_{t,h} \to 0$ в силу классической теоремы о точках Лебега. Полагая $v = \bar{u}$ и повторяя те же рассуждения, имеем аналогичное стремление слагаемого $\bar{A}_{t,h}$.

B) Покажем теперь сходимость $B_{t,h}, \bar{B}_{t,h} \to 0$. Для этого напомним, что согласно предпосылке утверждения $\ell \in C^{1,1}$ и $f^i \in C^{1,1}(\mathbf{B};\mathbf{B})$, и последнее влечет при п. в. t включения, $f(\cdot, v(t)) \in C^{1,1}(\mathbf{B};\mathbf{B})$, $v \in \mathcal{U}$, с универсальными оценками $\|Df(\cdot, v(t))\|_\infty \leq M_0$ и $\operatorname{Lip}(Df(\cdot, v(t))) \leq r_U \max_i \operatorname{Lip}(Df^i) \doteq M_1$.

Зафиксируем $0 \leq a < b \leq T$, обозначим $W_\tau \doteq D\bar{\Phi}_{a,\tau} - D\bar{\Phi}_{b,\tau}$, $\tau \in [b, T]$, и запишем цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \Big|\mathfrak{L}_\tau\left[\bar{p}_a - \bar{p}_b\right]\Big| &\doteq \Big|D\ell\left(\bar{\Phi}_{a,T}\right)\left[D\bar{\Phi}_{a,T}\left[\bar{f}_\tau\right]\right] - D\ell(\bar{\Phi}_{b,T})\big[D\bar{\Phi}_{b,T}[\bar{f}_\tau]\big]\Big| \\ &\leq \Big\|D\ell(\bar{\Phi}_{a,T}) - D\ell(\bar{\Phi}_{b,T})\Big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbb{R})} \big\|D\bar{\Phi}_{a,T}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} r_U \|f\|_\infty \\ &+ \big\|D\ell\big\|_\infty \|W_T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} r_U \|f\|_\infty . \end{aligned} \tag{4.8}$$

Оценим первое слагаемое: первый множитель в нем не превосходит $\operatorname{Lip}(D\ell) \operatorname{Lip}(\bar{\Phi})^2 (b-a)$, а второй удовлетворяет первому неравенству из (4.7). Чтобы оценить второе слагаемое, представим:

$$\begin{aligned} W_\tau &= D\bar{\Phi}_{a,b} - \mathbf{id}_{\mathbf{B}} \\ &\quad + \int_b^\tau \Big(Df_\tau(\bar{\Phi}_{a,\sigma})[W_\sigma] + \big\{D\bar{f}_\sigma(\bar{\Phi}_{a,\sigma}) - D\bar{f}_\sigma(\bar{\Phi}_{b,\sigma})\big\}\big[D\bar{\Phi}_{b,\sigma}\big]\Big)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь ввиду первой части (4.7):

$$\begin{gathered} \Big\|D\bar{\Phi}_{a,b}[\mathrm{y}] - \mathrm{y}\Big\|_{\mathbf{B}} \leq \|D\bar{f}\|_\infty \int_a^b \big\|D\bar{\Phi}_{a,\tau}[\mathrm{y}]\big\|_{\mathbf{B}}\, d\tau \leq M_0 e^{M_0 T} \|\mathrm{y}\|_{\mathbf{B}} (b-a) \\ \Longrightarrow \big\|D\bar{\Phi}_{a,b} - \mathbf{id}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} \leq \underbrace{M_0 e^{M_0 T}}_{M_2}(b-a); \\ \big\|D\bar{f}_\sigma(\bar{\Phi}_{a,\sigma}) - D\bar{f}_\sigma(\bar{\Phi}_{b,\sigma})\big\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} \leq M_1 \big\|\bar{\Phi}_{a,\sigma} - \bar{\Phi}_{b,\sigma}\big\|_\infty \leq M_3(b-a), \end{gathered}$$

где $M_3 \doteq M_1 \operatorname{Lip}(\bar{\Phi})^2$. Значит,

$$\|W_\tau\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} \leq (M_2 + M_3 e^{M_0 T})(b-a) + M_0 \int_b^\tau \|W_\sigma\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})}\, d\sigma,$$

и после применения неравенства Гронуолла заключаем, что

$$\|W_T\|_{\mathcal{L}(\mathbf{B};\mathbf{B})} \leq \underbrace{(M_2 + M_3 e^{\ M_0 T}) e^{M_0 T}}_{M_4} (b-a).$$

Подставляя найденные оценки в (4.8), полагая $a \doteq t$, $b \doteq t+h$, и переходя к супремуму по (t, x), получаем

$$B_{t,h} \leq Mh, \quad M \doteq \Big\{ \operatorname{Lip}(D\ell) \operatorname{Lip}(\bar{\Phi})^2 e^{M_0 T} + \big\|D\ell\big\|_\infty M_4 \Big\} \max_i \|f^i\|_\infty r_U.$$

Аналогичным образом устанавливается неравенство $\bar{B}_{t,h} \leq Mh$. Стремление $B_{t,h}, \bar{B}_{t,h} \to 0$ теперь очевидно, и доказательство завершено. □

Следствие 1. *Для любых* $\bar{u}, u \in \mathcal{U}$ *справедливо представление*

$$\begin{aligned} \Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] &= \int_I \big[\bar{H}_t(x_t, u(t)) - \bar{H}_t(x_t, \bar{u}(t))\big]\, dt, \\ \bar{H}_t(\mathrm{x}, \mathrm{u}) &= \left(\mathfrak{L}(\mathrm{u})\, \bar{p}_t\right)(\mathrm{x}) \doteq D\bar{p}_t(\mathrm{x})\big[f(\mathrm{x}, \mathrm{u})\big]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Это и есть искомая точная формула приращения функционала общей нелинейной задачи управления.

5. Позиционные управления спуска и необходимое условие оптимальности

Формула (4.9) предлагает явную конструкцию управления спуска из опорной точки $\bar{u}$: надо лишь заметить, что подынтегральное выражение в ней является разностью значений одной и той же функции в точках $u(t)$ и $\bar{u}(t)$. Тогда выбор нового управления u из условия

$$\bar{H}_t(x_t, u(t)) = \min_{\mathrm{u} \in U} \bar{H}_t(x_t, \mathrm{u}) \quad \text{для п. в. } t \in I \tag{5.1}$$

обеспечивает неравенство $\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] \leq 0$. Тонкость, однако же, состоит в том, что траектория x отвечает здесь еще не найденному управлению u. Возникает своего рода «порочный круг», который превращает условие (5.1) в *операторное уравнение* на пространстве $\mathcal{U}$.

Обоснование следующего утверждения опирается на лемму Филиппова и теорему Какутани – Фана и практически дословно повторяет доказательство [3, Т. 3].

Предложение 3. *Множество* $\bar{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ *решений* (5.1) *не пусто.*

По построению каждый элемент $u \in \bar{\mathcal{U}}$ реализует условие $\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] \leq 0$, т. е. является управлением потенциального спуска. Принимая терминологию В. А. Дыхты, будем называть все такие элементы *управлениями сравнения* (с $\bar{u}$). Из вышесказанного немедленно вытекает основной результат статьи:

Теорема 1. *Пусть $\bar{u}$ оптимально в задаче (P). Тогда равенство*

$$\bar{H}_t(x_t^u, \bar{u}(t)) = \min_U \bar{H}_t(x_t^u, \cdot) \quad \text{для п. в. } t \in I \tag{5.2}$$

выполнено для всех $u \in \bar{\mathcal{U}}$. При этом $\mathcal{I}[\bar{u}] = \mathcal{I}[u]$.

В отличие от ПМП и условий высших порядков, применение теоремы 2 требует предварительной подготовки — синтеза управления сравнения u. В рассматриваемом аффинно-выпуклом случае это может быть сделано конструктивно, с помощью концепции позиционного управления (1.2) и схемы Красовского – Субботина — в полном соответствии с первоначальной идеей Владимира Александровича.

Примеры, иллюстрирующие факт *усиления теоремой 2 как ПМП, так и ППМ*, построены нами в классическом случае $\mathbf{B} = \mathbb{R}^n$ [8], а также в некоторых распределенных линейных постановках [3]. Конструкция подобных (нетривиальных) примеров в нелинейных задачах управления уравнениями в частных производных составляет открытый и нетривиальный вопрос.

6. Заключение

Теорему 2 можно рассматривать как строгую реализацию эмпирического позиционного принципа минимума в общей нелинейной задаче управления. В отличие от последнего, сформулированного В. А. Дыхтой в вариационной форме с нестандартной задачей сравнения. Наш результат имеет аналитический вид, отдаленно напоминающий ПМП. Поиск примеров для распределенных систем и интерпретация теоремы 2 в терминах монотонного метода последовательных приближений, подобного [8; 9], относятся к важным задачам наших будущих исследований.

Список источников

1. Габасов Р. Ф. Об оптимальности особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1000–1011.
2. Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Методы оптимального управления. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1978.
3. Гончарова Е. В., Погодаев Н. И., Старицын М. В. Точные формулы приращения целевого функционала в задаче оптимального управления линейным уравнением баланса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 3–20. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.3
4. Дыхта В. А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37.

5. Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 19–39. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.19
6. Дыхта В. А. Методы повышения эффективности позиционного принципа минимума в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2023. Т. 224. С. 54–64. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-54-64
7. Картан Э. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М. : Мир, 1971. 392 с.
8. Погодаев Н. И., Старицын М. В. Точные формулы приращения функционала и необходимые условия оптимальности, альтернативные принципу Понтрягина // Математический сборник. 2024. Т. 215, № 6. С. 77–110. https://doi.org/10.4213/sm9967
9. Срочко В. А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск : Изд-во ИГУ, 1982. 110 с.
10. Amari S.-i. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields // Biological Cybernetics. 1977. Vol. 27, N 2. P. 77–87.
11. Aronna M. S., Motta M., Rampazzo F. A higher-order maximum principle for impulsive optimal control problems // SIAM J. Control Optim. 2020. Vol. 58, N 2. P. 814–844. https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.05056
12. Diestel J., Uhl J. Vector Measures. Mathematical surveys and monographs. Providence, RI : American Mathematical Society, 1977.
13. Kolokoltsov V. N. Differential equations on measures and functional spaces. Cham : Birkhäuser, 2019.
14. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game-Theoretical Control Problems. Berlin : Springer Verlag, 1988.
15. Sarychev A. V. High-order necessary conditions of optimality for nonlinear control systems // Systems & Control Letters. 1991. Vol. 16, N 5. P. 369–378. https://doi.org/10.1016/0167-6911(91)90058-M

References

1. Gabasov R.F. On the optimality of singular controls. *Differential Equations*, 1968, vol. 4, no. 6, pp. 1000–1011. (in Russian)
2. Gabasov R., Kirillova F.M. *Optimal control methods.* 2nd ed. Moscow, Nauka Publ, 1978. (in Russian)
3. Goncharova E.V., Pogodaev N.I., Staritsyn M.V. Exact Formulas for the Increment of the Cost Functional in Optimal Control of Linear Balance Equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 51, pp. 3–20. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.51.3 (in Russian)
4. Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 11, pp. 1906–1921. https://doi.org/10.1134/S0005117914110022 (in Russian)
5. Dykhta V.A. Feedback minimum principle: variational strengthening of the concept of extremality in optimal control. *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 19–39.
6. Dykhta V.A. Methods for improving the efficiency of the positional minimum principle in optimal control problems. *Differential Equations and Optimal Control,*

Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 2023, vol. 224, pp. 54–64. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-54-64 (in Russian)

7. Cartan H. *The Differential Calculus. Differential Forms.* Moscow, Mir Publ., 1971, 392 p.
8. Pogodaev N.I., Staritsyn M.V. Exact formulae for the increment of the objective functional and necessary optimality conditions, alternative to Pontryagin's maximum principle. *Sbornik: Mathematics*, 2024, vol. 215, no. 6, pp. 790–822. https://doi.org/10.4213/sm9967e (in Russian)
9. Srochko V. *Computational Methods of Optimal Control.* Irkutsk, Irkuts St. Univ. Publ., 1982, 110 p.
10. Amari S.-i. Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields. *Biological Cybernetics*, 1977. vol. 27, no. 2, pp. 77–87.
11. Aronna M.S., Motta M., Rampazzo F. A higher-order maximum principle for impulsive optimal control problems. *SIAM J. Control Optim.*, 2020, vol. 58, no. 2, pp. 814–844. https://doi.org/10.48550/arXiv.1903.05056
12. Diestel J., Uhl J. *Vector Measures.* Mathematical surveys and monographs. Providence, RI, American Mathematical Society, 1977.
13. Kolokoltsov V.N. *Differential equations on measures and functional spaces.* Cham, Birkhäuser, 2019.
14. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* Berlin, Springer Verlag, 1988.
15. Sarychev A.V. High-order necessary conditions of optimality for nonlinear control systems. *Systems & Control Letters*, 1991, vol. 16, no. 5, pp. 369–378. https://doi.org/10.1016/0167-6911(91)90058-M

Об авторах

Погодаев Николай Ильич, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, nickpogo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7062-1764

Самсонюк Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доц., ст. науч. сотр., Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, olga.samsonyuk@icc.ru, https://orcid.org/0000-0002-6060-9526

About the authors

Nikolay N. Pogodaev, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, nickpogo@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-7062-1764

Olga N. Samsonyuk, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, olga.samsonyuk@icc.ru, https://orcid.org/0000-0002-6060-9526

Старицын Максим Владимирович, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, 664033, Российская Федерация, starmax@icc.ru, https://orcid.org/0009-0008-4935-579X

Maksim V. Staritsyn, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russian Federation, starmax@icc.ru, https://orcid.org/0009-0008-4935-579X

Поступила в редакцию / Received 18.09.2025
Поступила после рецензирования / Revised 21.10.2025
Принята к публикации / Accepted 24.10.2025